

一、选择题(每小题只有一个选项符合题意要求，每小题 3 分，共 30 分)

1. (3 分)  $\frac{1}{5}$  的倒数是( )

A. 5

B. -5

C.  $\frac{1}{5}$

D.  $-\frac{1}{5}$

解析： $\frac{1}{5}$  的倒数是 5.

故选 A.

2. (3 分) 在第三届中小学生运动会上，我市共有 1330 名学生参赛，创造了比赛组别、人数、项目之最，将 1330 用科学记数法表示为( )

A.  $133 \times 10$

B.  $1.33 \times 10^3$

C.  $133 \times 10^4$

D.  $133 \times 10^5$

解析：1330 用科学记数法表示为  $1.33 \times 10^3$ .

故选 B.

3. (3 分) 下列运算正确的是( )

A.  $5a^2 + 3a^2 = 8a^4$

B.  $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$

C.  $(a+2b)^2 = a^2 + 4b^2$

D.  $-\sqrt[3]{64} = -4$

解析：A、 $5a^2 + 3a^2 = 8a^2$ ，错误；

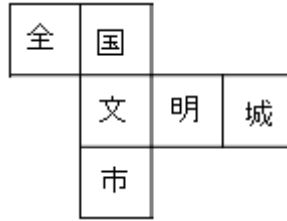
B、 $a^3 \cdot a^4 = a^7$ ，错误；

C、 $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$ ，错误；

D、 $-\sqrt[3]{64} = -4$ ，正确；

故选 D.

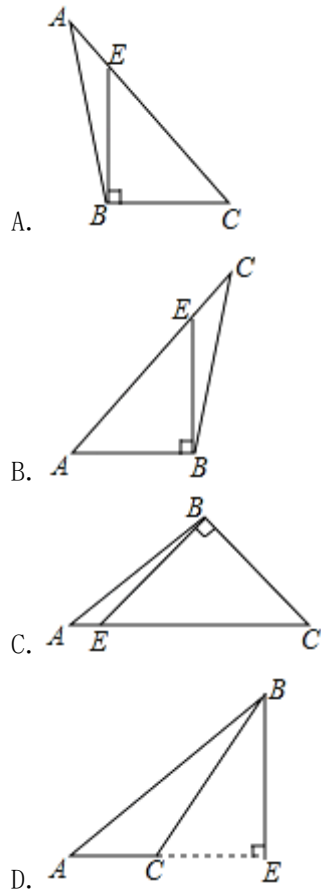
4. (3 分) 在市委、市府的领导下，全市人民齐心协力，将广安成功地创建为“全国文明城市”，为此小红特制了一个正方体玩具，其展开图如图所示，原正方体中与“文”字所在的面上标的字应是( )



- A. 全
- B. 明
- C. 城
- D. 国

解析：由正方体的展开图特点可得：与“文”字所在的面上标的字应是“城”。  
 故选：C.

5. (3分) 下列四个图形中，线段 BE 是  $\triangle ABC$  的高的是( )



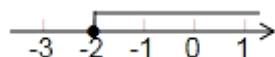
解析：线段 BE 是  $\triangle ABC$  的高的图是选项 D。  
 故选 D.

6. (3分) 下列说法错误的是( )

- A. “伊利”纯牛奶消费者服务热线是 4008169999，该十个数的中位数为 7
- B. 服装店老板最关心的是卖出服装的众数
- C. 要了解全市初三近 4 万名学生 2015 年中考数学成绩情况，适宜采用全面调查
- D. 条形统计图能够显示每组中的具体数据，易于比较数据之间的差别

解析：A、4008169999 的中位数是 7，正确；  
 B、服装店老板最关心的是卖出服装的众数，正确；  
 C、要了解全市初三近 4 万名学生 2015 年中考数学成绩情况，适宜采用抽样调查，错误；  
 D、条形统计图能够显示每组中的具体数据，易于比较数据之间的差别，正确；  
 由于该题选择错误的，故选 C.

7. (3 分) 如图，数轴上表示的是某个函数自变量的取值范围，则这个函数解析式为( )



- A.  $y=x+2$
- B.  $y=x^2+2$
- C.  $y=\sqrt{x+2}$
- D.  $y=\frac{1}{x+2}$

解析：A、 $y=x+2$ ， $x$  为任意实数，故错误；  
 B、 $y=x^2+2$ ， $x$  为任意实数，故错误；  
 C、 $y=\sqrt{x+2}$ ， $x+2 \geq 0$ ，即  $x \geq -2$ ，故正确；

D、 $y=\frac{1}{x+2}$ ， $x+2 \neq 0$ ，即  $x \neq -2$ ，故错误；

故选：C.

8. (3 分) 一个等腰三角形的两条边长分别是方程  $x^2-7x+10=0$  的两根，则该等腰三角形的周长是( )

- A. 12
- B. 9
- C. 13
- D. 12 或 9

解析： $x^2-7x+10=0$ ，  
 $(x-2)(x-5)=0$ ，  
 $x-2=0$ ， $x-5=0$ ，  
 $x_1=2$ ， $x_2=5$ ，

①等腰三角形的三边是 2，2，5

$\because 2+2 < 5$ ，

$\therefore$  不符合三角形三边关系定理，此时不符合题意；

②等腰三角形的三边是 2，5，5，此时符合三角形三边关系定理，三角形的周长是  $2+5+5=12$ ；  
 即等腰三角形的周长是 12.

故选：A.

9. (3 分) 某油箱容量为 60 L 的汽车，加满汽油后行驶了 100 km 时，油箱中的汽油大约消耗了  $\frac{1}{5}$ ，如果加满汽油后汽车行驶的路程为  $x$  km，邮箱中剩油量为  $y$  L，则  $y$  与  $x$  之间的函数解析式和自变量取值范围分别是( )

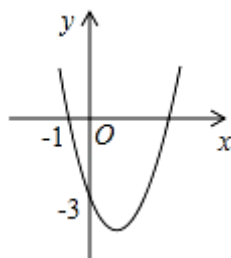
- A.  $y=0.12x, x>0$
- B.  $y=60-0.12x, x>0$
- C.  $y=0.12x, 0\leq x\leq 500$
- D.  $y=60-0.12x, 0\leq x\leq 500$

解析：因为油箱容量为 60 L 的汽车，加满汽油后行驶了 100 km 时，油箱中的汽油大约消耗了  $\frac{1}{5}$ ，

可得： $\frac{1}{5}\times 60\div 100=0.12\text{L/km}$ ， $60\div 0.12=500(\text{km})$ ，

所以  $y$  与  $x$  之间的函数解析式和自变量取值范围是： $y=60-0.12x, (0\leq x\leq 500)$ ，  
故选 D.

10. (3分) 如图，抛物线  $y=ax^2+bx+c (c\neq 0)$  过点  $(-1, 0)$  和点  $(0, -3)$ ，且顶点在第四象限，设  $P=a+b+c$ ，则  $P$  的取值范围是( )



- A.  $-3<P<-1$
- B.  $-6<P<0$
- C.  $-3<P<0$
- D.  $-6<P<-3$

解析： $\because$  抛物线  $y=ax^2+bx+c (c\neq 0)$  过点  $(-1, 0)$  和点  $(0, -3)$ ，

$$\therefore 0=a-b+c, -3=c,$$

$$\therefore b=a-3,$$

$$\therefore \text{当 } x=1 \text{ 时, } y=ax^2+bx+c=a+b+c,$$

$$\therefore P=a+b+c=a+a-3-3=2a-6,$$

$$\therefore \text{顶点在第四象限, } a>0,$$

$$\therefore b=a-3<0,$$

$$\therefore a<3,$$

$$\therefore 0<a<3,$$

$$\therefore -6<2a-6<0,$$

$$\text{即 } -6<P<0.$$

故选：B.

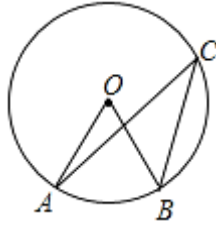
## 二、填空题(每小题 3 分，共 18 分)

11. (3分) 如果点  $M(3, x)$  在第一象限，则  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析：由点  $M(3, x)$  在第一象限，得  $x>0$ .

故答案为： $x>0$ .

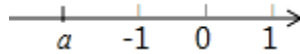
12. (3分) 如图，A、B、C 三点在  $\odot O$  上，且  $\angle AOB=70^\circ$ ，则  $\angle C=$ \_\_\_\_\_度.



解析：∵  $\angle AOB = 70^\circ$ ，  
 $\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 35^\circ$ 。

故答案为：35.

13. (3分) 实数  $a$  在数轴的位置如图所示，则  $|a-1| =$ \_\_\_\_\_.



解析：∵  $a < -1$ ，  
 $\therefore a-1 < 0$ ，  
 原式  $= |a-1|$   
 $= -(a-1)$   
 $= -a+1$   
 $= 1-a$ 。

故答案为：1-a.

14. (3分) 不等式组  $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \\ \frac{1}{2}x-24 \leq 1 \end{cases}$  的所有整数解的积为\_\_\_\_\_.

解析：  $\begin{cases} 3x+4 \geq 0 \text{ ①} \\ \frac{1}{2}x-24 \leq 1 \text{ ②} \end{cases}$ ，

解不等式①得：  $x \geq -\frac{4}{3}$ ，

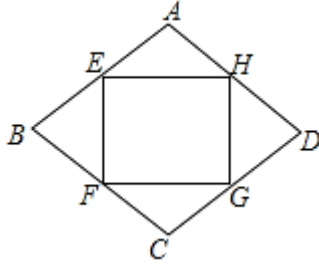
解不等式②得：  $x \leq 50$ ，

∴ 不等式组的整数解为 -1, 0, 1...50，

所以所有整数解的积为 0，

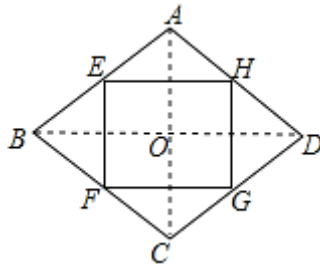
故答案为：0.

15. (3分) 如图，已知 E、F、G、H 分别为菱形 ABCD 四边的中点， $AB=6\text{cm}$ ， $\angle ABC=60^\circ$ ，则四边形 EFGH 的面积为\_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$ 。



解析：连接 AC、BD，首先判定四边形 EFGH 的形状为矩形，然后根据菱形的性质求出 AC 与 BD 的值，进而求出矩形的长和宽，然后根据矩形的面积公式计算其面积即可。

答案：连接 AC，BD，相交于点 O，如图所示，



∵ E、F、G、H 分别是菱形四边上的中点，

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD = FG, \quad EH \parallel BD \parallel FG,$$

$$EF = \frac{1}{2}AC = HG,$$

∴ 四边形 EFGH 是平行四边形，

∵ 菱形 ABCD 中， $AC \perp BD$ ，

∴  $EF \perp EH$ ，

∴ 四边形 EFGH 是矩形，

∵ 四边形 ABCD 是菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

∴  $\angle ABO = 30^\circ$ ，

∵  $AC \perp BD$ ，

∴  $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore AO = \frac{1}{2}AB = 3,$$

∴  $AC = 6$ ，

在  $Rt\triangle AOB$  中，由勾股定理得： $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 3\sqrt{3}$ ，

$$\therefore BD = 6\sqrt{3},$$

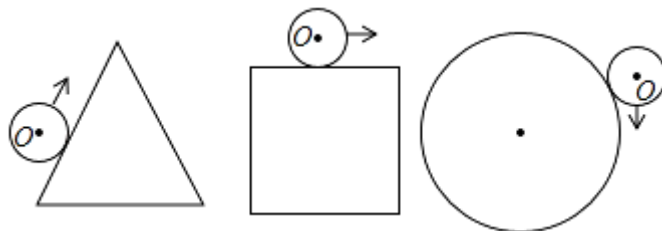
$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD, \quad EF = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore EH = 3\sqrt{3}, \quad EF = 3,$$

$$\therefore \text{矩形 EFGH 的面积} = EF \cdot FG = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

故答案为： $9\sqrt{3}$ 。

16. (3分) 如图, 半径为  $r$  的  $\odot O$  分别绕面积相等的等边三角形、正方形和圆用相同速度匀速滚动一周, 用时分别为  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$ , 则  $t_1$ 、 $t_2$ 、 $t_3$  的大小关系为\_\_\_\_\_.



解析: 根据面积, 可得相应的周长, 根据有理数的大小比较, 可得答案.

答案: 设面积相等的等边三角形、正方形和圆的面积为  $3.14$ ,

等边三角形的边长为  $a \approx 2$ ,

等边三角形的周长为  $6$ ;

正方形的边长为  $b \approx 1.7$ ,

正方形的周长为  $1.7 \times 4 = 6.8$ ;

圆的周长为  $3.14 \times 2 \times 1 = 6.28$ ,

$\therefore 6.8 > 6.28 > 6$ ,

$\therefore t_2 > t_3 > t_1$ .

故答案为:  $t_2 > t_3 > t_1$ .

### 三、解答题(本大题共 4 小题, 17 题 5 分, 18、19、20 题各 6 分, 共 23 分)

17. (5分) 计算:  $-1^4 + (2 - 2\sqrt{2})^0 + |-2015| - 4\cos 60^\circ$ .

解析: 利用有理数的乘方以及特殊角的三角函数值以及零指数幂的性质分别化简求出即可.

答案:  $-1^4 + (2 - 2\sqrt{2})^0 + |-2015| - 4\cos 60^\circ$

$$= -1 + 1 + 2015 - 4 \times \frac{1}{2}$$

$= 2013$ .

18. (6分) 解方程:  $\frac{1-x}{x-2} = \frac{x}{2x-4} - 1$ .

解析: 观察可得方程最简公分母为:  $2x-4$ , 将方程去分母转化为整式方程即可求解.

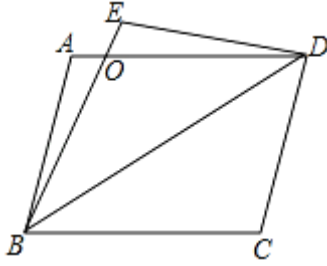
答案: 化为整式方程得:  $2 - 2x = x - 2x + 4$ ,

解得:  $x = -2$ ,

把  $x = -2$  代入原分式方程中, 等式两边相等,

经检验  $x = -2$  是分式方程的解.

19. (6分) 在平行四边形  $ABCD$  中, 将  $\triangle BCD$  沿  $BD$  翻折, 使点  $C$  落在点  $E$  处,  $BE$  和  $AD$  相交于点  $O$ , 求证:  $OA = OE$ .



解析：由在平行四边形 ABCD 中，将  $\triangle BCD$  沿 BD 对折，使点 C 落在 E 处，即可求得  $\angle DBE = \angle ADB$ ，得出  $OB = OD$ ，再由  $\angle A = \angle C$ ，证明三角形全等，利用全等三角形的性质证明即可。

答案：平行四边形 ABCD 中，将  $\triangle BCD$  沿 BD 对折，使点 C 落在 E 处，可得  $\angle DBE = \angle ADB$ ， $\angle A = \angle C$ ，

$\therefore OB = OD$ ，

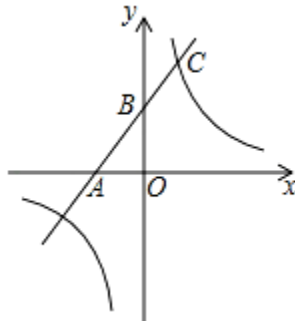
在  $\triangle AOB$  和  $\triangle EOD$  中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle AOB = \angle EOD, \\ OB = OD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle EOD$  (AAS)，

$\therefore OA = OE$ 。

20. (6 分) 如图，一次函数的图象与 x 轴、y 轴分别相交于 A、B 两点，且与反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象在第一象限交于点 C，如果点 B 的坐标为 (0, 2)， $OA = OB$ ，B 是线段 AC 的中点。



(1) 求点 A 的坐标及一次函数解析式。

(2) 求点 C 的坐标及反比例函数的解析式。

解析：(1) 根据  $OA = OB$  和点 B 的坐标易得点 A 坐标，再将 A、B 两点坐标分别代入  $y = kx + b$ ，可用待定系数法确定一次函数的解析式；

(2) 由 B 是线段 AC 的中点，可得 C 点坐标，将 C 点坐标代入  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 可确定反比例函数的解析式。

答案：(1)  $\because OA = OB$ ，点 B 的坐标为 (0, 2)，

$\therefore$  点 A (-2, 0)，

点 A、B 在一次函数  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) 的图象上，

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = 2 \end{cases},$$



解得  $k=1$ ,  $b=2$ ,

$\therefore$  一次函数的解析式为  $y=x+2$ .

(2)  $\because$  B 是线段 AC 的中点,

$\therefore$  点 C 的坐标为 (2, 4),

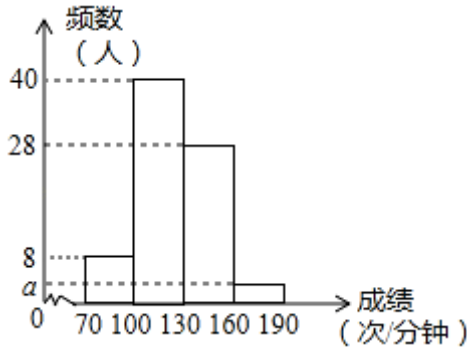
又  $\because$  点 C 在反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象上,

$\therefore k=8$ ;

$\therefore$  反比例函数的解析式为  $y=\frac{8}{x}$ .

#### 四、实践应用(本大题共 4 个小题, 21 题 6 分, 22、23、24 题各 8 分, 共 30 分)

21. (6 分) “阳光体育”运动关乎每个学生未来的幸福生活, 今年五月, 我市某校开展了以“阳光体育我是冠军”为主题的一分钟限时跳绳比赛, 要求每个班选 2-3 名选手参赛, 现将 80 名选手比赛成绩(单位: 次/分钟)进行统计. 绘制成频数分布直方图, 如图所示.



(1) 图中  $a$  值为\_\_\_\_\_.

(2) 将跳绳次数在 160~190 的选手依次记为  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $\dots$ 、 $A_n$ , 从中随机抽取两名选手作经验交流, 请用树状或列表法求恰好抽取到的选手  $A_1$  和  $A_2$  的概率.

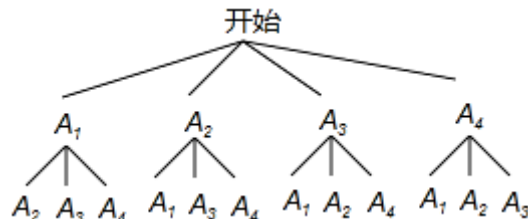
解析: (1) 观察直方图可得:  $a=80-8-40-28=4$ ;

(2) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与恰好抽取到的选手  $A_1$  和  $A_2$  的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

答案: (1) 根据题意得:  $a=80-8-40-28=4$ ,

故答案为: 4;

(2) 画树状图得:



$\therefore$  共有 12 种等可能的结果, 恰好抽取到的选手  $A_1$  和  $A_2$  的有 2 种情况,

$\therefore$  恰好抽取到的选手  $A_1$  和  $A_2$  的概率为:  $\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ .

22. (8 分) 为了贯彻落实市委市政府提出的“精准扶贫”精神. 某校特制定了一系列关于帮扶 A、B 两贫困村的计划. 现决定从某地运送 152 箱鱼苗到 A、B 两村养殖, 若用大小货车共 15 辆,

则恰好能一次性运完这批鱼苗,已知这两种大小货车的载货能力分别为12箱/辆和8箱/辆,其运往A、B两村的运费如下表:

目的地 车型	A村(元/辆)	B村(元/辆)
大货车	800	900
小货车	400	600

(1)求这15辆车中大小货车各多少辆?

(2)现安排其中10辆货车前往A村,其余货车前往B村,设前往A村的大货车为 $x$ 辆,前往A、B两村总费用为 $y$ 元,试求出 $y$ 与 $x$ 的函数解析式.

(3)在(2)的条件下,若运往A村的鱼苗不少于100箱,请你写出使总费用最少的货车调配方案,并求出最少费用.

解析:(1)设大货车用 $x$ 辆,小货车用 $y$ 辆,根据大、小两种货车共15辆,运输152箱鱼苗,列方程组求解:

(2)设前往A村的大货车为 $x$ 辆,则前往B村的大货车为 $(8-x)$ 辆,前往A村的小货车为 $(10-x)$ 辆,前往B村的小货车为 $[7-(10-x)]$ 辆,根据表格所给运费,求出 $y$ 与 $x$ 的函数关系式;

(3)结合已知条件,求 $x$ 的取值范围,由(2)的函数关系式求使总运费最少的货车调配方案.

答案:(1)设大货车用 $x$ 辆,小货车用 $y$ 辆,根据题意得:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ 12x + 8y = 152 \end{cases}$$

解得:  $\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ .

$\therefore$ 大货车用8辆,小货车用7辆.

(2) $y=800x+900(8-x)+400(10-x)+600[7-(10-x)]=100x+9400$ . ( $3 \leq x \leq 8$ ,且 $x$ 为整数).

(3)由题意得:  $12x+8(10-x) \geq 100$ ,

解得:  $x \geq 5$ ,

又 $\because 3 \leq x \leq 8$ ,

$\therefore 5 \leq x \leq 8$ 且为整数,

$\because y=100x+9400$ ,

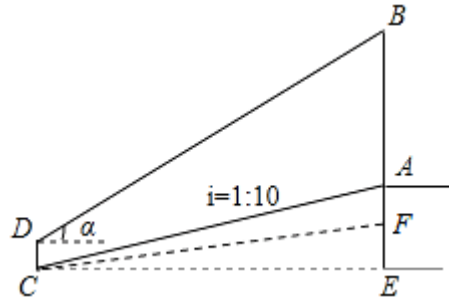
$k=100 > 0$ , $y$ 随 $x$ 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=5$ 时, $y$ 最小,

最小值为 $y=100 \times 5+9400=9900$ (元).

答:使总运费最少的调配方案是:5辆大货车、5辆小货车前往A村;3辆大货车、2辆小货车前往B村.最少运费为9900元.

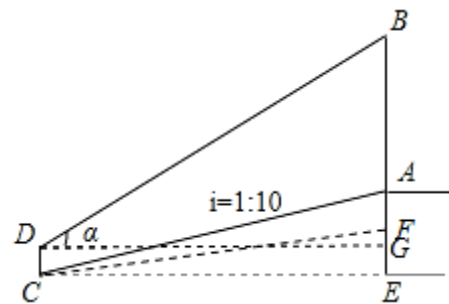
23. (8分)数学活动课上,老师和学生一起去测量学校升旗台上旗杆AB的高度,如图,老师测得升旗台前斜坡FC的坡比为 $i_{FC}=1:10$ (即 $EF:CE=1:10$ ),学生小明站在离升旗台水平距离为35m(即 $CE=35m$ )处的C点,测得旗杆顶端B的仰角为 $\alpha$ ,已知 $\tan \alpha = \frac{3}{7}$ ,升旗台高 $AF=1m$ ,小明身高 $CD=1.6m$ ,请帮小明计算出旗杆AB的高度.



解析：首先根据题意分析图形，本题涉及到两个直角三角形，分别解可得 BG 与 EF 的大小，进而求得 BE、AE 的大小，再利用  $AB=BE-AE$  可求出答案.

答案：作  $DG \perp AE$  于 G，则  $\angle BDG = \alpha$ ，

易知四边形 DCEG 为矩形.



$$\therefore DG=CE=35\text{m}, EG=DC=1.6\text{m}$$

$$\text{在直角三角形 BDG 中, } BG=DG \cdot \tan \alpha = 35 \times \frac{3}{7} = 15\text{m},$$

$$\therefore BE=15+1.6=16.6\text{m}.$$

$$\therefore \text{斜坡 FC 的坡比为 } i_{FC}=1:10, CE=35\text{m},$$

$$\therefore EF=35 \times \frac{1}{10} = 3.5,$$

$$\therefore AF=1,$$

$$\therefore AE=AF+EF=1+3.5=4.5,$$

$$\therefore AB=BE-AE=16.6-4.5=12.1\text{m}.$$

答：旗杆 AB 的高度为 12.1m.

24. (8分) 手工课上，老师要求同学们将边长为 4cm 的正方形纸片恰好剪成六个等腰直角三角形，聪明的你请在下列四个正方形中画出不同的剪裁线，并直接写出每种不同分割后得到的最小等腰直角三角形面积(注：不同的分法，面积可以相等)



第一种



第二种



第三种



第四种

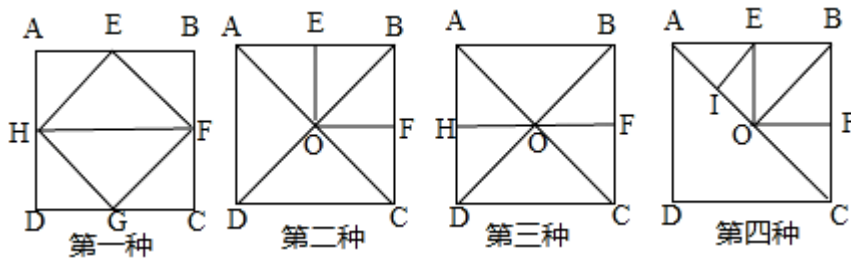
解析：(1) 正方形 ABCD 中，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点，连接 HE、EF、FG、GH、HF，即可把正方形纸片恰好剪成六个等腰直角三角形；然后根据三角形的面积公式，求出分割后得到的最小等腰直角三角形面积即可.

(2) 正方形 ABCD 中, E、F 分别是 AB、BC 的中点, O 是 AC、BD 的交点, 连接 OE、OF, 即可把正方形纸片恰好剪成六个等腰直角三角形; 然后根据三角形的面积公式, 求出分割后得到的最小等腰直角三角形面积即可.

(3) 正方形 ABCD 中, F、H 分别是 BC、DA 的中点, O 是 AC、BD 的交点, 连接 HF, 即可把正方形纸片恰好剪成六个等腰直角三角形; 然后根据三角形的面积公式, 求出分割后得到的最小等腰直角三角形面积即可.

(4) 正方形 ABCD 中, E、F 分别是 AB、BC 的中点, O 是 AC 的中点, I 是 AO 的中点, 连接 OE、OB、OF, 即可把正方形纸片恰好剪成六个等腰直角三角形; 然后根据三角形的面积公式, 求出分割后得到的最小等腰直角三角形面积即可.

答案: 根据分析, 可得



(1) 第一种情况下, 分割后得到的最小等腰直角三角形是  $\triangle AEH$ 、 $\triangle BEF$ 、 $\triangle CFG$ 、 $\triangle DHG$ , 每个最小的等腰直角三角形的面积是:

$$(4 \div 2) \times (4 \div 2) \div 2$$

$$= 2 \times 2 \div 2$$

$$= 2 (\text{cm}^2)$$

(2) 第二种情况下, 分割后得到的最小等腰直角三角形是  $\triangle AEO$ 、 $\triangle BEO$ 、 $\triangle BFO$ 、 $\triangle CFO$ , 每个最小的等腰直角三角形的面积是:

$$(4 \div 2) \times (4 \div 2) \div 2$$

$$= 2 \times 2 \div 2$$

$$= 2 (\text{cm}^2)$$

(3) 第三种情况下, 分割后得到的最小等腰直角三角形是  $\triangle AHO$ 、 $\triangle DHO$ 、 $\triangle BFO$ 、 $\triangle CFO$ , 每个最小的等腰直角三角形的面积是:

$$(4 \div 2) \times (4 \div 2) \div 2$$

$$= 2 \times 2 \div 2$$

$$= 2 (\text{cm}^2)$$

(4) 第四种情况下, 分割后得到的最小等腰直角三角形是  $\triangle AEI$ 、 $\triangle OEI$ , 每个最小的等腰直角三角形的面积是:

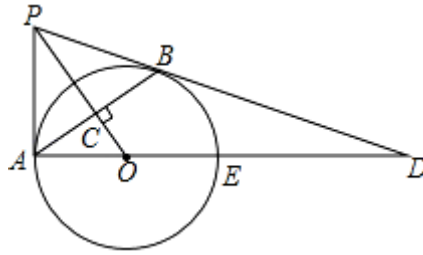
$$(4 \div 2) \times (4 \div 2) \div 2 \div 2$$

$$= 2 \times 2 \div 2 \div 2$$

$$= 1 (\text{cm}^2).$$

## 五、推理与论证(9分)

25. (9分) 如图, PB 为  $\odot O$  的切线, B 为切点, 过 B 作 OP 的垂线 BA, 垂足为 C, 交  $\odot O$  于点 A, 连接 PA、AO, 并延长 AO 交  $\odot O$  于点 E, 与 PB 的延长线交于点 D.



(1) 求证: PA 是  $\odot O$  的切线;

(2) 若  $\frac{OC}{AC} = \frac{2}{3}$ , 且  $OC=4$ , 求 PA 的长和  $\tan D$  的值.

解析: (1) 连接 OB, 先由等腰三角形的三线合一的性质可得: OP 是线段 AB 的垂直平分线, 进而可得:  $PA=PB$ , 然后证明  $\triangle PAO \cong \triangle PBO$ , 进而可得  $\angle PBO = \angle PAO$ , 然后根据切线的性质可得  $\angle PBO = 90^\circ$ , 进而可得:  $\angle PAO = 90^\circ$ , 进而可证: PA 是  $\odot O$  的切线;

(2) 连接 BE, 由  $\frac{OC}{AC} = \frac{2}{3}$ , 且  $OC=4$ , 可求 AC, OA 的值, 然后根据射影定理可求 PC 的值, 从而可求 OP 的值, 然后根据勾股定理可求 AP 的值; 由  $AC=BC$ ,  $AO=OE$ , 可得 OC 是  $\triangle ABE$  的中位线, 进而可得  $BE \parallel OP$ ,  $BE=2OC=8$ , 进而可证  $\triangle DBE \sim \triangle DPO$ , 进而可得:  $\frac{BD}{PD} = \frac{BE}{OP}$ , 从而求出 BD 的值, 进而即可求出  $\tan D$  的值.

答案: (1) 证明: 连接 OB, 则  $OA=OB$ ,

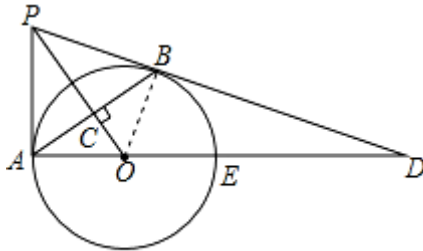


图 1

$\because OP \perp AB$ ,

$\therefore AC=BC$ ,

$\therefore OP$  是 AB 的垂直平分线,

$\therefore PA=PB$ ,

在  $\triangle PAO$  和  $\triangle PBO$  中,

$$\because \begin{cases} PA = PB \\ PO = PO, \\ OA = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$  (SSS)

$\therefore \angle PBO = \angle PAO$ ,  $PB=PA$ ,

$\because PB$  为  $\odot O$  的切线, B 为切点,

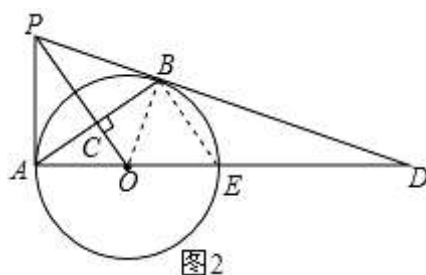
$\therefore \angle PBO = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle PAO = 90^\circ$ ,

即  $PA \perp OA$ ,

$\therefore PA$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 连接 BE,



$$\therefore \frac{OC}{AC} = \frac{2}{3}, \text{ 且 } OC=4,$$

$$\therefore AC=6,$$

$$\therefore AB=12,$$

在  $\text{Rt}\triangle ACO$  中,

$$\text{由勾股定理得: } AO = \sqrt{AC^2 + OC^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore AE=2OA=4\sqrt{13}, \quad OB=OA=2\sqrt{13},$$

在  $\text{Rt}\triangle APO$  中,

$$\therefore AC \perp OP,$$

$$\therefore AC^2 = OC \cdot PC,$$

解得:  $PC=9$ ,

$$\therefore OP=PC+OC=13,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle APO \text{ 中, 由勾股定理得: } AP = \sqrt{OP^2 + OA^2} = 3\sqrt{13},$$

$$\therefore PB=PA=3\sqrt{13},$$

$$\therefore AC=BC, \quad OA=OE,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2} BE, \quad OC \parallel BE,$$

$$\therefore BE=2OC=8, \quad BE \parallel OP,$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle DPO,$$

$$\therefore \frac{BD}{PD} = \frac{BE}{OP},$$

$$\text{即 } \frac{BD}{3\sqrt{13} + BD} = \frac{8}{13},$$

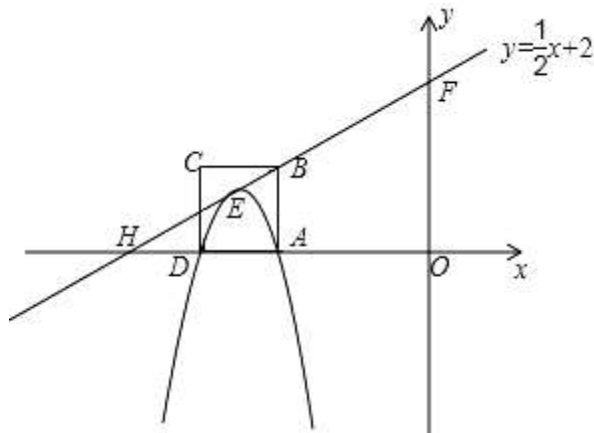
$$\text{解得: } BD = \frac{24\sqrt{13}}{5},$$

在  $\text{Rt}\triangle OBD$  中,

$$\tan D = \frac{OB}{BD} = \frac{2\sqrt{13}}{\frac{24\sqrt{13}}{5}} = \frac{5}{12}.$$

## 六、拓展探究(10分)

26. (10分) 如图, 边长为1的正方形ABCD一边AD在x负半轴上, 直线 $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ 经过点 $B(x, 1)$ 与x轴, y轴分别交于点H, F, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 顶点E在直线l上.



- (1) 求A, D两点的坐标及抛物线经过A, D两点时的解析式;
- (2) 当抛物线的顶点E(m, n)在直线l上运动时, 连接EA, ED, 试求 $\triangle EAD$ 的面积S与m之间的函数解析式, 并写出m的取值范围;
- (3) 设抛物线与y轴交于G点, 当抛物线顶点E在直线l上运动时, 以A, C, E, G为顶点的四边形能否成为平行四边形? 若能, 求出E点坐标; 若不能, 请说明理由.

解析: (1) 通过直线l的解析式求得B的坐标, 进而根据正方形的边长即可求得A, D的坐标, 然后利用待定系数法即可求得抛物线经过A, D两点时的解析式;

(2) 根据一次函数图象上点的坐标特征求得E的纵坐标为 $\frac{1}{2}m + 2$ , 然后根据三角形的面积公式即可求得S与m之间的函数解析式;

(3) 根据平行四边形的性质得出 $AC = EQ$ ,  $AC \parallel EQ$ , 易证得 $\triangle EHQ \cong \triangle CDA$ , 从而得出E的横坐标为-1, 然后代入直线l的解析式即可求得E的坐标.

答案: (1)  $\because$  直线 $l: y = \frac{1}{2}x + 2$ 经过点 $B(x, 1)$ ,

$$\therefore 1 = \frac{1}{2}x + 2, \text{ 解得 } x = -2,$$

$$\therefore B(-2, 1),$$

$$\therefore A(-2, 0), D(-3, 0),$$

$\because$  抛物线经过A, D两点,

$$\therefore \begin{cases} -4 - 2b + c = 0 \\ -9 - 3b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = -5 \\ c = -6 \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线经过A, D两点时的解析式为 $y = -x^2 - 5x - 6$ ;

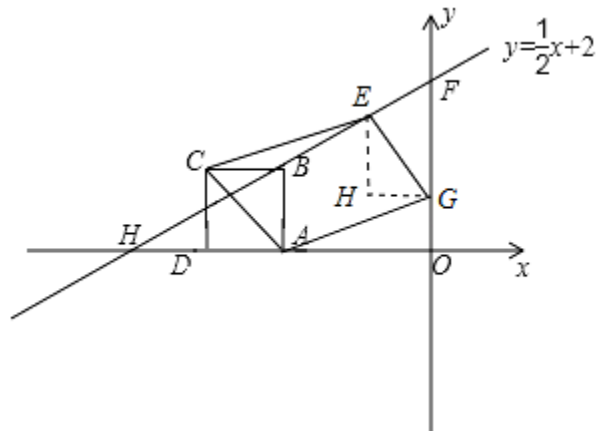
(2)  $\because$  顶点E(m, n)在直线l上,

$$\therefore n = \frac{1}{2}m + 2,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{2}m + 2\right) = \frac{1}{2}m + 1,$$

即  $S = \frac{1}{4}m + 1$  ( $m \neq 4$ );

(3) 如图, 若以 A, C, E, G 为顶点的四边形能成为平行四边形, 则  $AC = EG$ ,  $AC \parallel EG$ , 作  $EH \parallel y$  轴交过 G 点平行于 x 轴的直线相交于 H, 则  $EH \perp GH$ ,  $\triangle EHG \cong \triangle CDA$ ,



$\therefore GH = AD = 1$ ,

$\therefore E$  的横坐标为  $\pm 1$ ,

$\therefore$  顶点  $E$  在直线  $l$  上,

$\therefore y = \frac{1}{2} \times (-1) + 2 = \frac{3}{2}$ , 或  $y = \frac{1}{2} \times 1 + 2 = \frac{5}{2}$

$\therefore E(-1, \frac{3}{2})$  或  $(1, \frac{5}{2})$ .