

## 2014 年江西省中考模拟数学(三)

### 一、选择题(本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

1. (3 分) 如果+30m 表示向东走 30m, 那么向西走 40m 表示为( )

- A. +40m
- B. -40m
- C. +30m
- D. -30m

解析: 如果+30 米表示向东走 30 米, 那么向西走 40m 表示-40m.

答案: B.

2. (3 分) 若实数 a、b 满足  $a+b=5$ ,  $a^2b+ab^2=-10$ , 则 ab 的值是( )

- A. -2
- B. 2
- C. -50
- D. 50

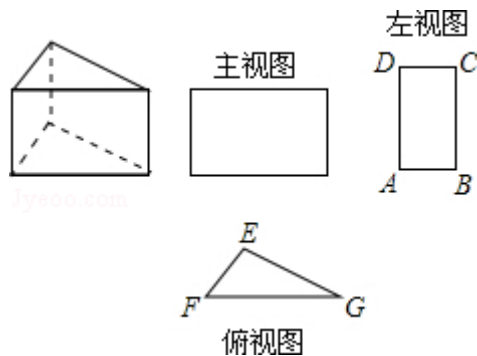
解析:  $a+b=5$  时,

原式= $ab(a+b)=5ab=-10$ ,

解得:  $ab=-2$ .

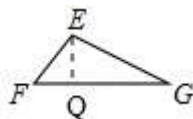
答案: A.

3. (3 分) 三棱柱的三视图如图,  $\triangle EFG$  中,  $EF=8\text{cm}$ ,  $EG=12\text{cm}$ ,  $\angle EGF=30^\circ$ , 则 AB 的长( )



- A. 6
- B. 8
- C. 12
- D.  $3\sqrt{3}$

解析: 过点 E 作  $EQ \perp FG$  于点 Q,



由题意可得出:  $EQ=AB$ ,

$\because EG=12\text{cm}$ ,  $\angle EGF=30^\circ$ ,

$\therefore EQ=AB=\frac{1}{2} \times 12=6(\text{cm})$ .

答案：A.

4. (3分)假期到了，17名女教师去外地培训，住宿时有2人间和3人间可供租住，每个房间都要住满，她们有几种租住方案( )

- A. 5种
- B. 4种
- C. 3种
- D. 2种

解析：设住3人间的需要有 $x$ 间，住2人间的需要有 $y$ 间，

$$3x+2y=17,$$

因为， $2y$ 是偶数，17是奇数，

所以， $3x$ 只能是奇数，即 $x$ 必须是奇数，

当 $x=1$ 时， $y=7$ ，

当 $x=3$ 时， $y=4$ ，

当 $x=5$ 时， $y=1$ ，

综合以上得知，第一种是：1间住3人的，7间住2人的，

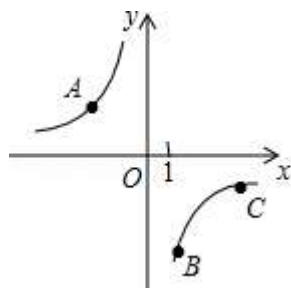
第二种是：3间住3人的，4间住2人的，

第三种是：5间住3人的，1间住2人的，

答：有3种不同的安排.

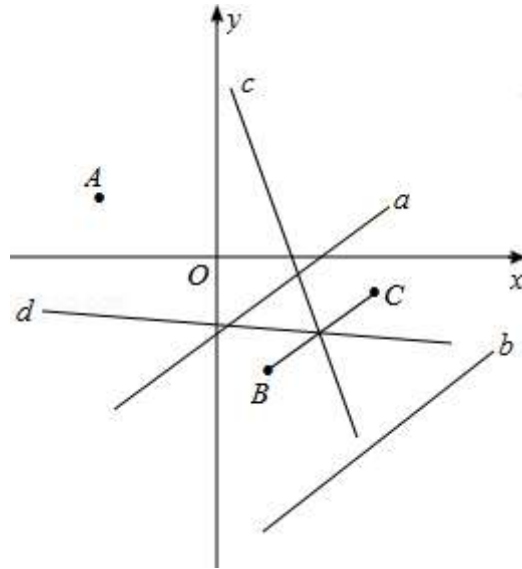
答案：C.

5. (3分)如图，A、B、C是反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 图象上三点，作直线 $l$ ，使A、B、C到直线 $l$ 的距离之比为3:1:1，则满足条件的直线 $l$ 共有( )



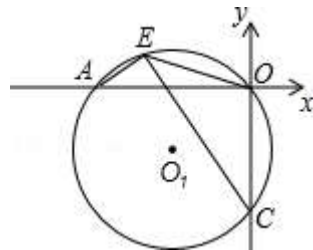
- A. 4条
- B. 3条
- C. 2条
- D. 1条

解析：如解答图所示，满足条件的直线有4条，



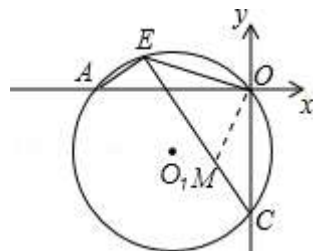
答案：A.

6. (3分) 如图，直线  $l: y = -x - \sqrt{2}$  与坐标轴交于 A, C 两点，过 A, O, C 三点作  $\odot O_1$ ，点 E 为劣弧 AO 上一点，连接 EC, EA, EO，当点 E 在劣弧 AO 上运动时（不与 A, O 两点重合）， $\frac{EC - EA}{EO}$  的值是否发生变化？（ ）



- A.  $\sqrt{2}$
- B.  $\sqrt{3}$
- C. 2
- D. 变化

解析：对于直线  $l: y = -x - \sqrt{2}$ ，  
 令  $x=0$ ，得到  $y = -\sqrt{2}$ ；令  $y=0$ ，得到  $x = -\sqrt{2}$ ，  
 $\therefore OA = OC$ ，又  $\angle AOC = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \triangle OAC$  为圆内接等腰直角三角形，AC 为直径，  
 在 CE 上截取  $CM = AE$ ，连接 OM，



$\therefore$  在  $\triangle OAE$  和  $\triangle OCM$  中，

$$\begin{cases} OA=OC \\ \angle OAE=\angle OCM, \\ AE=CM \end{cases}$$

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCM$  (SAS),

$\therefore \angle AOE = \angle COM, OM = OE,$

$\because \angle AOC = \angle AOM + \angle MOC = 90^\circ, \angle MOE = \angle AOE + \angle AOM,$

$\therefore \angle MOE = 90^\circ,$

$\therefore \triangle OME$  为等腰直角三角形,

$\therefore ME = \sqrt{2}EO,$

又  $\because ME = EC - CM = EC - AE,$

$\therefore EC - AE = \sqrt{2}EO,$  即  $\frac{EC - EA}{EO} = \sqrt{2}.$

答案: A.

## 二、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

7. (3 分) 分解因式:  $(a+2)(a-2)+3a = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析:  $(a+2)(a-2)+3a$

$= a^2 + 3a - 4$

$= (a-1)(a+4).$

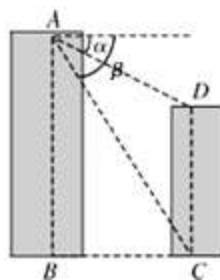
答案:  $(a-1)(a+4).$

8. (3 分) 雾霾 (PM2.5) 含有有毒有害物质, 对健康有很大的危害, 被称为大气元凶, 雾霾的直径大约是 0.0000025m, 把数据 0.0000025 用科学记数法表示为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

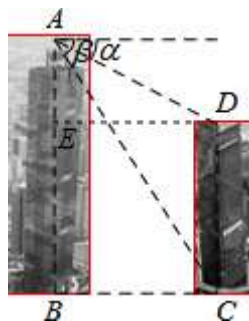
解析:  $0.0000025 = 2.5 \times 10^{-6};$

答案:  $2.5 \times 10^{-6}.$

9. (3 分) 如图, 两建筑物的水平距离 BC 为 18m, 从 A 点测得 D 点的俯角  $\alpha$  为  $30^\circ$ , 测得 C 点的俯角  $\beta$  为  $60^\circ$ . 则建筑物 CD 的高度为  $\underline{\hspace{2cm}}$  m (结果不作近似计算).



解析: 过点 D 作  $DE \perp AB$  于点 E, 则四边形 BCDE 是矩形,



根据题意得： $\angle ACB = \beta = 60^\circ$ ， $\angle ADE = \alpha = 30^\circ$ ， $BC = 18\text{m}$ ，

$\therefore DE = BC = 18\text{m}$ ， $CD = BE$ ，

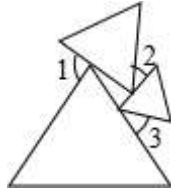
在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $AB = BC \cdot \tan \angle ACB = 18 \times \tan 60^\circ = 18\sqrt{3}(\text{m})$ ，

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中， $AE = DE \cdot \tan \angle ADE = 18 \times \tan 30^\circ = 6\sqrt{3}(\text{m})$ ，

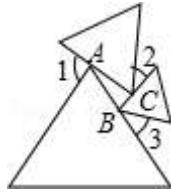
$\therefore DC = BE = AB - AE = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}(\text{m})$ 。

答案： $12\sqrt{3}$ 。

10. (3分) 三个等边三角形的位置如图所示，若  $\angle 3 = 50^\circ$ ，则  $\angle 1 + \angle 2 = \underline{\quad}^\circ$ 。



解析： $\because$  图中是三个等边三角形， $\angle 3 = 50^\circ$ ，



$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$ ， $\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - \angle 2 = 120^\circ - \angle 2$ ，

$\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ - \angle 1 = 120^\circ - \angle 1$ ，

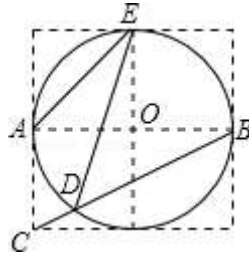
$\because \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$ ，

$\therefore 70^\circ + (120^\circ - \angle 2) + (120^\circ - \angle 1) = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 130^\circ$ 。

答案：130。

11. (3分) 如图，边长为1的小正方形网格中， $\odot O$ 的圆心在格点上，则  $\angle AED$  的余弦值是  $\underline{\quad}$ 。



解析： $\because \angle AED$  与  $\angle ABC$  都对  $\widehat{AD}$ ，

$\therefore \angle AED = \angle ABC$ ，

在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $AB = 2$ ， $AC = 1$ ，

根据勾股定理得： $BC = \sqrt{5}$ ，

则  $\cos \angle AED = \cos \angle ABC = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

答案： $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 。

12. (3分) 已知关于  $x$  的不等式组  $\begin{cases} 4(x-1)+2 > 3x \\ x-1 < \frac{6x+a}{7} \end{cases}$  有且只有三个整数解, 则  $a$  的取值范围\_\_\_\_\_.

解析:  $\begin{cases} 4(x-1)+2 > 3x \cdots \textcircled{1} \\ x-1 < \frac{6x+a}{7} \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ ,

解①得:  $x > 2$ ,

解②得:  $x < a+7$ ,

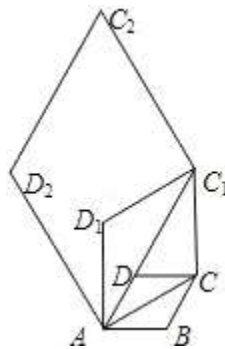
方程组只有三个整数解, 则整数解一定是 3, 4, 5.

根据题意得:  $5 < a+7 \leq 6$ ,

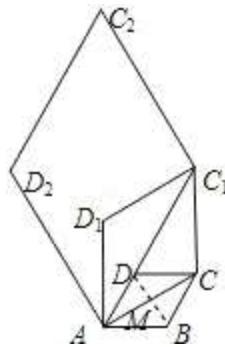
解得:  $-2 < a \leq -1$ .

答案:  $-2 < a \leq -1$ .

13. (3分) 如图, 边长为 1 的菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB=60^\circ$ . 连接对角线  $AC$ , 以  $AC$  为边作第二个菱形  $ACC_1D_1$ , 使  $\angle D_1AC=60^\circ$ ; 连接  $AC_1$ , 再以  $AC_1$  为边作第三个菱形  $AC_1C_2D_2$ , 使  $\angle D_2AC_1=60^\circ$ ;  $\cdots$ , 按此规律所作的第  $n$  个菱形的边长为\_\_\_\_\_.



解析: 连接  $DB$ ,



$\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$\therefore AD=AB, AC \perp DB$ ,

$\because \angle DAB=60^\circ$ ,

$\therefore \triangle ADB$  是等边三角形,

$\therefore DB=AD=1$ ,

$\therefore BM=\frac{1}{2}$ ,

$$\therefore AM = \sqrt{1 - \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore AC = \sqrt{3}$$

同理可得  $AC_1 = \sqrt{3}AC = (\sqrt{3})^2$ ,  $AC_2 = \sqrt{3}AC_1 = 3\sqrt{3} = (\sqrt{3})^3$ ,

按此规律所作的第  $n$  个菱形的边长为  $(\sqrt{3})^{n-1}$

答案:  $(\sqrt{3})^{n-1}$ .

14. (3分) 已知四条直线:  $y=kx-3$ ,  $y=-1$ ,  $y=3$ ,  $x=1$  所围成的四边形面积是 12, 则  $k$  的值是

\_\_\_\_\_.

解析: 在  $y=kx-3$  中, 令  $y=-1$ ,

$$\text{解得 } x = \frac{2}{k};$$

$$\text{令 } y=3, x = \frac{6}{k};$$

当  $k < 0$  时, 四边形的面积是:  $\frac{1}{2}[(1 - \frac{2}{k}) + (1 - \frac{6}{k})] \times 4 = 12$ ,

解得  $k = -2$ ;

当  $k > 0$  时, 可得  $\frac{1}{2}[(\frac{2}{k} - 1) + (\frac{6}{k} - 1)] \times 4 = 12$ ,

解得  $k = 1$ .

即  $k$  的值为  $-2$  或  $1$ .

答案:  $-2$  或  $1$

### 三、解答题(本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

15. (5分) 先化简, 再求值:  $(1 - \frac{1}{a+1}) \div \frac{a^2 - a}{a+1}$ , 其中  $a = \frac{1}{2}$ .

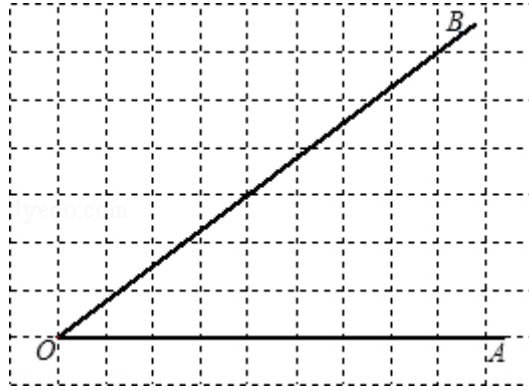
解析: 本题要先把分式化简, 再将  $a$  的值代入求值.

$$\text{答案: 原式} = \frac{a+1-1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a(a-1)} = \frac{1}{a-1};$$

将  $a = \frac{1}{2}$  代入, 得,

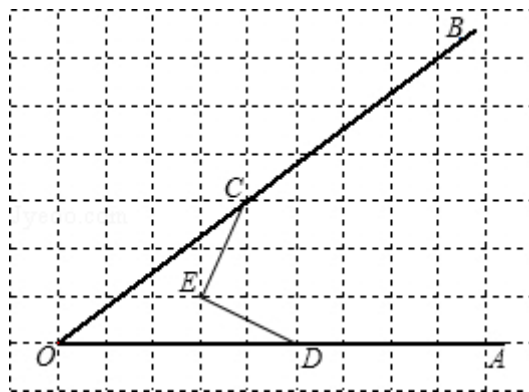
原式  $= -2$ .

16. (5分) 如图, 已知方格纸中的每个小方格都是全等的正方形,  $\angle AOB$  画在方格纸上, 请用利用格点和直尺(无刻度)作出  $\angle AOB$  的平分线.



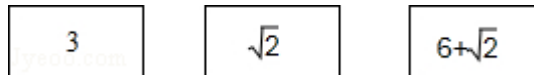
解析：在 OA、OB 上可找到  $OC=OD=5$ ，进而作  $CE=DE=\sqrt{5}$ ，点 E 就是所求的点.

答案：点 E 就是所求的点.



#### 四、(本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分)

17. (6 分) 在一个不透明的盒子中放有三张卡片，每张卡片上写有一个实数，分别为：



(卡片除了实数不同外，其余均相同)

- (1) 从盒子中随机抽取一张卡片，请直接写出卡片上的实数是 3 的概率；
- (2) 先从盒子中随机抽取一张卡片，将卡片上的实数作为被减数；卡片放回，再随机抽取一张卡片，将卡片上的实数作为减数，请你用列表法或树状图法，求出两次好抽取的卡片上的实数之差为有理数的概率.

解析：(1) 由在一个不透明的盒子中放有三张卡片，每张卡片上写有一个实数，分别为：3， $\sqrt{2}$ ， $6+\sqrt{2}$ ，直接利用概率公式求解即可求得答案；

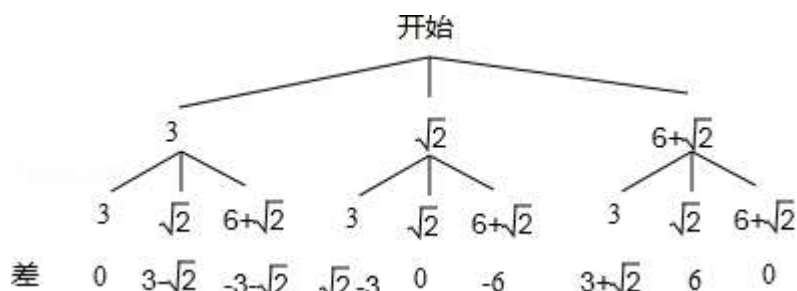
(2) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两次好抽取的卡片上的实数之差为有理数的情况，再利用概率公式即可求得答案.

答案：(1)  $\because$  在一个不透明的盒子中放有三张卡片，每张卡片上写有一个实数，分别为：3， $\sqrt{2}$ ， $6+\sqrt{2}$ ，

$\therefore$  从盒子中随机抽取一张卡片，卡片上的实数是 3 的概率为： $\frac{1}{3}$ ；

(2) 画树状图得：





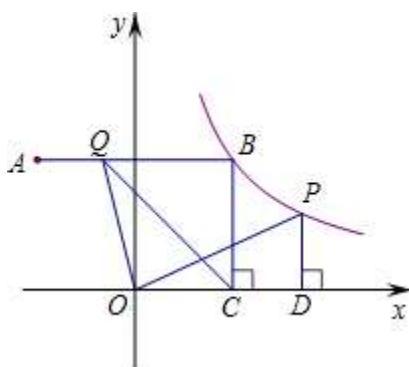
∴共有 9 种等可能的结果，两次好抽取的卡片上的实数之差为有理数的 5 种情况，

$$\therefore P(\text{两次好抽取的卡片上的实数之差为有理数}) = \frac{5}{9}$$

18. (6 分) 在平面直角坐标系中，点 A(-3, 4) 关于 y 轴的对称点为点 B，连接 AB，反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图象经过点 B，过点 B 作  $BC \perp x$  轴于点 C，点 P 是该反比例函数图象上任意一点，过点 P 作  $PD \perp x$  轴于点 D，点 Q 是线段 AB 上任意一点，连接 OQ、CQ。

(1) 求 k 的值；

(2) 判断  $\triangle OQC$  与  $\triangle POD$  的面积是否相等，并说明理由。



解析：(1) 根据点 B 与点 A 关于 y 轴对称，求出 B 点坐标，再代入反比例函数解析式解可求出 k 的值；

(2) 设点 P 的坐标为 (m, n)，点 P 在反比例函数  $y = \frac{12}{x} (x > 0)$  的图象上，求出  $S_{\triangle POD}$ ，根据  $AB \parallel x$

轴， $OC=3$ ， $BC=4$ ，点 Q 在线段 AB 上，求出  $S_{\triangle OQC}$  即可。

答案：(1) ∵点 B 与点 A 关于 y 轴对称， $A(-3, 4)$ ，

∴点 B 的坐标为 (3, 4)，

∴反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图象经过点 B.

$$\therefore \frac{k}{3} = 4,$$

解得  $k=12$ .

(2) 相等. 理由如下：

设点 P 的坐标为 (m, n)，其中  $m > 0$ ， $n > 0$ ，

∴点 P 在反比例函数  $y = \frac{12}{x} (x > 0)$  的图象上，

$$\therefore n = \frac{12}{m}, \text{ 即 } mn=12.$$

$$\therefore S_{\triangle POD} = \frac{1}{2} OD \cdot PD = \frac{1}{2} mn = \frac{1}{2} \times 12 = 6,$$

$$\because A(-3, 4), B(3, 4),$$

$$\therefore AB \parallel x \text{ 轴}, OC=3, BC=4,$$

$\therefore$  点 Q 在线段 AB 上,

$$\therefore S_{\triangle QOC} = \frac{1}{2} OC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

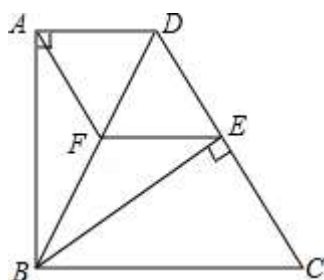
$$\therefore S_{\triangle QOC} = S_{\triangle POD}.$$

### 五、(本大题共 2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分) 如图, 四边形 ABCD 中,  $AD \parallel BC$ ,  $BA \perp AD$ ,  $BC=DC$ ,  $BE \perp CD$  于点 E.

(1) 求证:  $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ ;

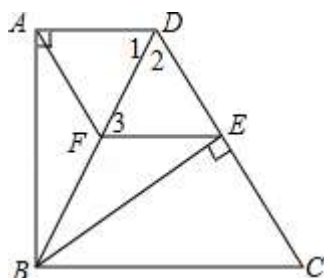
(2) 过点 E 作  $EF \parallel DA$ , 交 BD 于点 F, 连接 AF. 求证: 四边形 AFED 是菱形.



解析: (1) 首先证明  $\angle 1 = \angle 2$ . 再由  $BA \perp AD$ ,  $BE \perp CD$  可得  $\angle BAD = \angle BED = 90^\circ$ , 然后再加上公共边  $BD = BD$  可得  $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ ;

(2) 首先证明四边形 AFED 是平行四边形, 再有  $AD = ED$ , 可得四边形 AFED 是菱形.

答案: (1) 如图,



$\because AD \parallel BC$ ,

$$\therefore \angle 1 = \angle DBC.$$

$\because BC = DC$ ,

$$\therefore \angle 2 = \angle DBC.$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

$\because BA \perp AD$ ,  $BE \perp CD$

$$\therefore \angle BAD = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle EBD \text{ 中 } \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle BAD = \angle BED, \\ BD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD \text{ (AAS)};$$

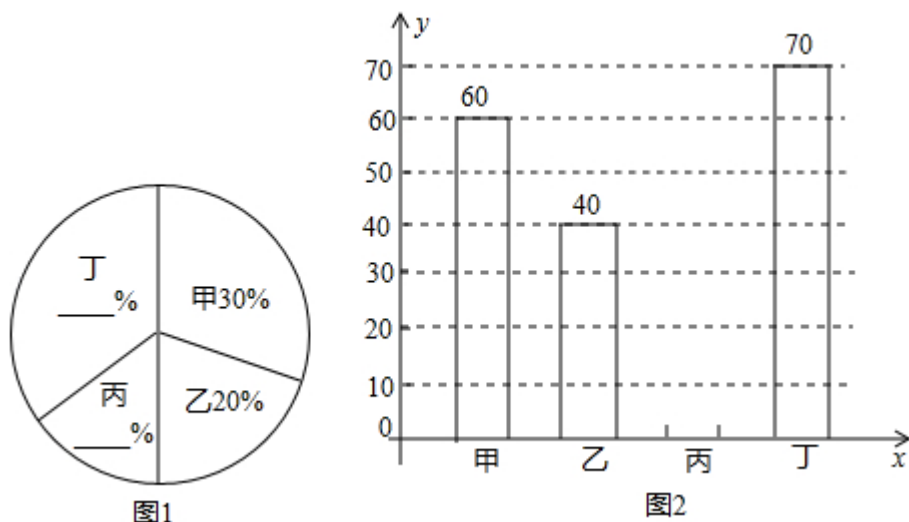
(2) 由 (1) 得,  $AD = ED$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ .

$\because EF \parallel DA$ ,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ .  
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ .  
 $\therefore EF = ED$ .  
 $\therefore EF = AD$ .  
 $\therefore$  四边形 AFED 是平行四边形.  
 又  $\because AD = ED$ ,  
 $\therefore$  四边形 AFED 是菱形.

20. (8分) 某中学开展“绿化家乡、植树造林”活动，为了解全校植树情况，对该校甲、乙、丙、丁四个班级植树情况进行了调查，将收集的数据整理并绘制成图1和图2两幅尚不完整的统计图，请根据图中的信息，完成下列问题：

- (1) 这四个班共植树\_\_\_\_\_棵；
- (2) 请你在答题卡上不全两幅统计图；
- (3) 求图1中“甲”班级所对应的扇形圆心角的度数；
- (4) 若四个班级植树的平均成活率是95%，全校共植树2000棵，请你估计全校种植的树中成活的树有多少棵？



解析：(1) 根据乙班植树 40 棵，所占比为 20%，即可求出这四个班种树总棵数；  
 (2) 根据丁班植树 70 棵，总棵数是 200，即可求出丁所占的百分比，再用整体 1 减去其它所占的百分比，即可得出丙所占的百分比，再乘以总棵数，即可得出丙植树的棵数，从而补全统计图；  
 (3) 根据甲班级所占的百分比，再乘以  $360^\circ$ ，即可得出答案；  
 (4) 用总棵数  $\times$  平均成活率即可得到成活的树的棵数.

答案：(1) 四个班共植树的棵数是：  
 $40 \div 20\% = 200$  (棵)；

(2) 丁所占的百分比是： $\frac{70}{200} \times 100\% = 35\%$ ，

丙所占的百分比是： $1 - 30\% - 20\% - 35\% = 15\%$ ，

则丙植树的棵数是： $200 \times 15\% = 30$  (棵)；

如图：



图1

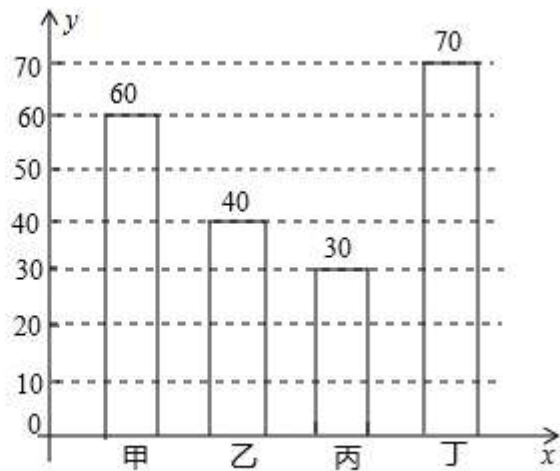


图2

(3) 甲班级所对应的扇形圆心角的度数是:  $30\% \times 360^\circ = 108^\circ$  ;

(4) 根据题意得:  $2000 \times 95\% = 1900$  (棵).

答: 全校种植的树中成活的树有 1900 棵.

故答案为: 200.

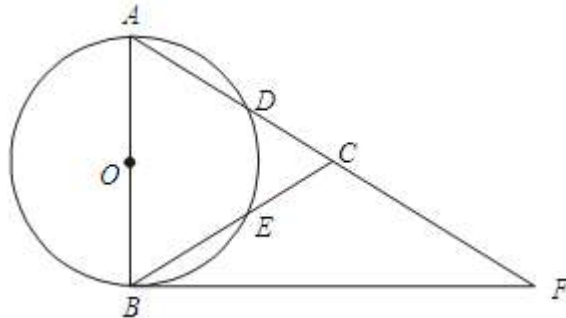
#### 六、(本大题共 2 小题, 每小题 9 分, 共 18 分)

21. (9 分) 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 以  $AB$  为直径的  $\odot O$  分别交  $AC$ 、 $BC$  于点  $D$ 、 $E$ , 点  $F$  在  $AC$  的延长线上, 且  $AC=CF$ ,  $\angle CBF=\angle CFB$ .

(1) 求证: 直线  $BF$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 若点  $D$ , 点  $E$  分别是弧  $AB$  的三等分点, 当  $AD=5$  时, 求  $BF$  的长;

(3) 填空: 在 (2) 的条件下, 如果以点  $C$  为圆心,  $r$  为半径的圆上总存在不同的两点到点  $O$  的距离为 5, 则  $r$  的取值范围为\_\_\_\_\_.



解析: (1) 欲证明直线  $BF$  是  $\odot O$  的切线, 只需证明  $AB \perp BF$ ;

(2) 根据圆心角、弧、弦间的关系, 等边三角形的判定证得  $\triangle AOD$  是等边三角形, 所以在  $Rt\triangle ABF$  中,  $\angle ABF=90^\circ$ ,  $\angle OAD=60^\circ$ ,  $AB=10$ , 则利用  $\angle A$  的正切三角函数的定义来求  $BF$  边的长度;

(3) 根据已知条件知  $\odot O$  与  $\odot C$  相交.

答案: (1) 如图,  $\because \angle CBF=\angle CFB$ ,

$$\therefore CB=CF.$$

又  $\because AC=CF$ ,

$$\therefore CB=\frac{1}{2}AF,$$

$\therefore \triangle ABF$  是直角三角形,

$\therefore \angle ABF=90^\circ$ ，即  $AB \perp BF$ .

又  $\because AB$  是直径，

$\therefore$  直线  $BF$  是  $\odot O$  的切线.

(2) 如图，连接  $DO$ ， $EO$ ，

$\because$  点  $D$ ，点  $E$  分别是弧  $AB$  的三等分点，

$\therefore \angle AOD=60^\circ$  .

又  $\because OA=OD$ ，

$\therefore \triangle AOD$  是等边三角形，

$\therefore OA=AD=OD=5$ ， $\angle OAD=60^\circ$ ，

$\therefore AB=10$ .

$\therefore$  在  $Rt\triangle ABF$  中， $\angle ABF=90^\circ$ ， $BF=AB \cdot \tan 60^\circ = 10\sqrt{3}$ ，即  $BF=10\sqrt{3}$ ;

(3) 如图，连接  $OC$ . 则  $OC$  是  $Rt\triangle ABF$  的中位线，

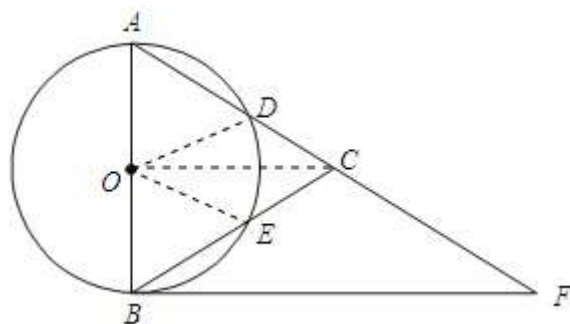
$\because$  由 (2) 知， $BF=10\sqrt{3}$ ，

$\therefore$  圆心距  $OC=5\sqrt{3}$ ，

$\because \odot O$  半径  $OA=5$ .

$\therefore 5\sqrt{3} - 5 < r < 5\sqrt{3} + 5$ .

故填： $5\sqrt{3} - 5 < r < 5\sqrt{3} + 5$ .



22. (9分) 已知，点  $P$  是正方形  $ABCD$  内的一点，连  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ 。

(1) 将  $\triangle PAB$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  到  $\triangle P'CB$  的位置(如图 1)。

① 设  $AB$  的长为  $a$ ， $PB$  的长为  $b$  ( $b < a$ )，求  $\triangle PAB$  旋转到  $\triangle P'CB$  的过程中边  $PA$  所扫过区域(图 1 中阴影部分)的面积；

② 若  $PA=2$ ， $PB=4$ ， $\angle APB=135^\circ$ ，求  $PC$  的长；

(2) 如图 2，若  $PA^2+PC^2=2PB^2$ ，请说明点  $P$  必在对角线  $AC$  上。

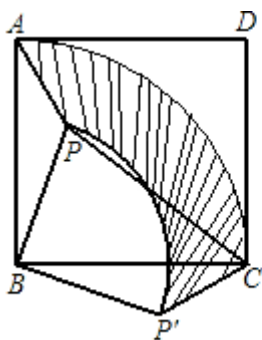


图 1

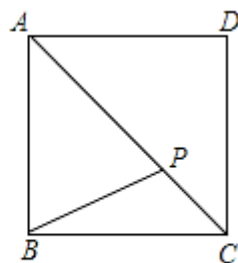


图 2

解析：(1)  $\triangle PAB$  旋转到  $\triangle P'CB$  的过程中边  $PA$  所扫过区域(图 1 中阴影部分)的面积实际是大扇形  $OAC$  与小扇形  $BPP'$  的面积差，且这两个扇形的圆心角同为  $90^\circ$ ；

(2) 连接  $PP'$ ，证  $\triangle PBP'$  为等腰直角三角形，从而可在  $\text{Rt}\triangle PP'C$  中，用勾股定理求得  $PC=6$ ；  
 (3) 将  $\triangle PAB$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  到  $\triangle P'CB$  的位置，由勾股逆定理证出  $\angle P'CP=90^\circ$ ，  
 再证  $\angle BPC + \angle APB = 180^\circ$ ，即点  $P$  在对角线  $AC$  上。

答案：(1) ①  $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}ABC} + S_{\triangle BP'C} - S_{\text{扇形}PBP'} - S_{\triangle ABP}$   
 $= S_{\text{扇形}ABC} - S_{\text{扇形}PBP'}$

$$= \frac{90\pi(a^2 - b^2)}{360},$$

$$= \frac{\pi}{4}(a^2 - b^2);$$

② 连接  $PP'$ ，

根据旋转的性质可知：

$BP = BP'$ ， $\angle PBP' = 90^\circ$ ；

即： $\triangle PBP'$  为等腰直角三角形，

$\therefore \angle BPP' = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BPA = \angle BP'C = 135^\circ$ ， $\angle BP'P = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BPA + \angle BPP' = 180^\circ$ ，

即  $A、P、P'$  共线，

$\therefore \angle PP'C = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$ ；

在  $\text{Rt}\triangle PP'C$  中， $PP' = 4\sqrt{2}$ ， $P'C = PA = 2$ ，根据勾股定理可得  $PC = 6$ 。

(2) 将  $\triangle PAB$  绕点  $B$  顺时针旋转  $90^\circ$  到  $\triangle P'CB$  的位置，连接  $PP'$ 。

同(1)①可知： $\triangle BPP'$  是等腰直角三角形，即  $PP'^2 = 2PB^2$ ；

$\therefore PA^2 + PC^2 = 2PB^2 = PP'^2$ ，

$\therefore PC^2 + P'C^2 = PP'^2$ ，

$\therefore \angle P'CP = 90^\circ$ ；

$\therefore \angle PBP' = \angle PCP' = 90^\circ$ ，在四边形  $BPCP'$  中， $\angle BP'C + \angle BPC = 180^\circ$ ；

$\therefore \angle BPA = \angle BP'C$ ，

$\therefore \angle BPC + \angle APB = 180^\circ$ ，即点  $P$  在对角线  $AC$  上。

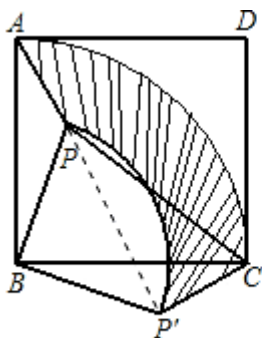


图 1

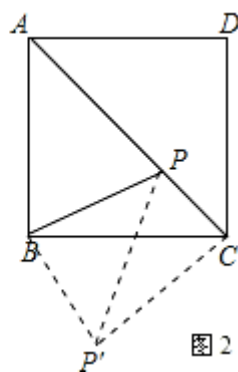


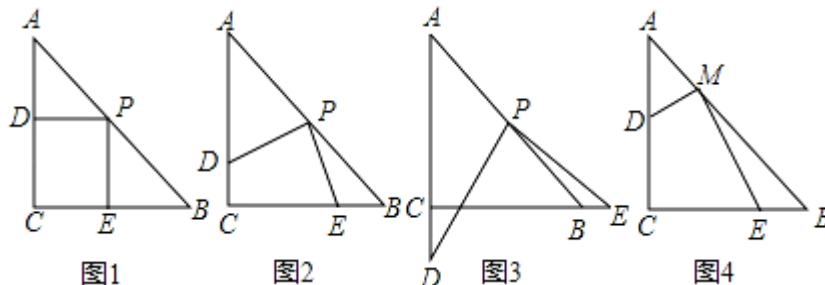
图 2

### 七、(本大题共 2 小题，23 小题 10 分，24 小题 12 分，共 22 分)

23. (10 分) 操作：在  $\triangle ABC$  中， $AC = BC = 2$ ， $\angle C = 90^\circ$ ，将一块等腰直角三角板的直角顶点放在斜边  $AB$  的中点  $P$  处，将三角板绕点  $P$  旋转，三角板的两直角边分别交射线  $AC$ 、 $CB$  于  $D$ 、 $E$  两点. 图 1，2，3 是旋转三角板得到的图形中的 3 种情况.

研究：

- (1) 三角板绕点 P 旋转，观察线段 PD 和 PE 之间有什么数量关系，并结合图 2 加以证明；
- (2) 三角板绕点 P 旋转， $\triangle PBE$  是否能成为等腰三角形？若能，指出所有情况(即写出 $\triangle PBE$  为等腰三角形时 CE 的长)；若不能，请说明理由；
- (3) 若将三角板的直角顶点放在斜边 AB 上的 M 处，且  $AM:MB=1:3$ ，和前面一样操作，试问线段 MD 和 ME 之间有什么数量关系？并结合图 4 加以证明.

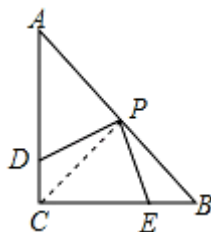


解析：(1) 因为 $\triangle ABC$  是等腰直角三角形，所以连接 PC，容易得到 $\triangle ACP$ 、 $\triangle CPB$  都是等腰直角三角形. 连接 CP，就可以证明 $\triangle CDP \cong \triangle BEP$ ，再根据全等三角形的对应边相等，就可以证明  $DP=PE$ ；

(2)  $\triangle PBE$  能成为等腰三角形，位置有四种；

(3) 作  $MH \perp CB$ ， $MF \perp AC$ ，构造相似三角形 $\triangle MDF$  和 $\triangle MHE$ ，然后利用对应边成比例，就可以求出 MD 和 ME 之间的数量关系.

答案：(1) 连接 PC.



$\because \triangle ABC$  是等腰直角三角形，P 是 AB 的中点，

$\therefore CP=PB$ ， $CP \perp AB$ ， $\angle ACP = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$  .

$\therefore \angle ACP = \angle B = 45^\circ$  .

又  $\because \angle DPC + \angle CPE = \angle BPE + \angle CPE = 90^\circ$  ，

$\therefore \angle DPC = \angle BPE$ .

$\therefore \triangle PCD \cong \triangle PBE$ .

$\therefore PD=PE$ ；

(2) 共有四种情况：

① 当点 C 与点 E 重合，即  $CE=0$  时， $PE=PB$ ；

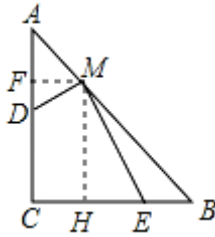
②  $CE=2-\sqrt{2}$ ，此时  $PB=BE$ ；

③ 当  $CE=1$  时，此时  $PE=BE$ ；

④ 当 E 在 CB 的延长线上，且  $CE=2+\sqrt{2}$  时，此时  $PB=EB$ ；

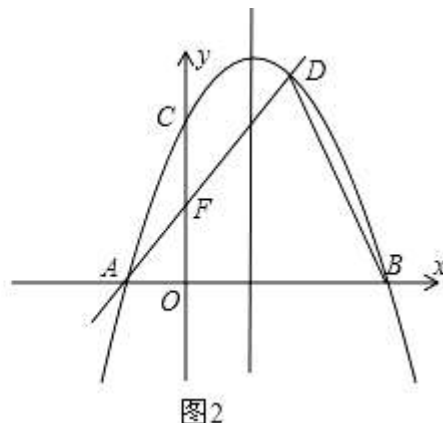
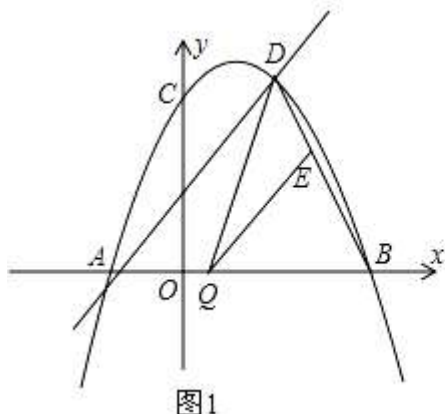
(3)  $MD:ME=1:3$ .

过点 M 作  $MF \perp AC$ ， $MH \perp BC$ ，垂足分别是 F、H.



$\therefore MH \parallel AC, MF \parallel BC.$   
 $\therefore$  四边形 CFMH 是平行四边形.  
 $\because \angle C = 90^\circ,$   
 $\therefore$  矩形 CFMH.  
 $\therefore \angle FMH = 90^\circ, MF = CH.$   
 $\therefore \frac{CH}{HB} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}, HB = MH,$   
 $\therefore \frac{MF}{MH} = \frac{1}{3}.$   
 $\because \angle DMF + \angle DMH = \angle DMH + \angle EMH = 90^\circ,$   
 $\therefore \angle DMF = \angle EMH.$   
 $\because \angle MFD = \angle MHE = 90^\circ,$   
 $\therefore \triangle MDF \sim \triangle MEH.$   
 $\therefore \frac{MD}{ME} = \frac{MF}{MH} = \frac{1}{3}.$

24. (12分) 已知, 如图二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象与  $y$  轴交于点  $C(0, 4)$  与  $x$  轴交于点  $A, B$ , 点  $B(4, 0)$ , 抛物线的对称轴为  $x = 1$ . 直线  $AD$  交抛物线于点  $D(2, m)$ ,
- 求二次函数的解析式并写出  $D$  点坐标;
  - 点  $Q$  是线段  $AB$  上的一动点, 过点  $Q$  作  $QE \parallel AD$  交  $BD$  于  $E$ , 连结  $DQ$ , 当  $\triangle DQE$  的面积最大时, 求点  $Q$  的坐标;
  - 抛物线与  $y$  轴交于点  $C$ , 直线  $AD$  与  $y$  轴交于点  $F$ , 点  $M$  为抛物线对称轴上的动点, 点  $N$  在  $x$  轴上, 当四边形  $CMNF$  周长取最小值时, 求出满足条件的点  $M$  和点  $N$  的坐标.



解析: (1) 根据点  $C(0, 4)$ , 点  $B(4, 0)$ , 抛物线的对称轴为  $x = 1$  可得关于  $a, b, c$  的方程组, 解方程求得  $a, b, c$  的值, 从而得到二次函数的解析式, 再将点  $D(2, m)$  代入二次函数的解析式, 得到关于  $m$  的方程, 求得  $m$  的值, 从而求解;



(2) 先求得 A, B 点的坐标, 过点 E 作  $EG \perp QB$ , 根据相似三角形的判定和性质可得  $EG = \frac{8-2t}{3}$ ,

由于  $S_{\triangle DQE} = S_{\triangle BDQ} - S_{\triangle BEQ}$ , 配方后即可得到  $S_{\triangle DQE}$  有最大值时 Q 点的坐标;

(3) 根据待定系数法得到直线 AD 的解析式为:  $y = x + 2$ , 过点 F 作关于 x 轴的对称点  $F'$ , 即  $F'(0, -2)$ , 再连接  $DF'$  交对称轴于  $M'$ , x 轴于  $N'$ , 由条件可知, 点 C, D 是关于对称轴  $x=1$  对称, 则  $CF + F'N + M'N' + M'C = CF + DF' = 2 + 2\sqrt{10}$ , 得到四边形 CFNM 的最短周长为:  $2 + 2\sqrt{10}$  时直线  $DF'$  的解析式为:  $y = 3x - 2$ , 从而得到满足条件的点 M 和点 N 的坐标.

答案: (1) 由题意有: 
$$\begin{cases} c=4 \\ 16a+4b+c=0 \\ -\frac{b}{2a}=1 \end{cases},$$

解得:  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 4$ .

所以, 二次函数的解析式为:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ ,

$\because$  点 D(2, m) 在抛物线上, 即  $m = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 + 4 = 4$ ,

所以点 D 的坐标为 (2, 4)

(2) 令  $y = 0$ , 即  $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$ , 解得:  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -2$

$\therefore$  A, B 点的坐标分别是 (-2, 0), (4, 0)

过点 E 作  $EG \perp QB$ , 垂足为 G, 设 Q 点坐标为 (t, 0),

$\because QE \parallel AD$ ,

$\therefore \triangle BEQ$  与  $\triangle BDA$  相似

$$\therefore \frac{BQ}{AB} = \frac{EG}{4}, \text{ 即 } \frac{4-t}{6} = \frac{EG}{4}$$

$$\therefore EG = \frac{8-2t}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BEQ} = \frac{1}{2} \times (4-t) \times \frac{8-2t}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DQE} = S_{\triangle BDQ} - S_{\triangle BEQ} = \frac{1}{2} \times (4-t) \times 4 - S_{\triangle BEQ} = 2(4-t) - \frac{1}{3}(4-t)^2 = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{8}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(t-1)^2 + 3,$$

$\therefore$  当  $t=1$  时,  $S_{\triangle DQE}$  有最大值, 所以此时 Q 点的坐标为 (1, 0);

(3) 如图, 由 A(-2, 0), D(2, 4), 可求得直线 AD 的解析式为:  $y = x + 2$ , 即点 F 的坐标为: F(0, 2),

过点 F 作关于 x 轴的对称点  $F'$ , 即  $F'(0, -2)$ , 再连接  $DF'$  交对称轴于  $M'$ , x 轴于  $N'$ , 由条件可知, 点 C, D 是关于对称轴  $x=1$  对称

$$\text{则 } CF + F'N + M'N' + M'C = CF + DF' = 2 + 2\sqrt{10},$$

$$\text{则四边形 CFNM 的周长} = CF + FN + NM + MC \geq CF + FN' + M'N' + M'C$$

$$\text{即四边形 CFNM 的最短周长为: } 2 + 2\sqrt{10}.$$

此时直线  $DF'$  的解析式为:  $y = 3x - 2$ ,

所以存在点  $N$  的坐标为  $N(\frac{2}{3}, 0)$ ，点  $M$  的坐标为  $M(1, 1)$ 。

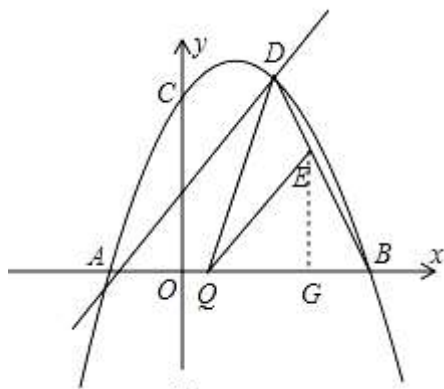


图1

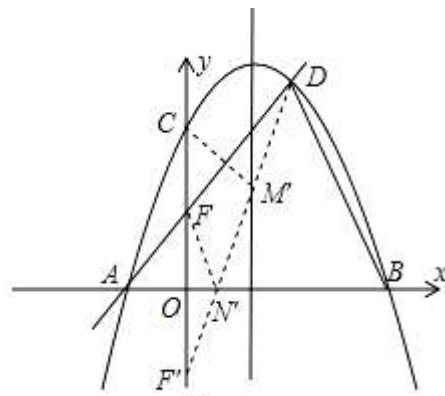


图2