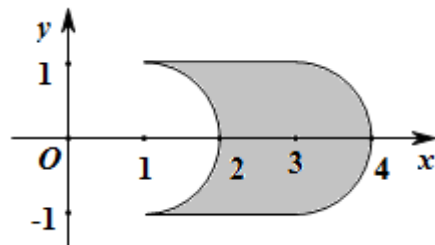


2013 年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

理科数学

一、填空题

1. 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+20}{3n+13} = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 设 $m \in \mathbf{R}$, $m^2 + m - 2 + (m^2 - 1)i$ 是纯虚数, 其中 i 是虚数单位, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$
3. 若 $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}$, 则 $x + y = \underline{\hspace{2cm}}$
4. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对应边分别为 a, b, c , 若 $3a^2 + 2ab + 3b^2 - 3c^2 = 0$, 则角 C 的大小是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (结果用反三角函数值表示)
5. 设常数 $a \in \mathbf{R}$, 若 $\left(x^2 + \frac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为 -10 , 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
6. 方程 $\frac{3}{3^x - 1} + \frac{1}{3} = 3^{x-1}$ 的实数解为 $\underline{\hspace{2cm}}$
7. 在极坐标系中, 曲线 $\rho = \cos \theta + 1$ 与 $\rho \cos \theta = 1$ 的公共点到极点的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
8. 盒子中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九个球, 从中任意取出两个, 则这两个球的编号之积为偶数的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$ (结果用最简分数表示)
9. 设 AB 是椭圆 Γ 的长轴, 点 C 在 Γ 上, 且 $\angle CBA = \frac{\pi}{4}$, 若 $AB=4$, $BC = \sqrt{2}$, 则 Γ 的两个焦点之间的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$
10. 设非零常数 d 是等差数列 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ 的公差, 随机变量 ξ 等可能地取值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$, 则方差 $D\xi = \underline{\hspace{2cm}}$
11. 若 $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \sin 2y = \frac{2}{3}$, 则 $\sin(x+y) = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 设 a 为实常数, $y = f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 9x + \frac{a^2}{x} + 7$, 若 $f(x) \geq a+1$ 对一切 $x \geq 0$ 成立, 则 a 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$
13. 在 xOy 平面上, 将两个半圆弧 $(x-1)^2 + y^2 = 1(x \geq 1)$ 和 $(x-3)^2 + y^2 = 1(x \geq 3)$ 、两条直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 围成的封闭图形记为 D , 如图中阴影部分. 记 D 绕 y 轴旋转一周而成的几何体为 Ω , 过 $(0, y) (|y| \leq 1)$ 作 Ω 的水平截面, 所得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2} + 8\pi$, 试利用祖暅原理、一个平放的圆柱和一个长方体, 得出 Ω 的体积值为 $\underline{\hspace{2cm}}$
14. 对区间 I 上有定义的函数 $g(x)$, 记 $g(I) = \{y \mid y = g(x), x \in I\}$, 已知定义域为 $[0, 3]$ 的函数 $y = f(x)$ 有反函数 $y = f^{-1}(x)$, 且 $f^{-1}([0, 1]) = [1, 2)$, $f^{-1}((2, 4]) = [0, 1)$, 若方程 $f(x) - x = 0$ 有解 x_0 , 则 $x_0 = \underline{\hspace{2cm}}$



二、选择题

15. 设常数 $a \in R$, 集合 $A = \{x | (x-1)(x-a) \geq 0\}$, $B = \{x | x \geq a-1\}$, 若 $A \cup B = R$, 则 a 的取值范围为 ()

- (A) $(-\infty, 2)$ (B) $(-\infty, 2]$ (C) $(2, +\infty)$ (D)

$[2, +\infty)$

16. 钱大姐常说“便宜没好货”，她这句话的意思是：“不便宜”是“好货”的 ()

- (A)充分条件 (B)必要条件 (C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

17. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = 2^n - 1$, 若一个 7 行 12 列的矩阵的第 i 行第 j 列的元素 $a_{i,j} = a_i \cdot a_j + a_i + a_j$, ($i = 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, \dots, 12$) 则该矩阵元素能取到的不同数值的个数为 ()

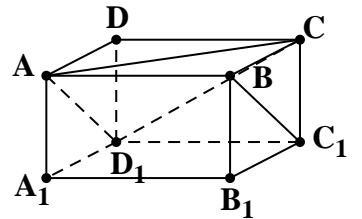
- (A)18 (B)28 (C)48 (D)63

18. 在边长为 1 的正六边形 ABCDEF 中, 记以 A 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5$; 以 D 为起点, 其余顶点为终点的向量分别为 $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}_3, \vec{d}_4, \vec{d}_5$. 若 m, M 分别为 $(\vec{a}_i + \vec{a}_j + \vec{a}_k) \cdot (\vec{d}_r + \vec{d}_s + \vec{d}_t)$ 的最小值、最大值, 其中 $\{i, j, k\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{r, s, t\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 m, M 满足 () .

- (A) $m = 0, M > 0$ (B) $m < 0, M > 0$ (C) $m < 0, M = 0$ (D) $m < 0, M < 0$

三、解答题

19. (本题满分 12 分) 如图, 在长方体 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 中, AB=2, AD=1, A₁A=1, 证明直线 BC₁ 平行于平面 DA₁C, 并求直线 BC₁ 到平面 D₁AC 的距离.



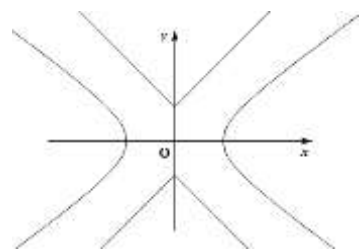
20. (6分+8分) 甲厂以 x 千克/小时的速度运输生产某种产品 (生产条件要求 $1 \leq x \leq 10$), 每小时可获得利润是 $100(5x+1-\frac{3}{x})$ 元.

- (1) 要使生产该产品 2 小时获得的利润不低于 3000 元, 求 x 的取值范围;
 (2) 要使生产 900 千克该产品获得的利润最大, 问: 甲厂应该选取何种生产速度? 并求最大利润.

21. (6分+8分) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x)$, 其中常数 $\omega > 0$;

- (1) 若 $y = f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增, 求 ω 的取值范围;
 (2) 令 $\omega = 2$, 将函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 再向上平移 1 个单位, 得到函数 $y = g(x)$ 的图像, 区间 $[a, b]$ ($a, b \in R$ 且 $a < b$) 满足: $y = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少含有 30 个零点, 在所有满足上述条件的 $[a, b]$ 中, 求 $b-a$ 的最小值.

22. (3分+5分+8分) 如图, 已知曲线 $C_1: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$, 曲线



$C_2: |y| = |x| + 1$, P 是平面上一点, 若存在过点 P 的直线与 C_1, C_2 都有公共点, 则称 P 为“ C_1-C_2 型点”.

(1) 在正确证明 C_1 的左焦点是“ C_1-C_2 型点”时, 要使用一条过该焦点的直线, 试写出一条这样的直线的方程 (不要求验证);

(2) 设直线 $y = kx$ 与 C_2 有公共点, 求证 $|k| > 1$, 进而证明原点不是“ C_1-C_2 型点”;

(3) 求证: 圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ C_1-C_2 型点”.

23. (3分+6分+9分) 给定常数 $c > 0$, 定义函数 $f(x) = 2|x+c+4| - |x+c|$, 数列 a_1, a_2, a_3, \dots 满足 $a_{n+1} = f(a_n), n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 若 $a_1 = -c - 2$, 求 a_2 及 a_3 ; (2) 求证: 对任意 $n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} - a_n \geq c$;

(3) 是否存在 a_1 , 使得 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 成等差数列? 若存在, 求出所有这样的 a_1 , 若不存在, 说明理由.

参考答案

一. 填空题

1. $\frac{1}{3}$ 2. -2 3. 0 4. $\pi - \arccos \frac{1}{3}$ 5. -2 6. $\log_3 4$ 7. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 8. $\frac{13}{18}$

9. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$ 10. $30d^2$ 11. $\frac{2}{3}$ 12. $a \leq -\frac{8}{7}$ 13. $2\pi^2 + 16\pi$ 14. 2

二. 选择题

题号	15	16	17	18
代号	B	B	A	D

三. 解答题

19. 【解答】因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体, 故 $AB \parallel C_1D_1, AB = C_1D_1$,

故 ABC_1D_1 为平行四边形, 故 $BC_1 \parallel AD_1$, 显然 B 不在平面 D_1AC 上, 于是直线 BC_1 平行于平面 DA_1C ;

直线 BC_1 到平面 D_1AC 的距离即为点 B 到平面 D_1AC 的距离设为 h

考虑三棱锥 $ABCD_1$ 的体积, 以 ABC 为底面, 可得 $V = \frac{1}{3} \times (\frac{1}{2} \times 1 \times 2) \times 1 = \frac{1}{3}$

而 $\triangle AD_1C$ 中, $AC = D_1C = \sqrt{5}, AD_1 = \sqrt{2}$, 故 $S_{\triangle AD_1C} = \frac{3}{2}$

所以, $V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times h = \frac{1}{3} \Rightarrow h = \frac{2}{3}$, 即直线 BC_1 到平面 D_1AC 的距离为 $\frac{2}{3}$.

20. 【解答】(1) 根据题意, $200(5x+1-\frac{3}{x}) \geq 3000 \Rightarrow 5x-14-\frac{3}{x} \geq 0$

又 $1 \leq x \leq 10$, 可解得 $3 \leq x \leq 10$

(2) 设利润为 y 元, 则 $y = \frac{900}{x} \cdot 100(5x+1-\frac{3}{x}) = 9 \times 10^4 [-3(\frac{1}{x}-\frac{1}{6})^2 + \frac{61}{12}]$

故 $x=6$ 时, $y_{\max} = 457500$ 元.

21. 【解答】(1) 因为 $\omega > 0$, 根据题意有

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{4}\omega \geq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{3}\omega \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow 0 < \omega \leq \frac{3}{4}$$

(2) $f(x) = 2\sin(2x)$, $g(x) = 2\sin(2(x+\frac{\pi}{6})) + 1 = 2\sin(2x+\frac{\pi}{3}) + 1$

$g(x) = 0 \Rightarrow \sin(2x+\frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$ 或 $x = k\pi - \frac{7}{12}\pi, k \in \mathbb{Z}$,

即 $g(x)$ 的零点相离间隔依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{2\pi}{3}$,

故若 $y = g(x)$ 在 $[a, b]$ 上至少含有 30 个零点, 则 $b-a$ 的最小值为

$$14 \times \frac{2\pi}{3} + 15 \times \frac{\pi}{3} = \frac{43\pi}{3}.$$

23. 【解答】(1) C_1 的左焦点为 $F(-\sqrt{3}, 0)$, 过 F 的直线 $x = -\sqrt{3}$ 与 C_1 交于 $(-\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$,

与 C_2 交于 $(-\sqrt{3}, \pm(\sqrt{3}+1))$, 故 C_1 的左焦点为“ C_1 - C_2 型点”, 且直线可以为 $x = -\sqrt{3}$;

(2) 直线 $y = kx$ 与 C_2 有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx \\ |y| = |x| + 1 \end{cases} \Rightarrow (|k|-1)|x| = 1, \text{ 若方程组有解, 则必须 } |k| > 1;$$

直线 $y = kx$ 与 C_2 有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 - 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (1-2k^2)x^2 = 2, \text{ 若方程组有解, 则必须 } k^2 < \frac{1}{2}$$

故直线 $y = kx$ 至多与曲线 C_1 和 C_2 中的一条有交点, 即原点不是“ C_1 - C_2 型点”。

(3) 显然过圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内一点的直线 l 若与曲线 C_1 有交点, 则斜率必存在;

根据对称性, 不妨设直线 l 斜率存在且与曲线 C_2 交于点 $(t, t+1) (t \geq 0)$, 则

$$l: y = (t+1) = k(x-t) \Rightarrow kx - y + (1+t-kt) = 0$$

直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内部有交点, 故 $\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

化简得, $(1+t-kt)^2 < \frac{1}{2}(k^2+1) \dots\dots\dots \textcircled{1}$

若直线 l 与曲线 C_1 有交点, 则

$$\begin{cases} y = kx - kt + t + 1 \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (k^2 - \frac{1}{2})x^2 + 2k(1+t-kt)x + (1+t-kt)^2 + 1 = 0$$

$$\Delta = 4k^2(1+t-kt)^2 - 4(k^2 - \frac{1}{2})[(1+t-kt)^2 + 1] \geq 0 \Rightarrow (1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1)$$

化简得, $(1+t-kt)^2 \geq 2(k^2 - 1) \dots\dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得, $2(k^2 - 1) \leq (1+t-kt)^2 < \frac{1}{2}(k^2 + 1) \Rightarrow k^2 < 1$

但此时, 因为 $t \geq 0, [1+t(1-k)]^2 \geq 1, \frac{1}{2}(k^2 + 1) < 1$, 即 $\textcircled{1}$ 式不成立;

当 $k^2 = \frac{1}{2}$ 时, $\textcircled{1}$ 式也不成立

综上, 直线 l 若与圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内有交点, 则不可能同时与曲线 C_1 和 C_2 有交点,

即圆 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ 内的点都不是“ C_1 - C_2 型点” .

23. 【解答】: (1) 因为 $c > 0, a_1 = -(c+2)$, 故 $a_2 = f(a_1) = 2|a_1 + c + 4| - |a_1 + c| = 2$,

$$a_3 = f(a_2) = 2|a_2 + c + 4| - |a_2 + c| = c + 10$$

(2) 要证明原命题, 只需证明 $f(x) \geq x + c$ 对任意 $x \in R$ 都成立,

$$f(x) \geq x + c \Leftrightarrow 2|x + c + 4| - |x + c| \geq x + c$$

即只需证明 $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c$

若 $x + c \leq 0$, 显然有 $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c = 0$ 成立;

若 $x + c > 0$, 则 $2|x + c + 4| \geq |x + c| + x + c \Leftrightarrow x + c + 4 > x + c$ 显然成立

综上, $f(x) \geq x + c$ 恒成立, 即对任意的 $n \in N^*$, $a_{n+1} - a_n \geq c$

(3) 由(2)知, 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则公差 $d \geq c > 0$, 故 n 无限增大时,

总有 $a_n > 0$

$$\text{此时, } a_{n+1} = f(a_n) = 2(a_n + c + 4) - (a_n + c) = a_n + c + 8$$

$$\text{即 } d = c + 8$$

$$\text{故 } a_2 = f(a_1) = 2|a_1 + c + 4| - |a_1 + c| = a_1 + c + 8,$$

$$\text{即 } 2|a_1 + c + 4| = |a_1 + c| + a_1 + c + 8,$$

当 $a_1 + c \geq 0$ 时, 等式成立, 且 $n \geq 2$ 时, $a_n > 0$, 此时 $\{a_n\}$ 为等差数列,

满足题意;

$$\text{若 } a_1 + c < 0, \text{ 则 } |a_1 + c + 4| = 4 \Rightarrow a_1 = -c - 8,$$

$$\text{此时, } a_2 = 0, a_3 = c + 8, \dots, a_n = (n-2)(c+8) \text{ 也满足题意;}$$

综上, 满足题意的 a_1 的取值范围是 $[-c, +\infty) \cup \{-c-8\}$.