2015年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）数学文

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1. 若集合 $A=\{x|-5<x<2\}$，$B=\{x|-3<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　　）

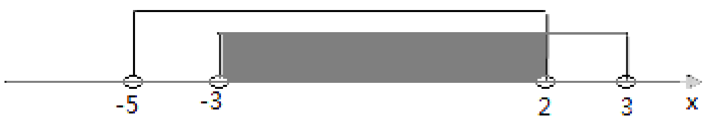
A. $\{x|-3<x<2\}$

B. $\{x|-5<x<2\}$

C. $\{x|-3<x<3\}$

D. $\{x|-5<x<3\}$

解析：在数轴上将集合A，B表示出来，如图所示，



由交集的定义可得，$A\cap B$ 为图中阴影部分，即 $\{x|-3<x<2\}$.

故选A

2. 圆心为 $(1,1)$ 且过原点的圆的方程是(　　)

A. $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

B. $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

C. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

D. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$

解析：由题意可得圆的半径为 $r=\sqrt{2}$，则圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

故选D

3. 下列函数中为偶函数的是(　　)

A. $y=x^2\sin x$

B. $y=x^2\cos x$

C. $y=|\ln x|$

D. $y=2^{-x}$

解析：根据偶函数的定义 $f(-x)=f(x)$，A 选项为奇函数，B 选项为偶函数，C 选项定义域为$(0,+\infty)$不具有奇偶性，D 选项既不是奇函数，也不是偶函数，故选 B.

4. 某校老年、中年和青年教师的人数见下表，采用分层抽样的方法调查教师的身体状况，在抽取的样本中，青年教师有320人，则该样本的老年教师人数为（　　）

类别	人数
老年教师	900
中年教师	1800
青年教师	1600
合计	4300

A. 90

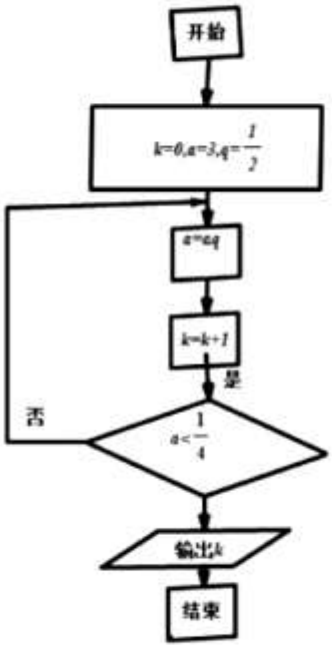
B. 100

C. 180

D. 300

解析：由题意，总体中青年教师与老年教师比例为$\frac{1600}{900}=\frac{16}{9}$；设样本中老年教师的人数为 x，由分层抽样的性质可得总体与样本中青年教师与老年教师的比例相等，即$\frac{320}{x}=\frac{16}{9}$，解得$x=180$. 故选 C

5. 执行如图所示的程序框图，输出的k的值为（　　）



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

解析：初值为 a=3，k=0，进入循环体后，a=$\frac{3}{2}$，k=1；a=$\frac{3}{4}$，k=2；a=$\frac{3}{8}$，k=3；a=$\frac{3}{16}$，k=4；

此时 a＜$\frac{1}{4}$，退出循环，故 k=4.

故选 B

6. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，“$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　　）

A. 充分而不必要条件

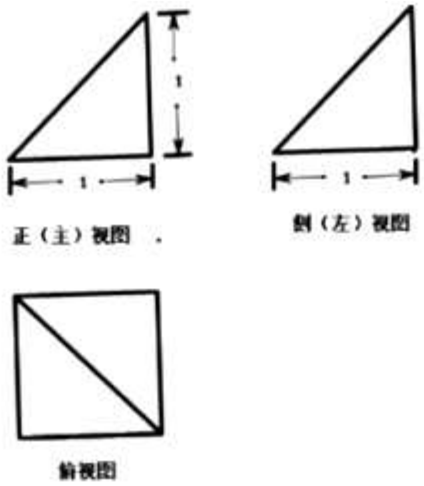
B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：$\vec{a}\bullet\vec{b}=|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>$，由已知得$\cos<\vec{a},\vec{b}>=1$，即$<\vec{a},\vec{b}>=0$，$\vec{a}//\vec{b}$. 而当$\vec{a}//\vec{b}$ 时，$<\vec{a},\vec{b}>$还可能是π，此时$\vec{a}\bullet\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$，故“$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分而不必要条件. 故选 A

7.某四棱锥的三视图如图所示，该四棱锥最长棱的棱长为(　　)



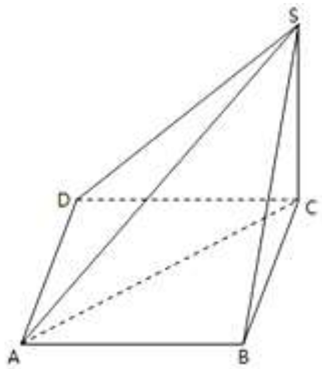
A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

解析：四棱锥的直观图如图所示：



由三视图可知，$SC\perp$平面ABCD，SA是四棱锥最长的棱，

$SA=\sqrt{SC^2+AC^2}=\sqrt{SC^2+AB^2+BC^2}=\sqrt{3}$.

故选C

8.某辆汽车每次加油都把油箱加满，下表记录了该车相邻两次加油时的情况.

加油时间	加油量（升）	加油时的累计里程（千米）
2015年5月1日	12	35000
2015年5月15日	48	35600

注：“累计里程“指汽车从出厂开始累计行驶的路程，在这段时间内，该车每100千米平均耗油量为(　　)

A. 6升

B. 8升

C. 10升

D. 12升

解析：因为第一次邮箱加满，所以第二次的加油量即为该段时间内的耗油量，故耗油量$V=48$升．而这段时间内行驶的里程数$S=35600-35000=600$千米．所以这段时间内，该车每100千米平均耗油量为$\frac{48}{600}\times100=8$升，故选B.

二、填空题(本大题共6小题，每小题5分，共30分.）

9. 复数$i\left(1+i\right)$的实部为__________.

解析：复数$i(1+i)=i-1=-1+i$，其实部为-1.

10. 2^{-3}，$3^{\frac{1}{2}}$，$\log_2 5$三个数中最大数的是_________.

解析：$2^{-3}=\frac{1}{8}<1$，$3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}>1$，$\log_2 5>\log_2 4>2>\sqrt{3}$，所以$\log_2 5$最大.

答案：$\log_2 5$

11. 在$\Delta\mathrm{ABC}$中，$a=3$，$b=\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{A}=\frac{2\pi}{3}$，则$\angle\mathrm{B}=$__________.

解析：由正弦定理，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin B}$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以

$\angle B=\dfrac{\pi}{4}$.

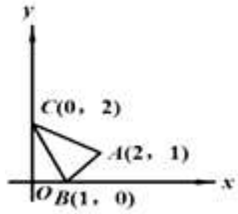
答案：$\dfrac{\pi}{4}$

12. 已知$\left(2,0\right)$是双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$b>0$）的一个焦点，则$b=$________.

解析：由题意知$c=2,a=1$，$b^2=c^2-a^2=3$，所以$b=\sqrt{3}$.

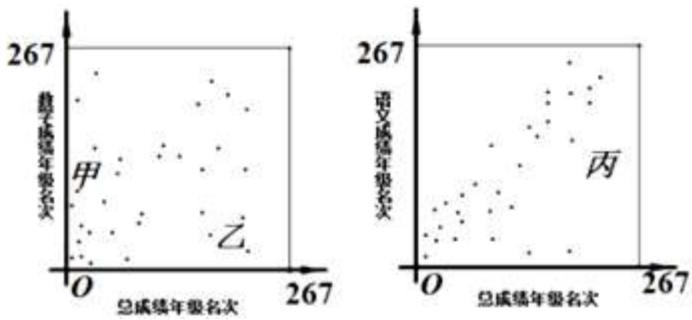
答案：$\sqrt{3}$

13. 如图，ΔABC及其内部的点组成的集合记为D，$P\left(x,y\right)$为D中任意一点，则$z=2x+3y$的最大值为________.



解析：由题图可知，目标函数 b=$\sqrt{3}$=$-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{3}$，因此当 x=2，y=1，即在点 A 处时 z 取得最大值为 7.

14. 高三年级267位学生参加期末考试，某班37位学生的语文成绩，数学成绩与总成绩在全年级中的排名情况如下图所示，甲、乙、丙为该班三位学生.



从这次考试成绩看，

①在甲、乙两人中，其语文成绩名次比其总成绩名次靠前的学生是________；

②在语文和数学两个科目中，丙同学的成绩名次更靠前的科目是________.

解析：①由图可知，甲的语文成绩排名比总成绩排名靠后；而乙的语文成绩排名比总成绩排名靠前，故填乙.

②由图可知，比丙的数学成绩排名还靠后的人比较多；而总成绩的排名中比丙排名靠后的人数比较少，所以丙的数学成绩的排名更靠前，故填数学.

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分. 解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤.)

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\sin x-2\sqrt{3}\sin^{2}\dfrac{x}{2}$.

(1) 求 $f\left(x\right)$ 的最小正周期.

(2) 求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$ 上的最小值.

解析：(1) 先利用倍角公式将 $\sin^{2}\dfrac{x}{2}$ 降幂，再利用两角和的正弦公式将 f(x) 化简，使之化简成 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 的形式，最后利用 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 计算函数的最小正周期.

(2) 将 x 的取值范围代入，先求出 $x+\dfrac{\pi}{3}$ 的范围，再数形结合得到三角函数的最小值.

答案：(1) ∵ $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})-\sqrt{3}$

∴ f(x) 的最小正周期为 2π

(2) ∵ $0\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$

∴ $\dfrac{\pi}{3}\le x+\dfrac{\pi}{3}\le\pi$

当 $x+\dfrac{\pi}{3}=\pi$，即 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 时，f(x) 取得最小值

∴ f(x) 在区间 $[0,\dfrac{2\pi}{3}]$ 上的最小值为 $f(\dfrac{2\pi}{3})=-\sqrt{3}$

16. 已知等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_1+a_2=10$，$a_4-a_3=2$.

(1) 求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式.

(2) 设等比数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $b_2=a_3$，$b_3=a_7$，问：b_6 与数列 $\left\{a_n\right\}$ 的第几项相等？

解析：(1) 利用等差数列的通项公式，将 a_1,a_2,a_3,a_4 转化成 a_1 和 d，解方程得到 a_1 和 d 的

值，直接写出等差数列的通项公式即可.

(2)先利用第一问的结论得到b_2和b_3的值，再利用等比数列的通项公式，将b_2和b_3转化为b_1和 q，解出b_1和 q 的值，得到b_6的值，再代入到上一问等差数列的通项公式中，解出 n 的值，即项数.

答案：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为$a_4-a_3=2$，所以$d=2$.

又因为$a_1+a_2=10$，所以$2a_1+d=10$，故$a_1=4$.

所以$a_n=4+2(n-1)=2n+2 \quad (n=1,2,\cdots)$.

(2)设等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

因为$b_2=a_3=8$，$b_3=a_7=16$，

所以$q=2$，$b_1=4$.

所以$b_6=4\times 2^{6-1}=128$.

由$128=2n+2$，得$n=63$.

所以b_6与数列$\{a_n\}$的第 63 项相等.

17. 某超市随机选取1000位顾客，记录了他们购买甲、乙、丙、丁四种商品的情况，整理成如下统计表，其中“√”表示购买，“×”表示未购买.

商品 顾客人数	甲	乙	丙	丁
100	√	×	√	√
217	×	√	×	√
200	√	√	√	×
300	√	×	√	×
85	√	×	×	×
98	×	√	×	×

(1)估计顾客同时购买乙和丙的概率.

(2)估计顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买3种商品的概率.

(3)如果顾客购买了甲，则该顾客同时购买乙、丙、丁中那种商品的可能性最大？

解析：(1) 由统计表读出顾客同时购买乙和丙的人数200，计算出概率.

(2) 先由统计表读出顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买3种商品的人数100+200，再计算概率.

(3)由统计表读出顾客同时购买甲和乙的人数为200，顾客同时购买甲和丙的人数为100+200+300，顾客同时购买甲和丁的人数为100，分别计算出概率，再通过比较大小得出结论.

答案：(1)从统计表可以看出，在这1000位顾客中，有200位顾客同时购买了乙和丙，所以顾客同时购买乙和丙的概率可以估计为$\frac{200}{1000}=0.2$.

(2)从统计表可以看出，在在这1000位顾客中，有100位顾客同时购买了甲、丙、丁，另有200位顾客同时购买了甲、乙、丙，其他顾客最多购买了2种商品.所以顾客在甲、乙、丙、丁中同时购买3种商品的概率可以估计为$\frac{100+200}{1000}=0.3$.

(3)与(1)同理，可得：

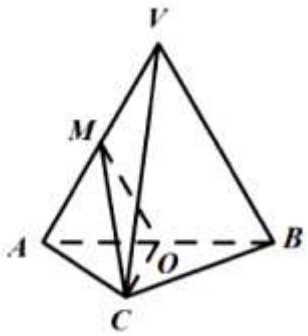
顾客同时购买甲和乙的概率可以估计为$\frac{200}{1000}=0.2$，

顾客同时购买甲和丙的概率可以估计为$\frac{100+200+300}{1000}=0.6$，

顾客同时购买甲和丁的概率可以估计为$\frac{100}{1000}=0.1$，

所以，如果顾客购买了甲，则该顾客同时购买丙的可能性最大.

18.如图，在三棱锥$V-ABC$中，平面$VAB\perp$平面ABC，ΔVAB为等边三角形，$AC\perp BC$且$AC=BC=\sqrt{2}$，O，M分别为AB，VA的中点.



(1)求证：$VB//$平面MOC.

(2)求证：平面$MOC\perp$平面VAB.

(3)求三棱锥$V-ABC$的体积.

解析：(1) 在三角形 ABV 中，利用中位线的性质得$OM//VB$，最后直接利用线面平行的判定得到结论.

(2) 先在三角形 ABC 中得到$OC\perp AB$，再利用面面垂直的性质得$OC\perp$平面 VAB，最后利用面面垂直的判定得出结论.

(3)将三棱锥进行等体积转化，利用$V_{C-VAB}=V_{V-ABC}$，先求出三角形 VAB 的面积，由于$OC\perp$平面 VAB，所以 OC 为锥体的高，利用锥体的体积公式计算出体积即可.

答案：(1)因为O,M分别为 AB，VA 的中点，

所以$OM//VB$.

又因为$VB\not\subset$平面 MOC，

所以$VB//$平面 MOC.

(2)因为$AC=BC$，O为 AB 的中点，

所以$OC\perp AB$.

又因为平面 VAB$\perp$平面 ABC，且$OC\subset$平面 ABC，

所以$OC\perp$平面 VAB.

所以平面 MOC$\perp$平面 VAB.

(3)在等腰直角三角形ACB中，$AC=BC=\sqrt{2}$，

所以$AB=2,OC=1$.

所以等边三角形 VAB 的面积$S_{\Delta VAB}=\sqrt{3}$.

又因为$OC\perp$平面 VAB，

所以三棱锥 C-VAB 的体积等于 $\frac{1}{3}\times OC\times S_{\Delta VAB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

又因为三棱锥 V-ABC 的体积与三棱锥 C-VAB 的体积相等，

所以三棱锥 V-ABC 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 设函数 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}-k\ln x$，$k>0$.

(1) 求 $f\left(x\right)$ 的单调区间和极值.

(2) 证明：若 $f\left(x\right)$ 存在零点，则 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,\sqrt{e}\right]$ 上仅有一个零点.

解析：(1) 先对 $f\left(x\right)$ 求导，令 $f'\left(x\right)=0$ 解出 x，将函数的定义域断开，列表，分析函数的单调性，所以由表格知当 $x=\sqrt{k}$ 时，函数取得极小值，同时也是最小值.

(2) 利用第一问的表，知 $f(\sqrt{k})$ 为函数的最小值，如果函数有零点，只需最小值 $\frac{k(1-\ln k)}{2}\le 0$，从而解出 $k\ge e$，下面再分情况分析函数有几个零点.

答案：(1) 由 $f\left(x\right)=\frac{x^2}{2}-k\ln x$，$k>0$ 得 $f'(x)=x-\frac{k}{x}=\frac{x^2-k}{x}$.

由 $f'\left(x\right)=0$ 解得 $x=\sqrt{k}$.

$f\left(x\right)$ 与 $f'\left(x\right)$ 在 $(0,+\infty)$ 区间上的情况如下：

x	$(0,\sqrt{k})$	$\sqrt{k}$	$(\sqrt{k},+\infty)$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	$\frac{k(1-\ln k)}{2}$	↗

所以，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,\sqrt{k})$，单调递增区间是 $(\sqrt{k},+\infty)$；

$f(x)$ 在 $x=\sqrt{k}$ 处取得极小值 $f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$.

(2) 由 (1) 知，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{k})=\frac{k(1-\ln k)}{2}$.

因为 $f(x)$ 存在零点，所以 $\frac{k(1-\ln k)}{2} \le 0$，从而 $k \ge e$.

当 $k=e$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e})$ 上单调递减，且 $f(\sqrt{e})=0$，

所以 $x=\sqrt{e}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上的唯一零点.

当 $k>e$ 时，$f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递减，且 $f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f(\sqrt{e})=\frac{e-k}{2}<0$，

所以 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

综上可知，若 $f(x)$ 存在零点，则 $f(x)$ 在区间 $(1,\sqrt{e}]$ 上仅有一个零点.

20. 已知椭圆 $\mathrm{C}: x^2+3y^2=3$，过点 $\mathrm{D}(1,0)$ 且不过点 $\mathrm{E}(2,1)$ 的直线与椭圆 C 交于 A，B 两点，直线 AE 与直线 $x=3$ 交于点 M.

(1) 求椭圆 C 的离心率.

(2) 若 AB 垂直于 x 轴，求直线 BM 的斜率.

(3) 试判断直线 BM 与直线 DE 的位置关系，并说明理由.

解析：(1) 先将椭圆方程化为标准方程，得到 a，b，c 的值，再利用 $e=\frac{c}{a}$ 计算离心率.

(2) 由直线 AB 的特殊位置，设出 A，B 点坐标，设出直线 AE 的方程，由于直线 AE 与 x=3 相交于 M 点，所以得到 M 点坐标，利用点 B、点 M 的坐标，求直线 BM 的斜率.

(3) 分直线 AB 的斜率存在和不存在两种情况进行讨论，第一种情况，直接分析即可得出结论，第二种情况，先设出直线 AB 和直线 AE 的方程，将椭圆方程与直线 AB 的方程联立，消参，得到 x_1+x_2 和 x_1x_2，代入到 $k_{BM}-1$ 中，只需计算出等于 0 即可证明 $k_{BM}=k_{DE}$，即两直线平行.

答案：(1) 椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

所以 $a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2) 因为 AB 过点 $D(1,0)$ 且垂直于 x 轴，所以可设 $A(1,y_1)$，$B(1,-y_1)$.

直线 AE 的方程为 $y-1=(1-y_1)(x-2)$.

令 $x=3$，得 $M(3,2-y_1)$.

所以直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{2-y_1+y_1}{3-1}=1$.

(3)直线 BM 与直线 DE 平行.证明如下：

当直线 AB 的斜率不存在时，由(2)可知 $k_{BM}=1$.

又因为直线 DE 的斜率 $k_{DE}=\dfrac{1-0}{2-1}=1$，所以 $BM//DE$.

当直线 AB 的斜率存在时，设其方程为 $y=k(x-1)(k\neq 1)$.

设 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，则直线 AE 的方程为 $y-1=\dfrac{y_1-1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=3$，得点 $M(3,\dfrac{y_1+x_1-3}{x_1-2})$.

由 $\begin{cases} x^2+3y^2=3 \\ y=k(x-1) \end{cases}$，得 $(1+3k^2)x^2-6k^2x+3k^2-3=0$.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{6k^2}{1+3k^2}$， $x_1x_2=\dfrac{3k^2-3}{1+3k^2}$.

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{\dfrac{y_1+x_1-3}{x_1-2}-y_2}{3-x_2}$.

因为 $k_{BM}-1=\dfrac{k(x_1-1)+x_1-3-k(x_1-1)(x_1-2)-(3-x_2)(x_1-2)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=\dfrac{(k-1)[-x_1x_2+2(x_1+x_2)-3)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=\dfrac{(k-1)[\dfrac{-3k^2+3}{1+3k^2}+\dfrac{12k^2}{1+3k^2}-3)}{(3-x_2)(x_1-2)}$

$=0$，

所以 $k_{BM}=1=k_{DE}$.

所以 $BM // DE$.

综上可知，直线 BM 与直线 DE 平行.