

2018 年山东省菏泽市单县中考三模试卷数学

一、选择题(本大题共 8 个小题,每小题 3 分,共 24 分,在每小题给出的四个选项 A、B、C、D 中,只有一个选项是正确的,请把正确的选项填在答题卡相应位置。

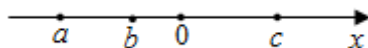
1. 下面的计算正确的是()

- A. $6a-5a=1$
- B. $a+2a^2=3a^3$
- C. $-(a-b)=-a+b$
- D. $2(a+b)=2a+b$

解析: A、 $6a-5a=a$, 故此选项错误;
 B、 a 与 $2a^2$ 不是同类项, 不能合并, 故此选项错误;
 C、 $-(a-b)=-a+b$, 故此选项正确;
 D、 $2(a+b)=2a+2b$, 故此选项错误.

答案: C

2. 实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示, 则下列式子中正确的是()



- A. $a-c > b-c$
- B. $a+c < b+c$
- C. $ac > bc$
- D. $ab < cb$

解析: 由数轴可以看出 $a < b < 0 < c$.
 A、 $\because a < b, \therefore a-c < b-c$, 故选项错误;
 B、 $\because a < b, \therefore a+c < b+c$, 故选项正确;
 C、 $\because a < b, c > 0, \therefore ac < bc$, 故选项错误;
 D、 $\because a < c, b < 0, \therefore \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$, 故选项错误.

答案: B

3. 在围棋盒中有 x 颗白色棋子和 y 颗黑色棋子, 从盒中随机取出一颗棋子, 取得白色棋子的概率是 $\frac{2}{5}$, 如再往盒中放进 3 颗黑色棋子, 取得白色棋子的概率变为 $\frac{1}{4}$, 则原来盒里有白色棋子()

- A. 1 颗
- B. 2 颗
- C. 3 颗
- D. 4 颗

解析: 由题意得
$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} = \frac{2}{5}, \\ \frac{x}{x+y+3} = \frac{1}{4}, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

答案：B

4. 一组数据：10、5、15、5、20，则这组数据的平均数和中位数分别是()

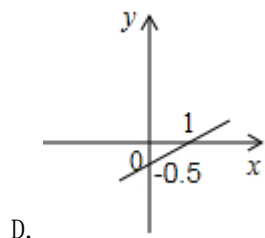
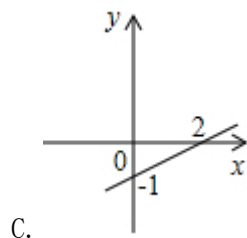
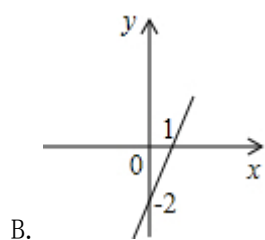
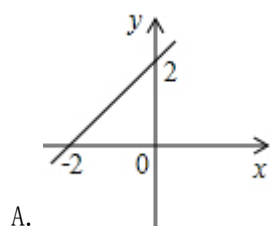
- A. 10, 10
- B. 10, 12.5
- C. 11, 12.5
- D. 11, 10

解析：这组数据按从小到大的顺序排列为：5，5，10，15，20，

故平均数为： $\frac{5+5+10+15+20}{5} = 11$ ，中位数为：10.

答案：D

5. 下面四条直线，其中直线上每个点的坐标都是二元一次方程 $x-2y=2$ 的解是()

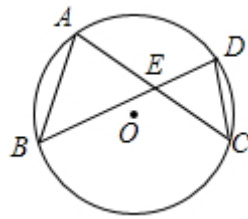


解析： $\because x-2y=2, \therefore y=\frac{1}{2}x-1, \therefore$ 当 $x=0, y=-1$ ，当 $y=0, x=2, \therefore$ 一次函数 $y=\frac{1}{2}x-1$ ，与 y 轴交于点 $(0, -1)$ ，与 x 轴交于点 $(2, 0)$ ，即可得出 C 符合要求.

答案：C

6. 如图，已知 $\odot O$ 的两条弦 AC, BD 相交于点 E, $\angle A=70^\circ, \angle C=50^\circ$ ，那么 $\sin \angle AEB$ 的值

为()

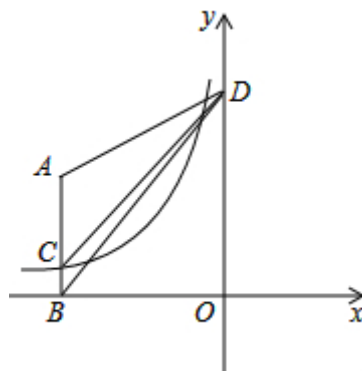


- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析: $\because \angle A=70^\circ, \angle C=50^\circ, \therefore \angle B=\angle C=50^\circ, \angle AEB=60^\circ, \therefore \sin \angle AEB=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

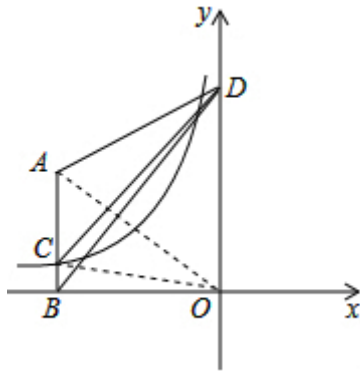
答案: D

7. 如图, 点D为y轴上任意一点, 过点A(-6,4)作AB垂直于x轴交x轴于点B, 交双曲线 $y = \frac{-6}{x}$ 于点C, 则 $\triangle ADC$ 的面积为()



- A. 9
- B. 10
- C. 12
- D. 15

解析: 连接 OA、OC.

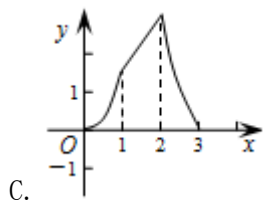
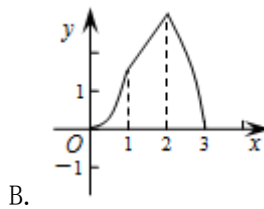
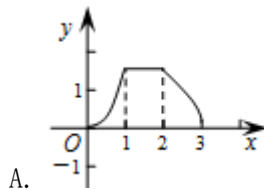
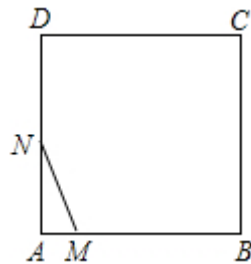


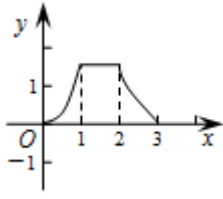
$\because AB \perp x$ 轴, $\therefore AB \parallel OD$, $\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle AOC}$, $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$,

又 \because 双曲线的解析式是 $y = \frac{-6}{x}$, $\therefore S_{\triangle BCO} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle AOC} = S_{\triangle ABO} - S_{\triangle BCO} = 12 - 3 = 9$.

答案: A

8. 如图, 在正方形 ABCD 中, $AB = 3\text{cm}$, 动点 M 自 A 点出发沿 AB 方向以每秒 1cm 的速度向 B 点运动, 同时动点 N 自 A 点出发沿折线 AD-DC-CB 以每秒 3cm 的速度运动, 到达 B 点时运动同时停止. 设 $\triangle AMN$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 运动时间为 x (秒), 则下列图象中能大致反映 y 与 x 之间的函数关系的是()





D.

解析：当点 N 在 AD 上时，即 $0 \leq x \leq 1$ ， $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times x \times 3x = \frac{3}{2}x^2$ ，

点 N 在 CD 上时，即 $1 \leq x \leq 2$ ， $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times x \times 3 = \frac{3}{2}x$ ，y 随 x 的增大而增大，所以排除 A、D；

当 N 在 BC 上时，即 $2 \leq x \leq 3$ ， $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \times x \times (9 - 3x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ ，开口方向向下。

答案：B

二、填空题(本大题共有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分，只要求把结果填写在答题卡的相应区域内).

9. $|a-1| + \sqrt{3+b} = 0$ ，则 $a-b = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：由题意得， $a-1=0$ ， $3+b=0$ ，解得 $a=1$ ， $b=-3$ ，所以 $a-b=1-(-3)=1+3=4$.

答案：4

10. 命题“相等的角是对顶角”是 命题(填“真”或“假”).

解析：对顶角相等，但相等的角不一定是对顶角，从而可得命题“相等的角是对顶角”是假命题.

答案：假

11. 某班组织 20 名同学去春游，同时租用两种型号的车辆，一种车每辆有 8 个座位，另一种车每辆有 4 个座位. 要求租用的车辆不留空座，也不能超载. 有 种租车方案.

解析：设租用每辆 8 个座位的车 x 辆，每辆有 4 个座位的车 y 辆，

根据题意得， $8x+4y=20$ ，

整理得， $2x+y=5$ ，

$\because x, y$ 都是正整数，

$\therefore x=1$ 时， $y=3$ ，

$x=2$ 时， $y=1$ ，

$x=3$ 时， $y=-1$ (不符合题意，舍去)，所以，共有 2 种租车方案.

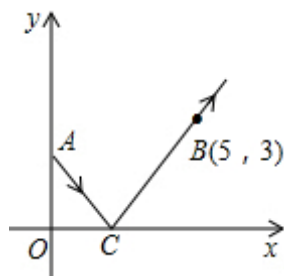
答案：2

12. 若圆锥的母线长为 5cm，底面半径为 3cm，则它的侧面展开图的面积为 cm^2 (结果保留 π)

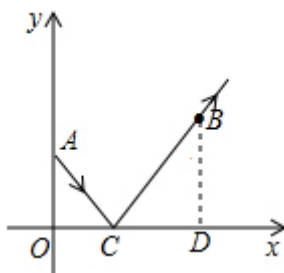
解析：圆锥的侧面展开图的面积 $= \frac{1}{2} \times 2\pi \times 3 \times 5 = 15\pi (\text{cm}^2)$.

答案： 15π

13. 如图，从点 A(0, 2) 发出的一束光，经 x 轴反射，过点 B(5, 3)，则这束光从点 A 到点 B 所经过的路径的长为_____.



解析：如图，过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D，



$\because A(0, 2), B(5, 3), \therefore OA=2, BD=3, OD=5,$

根据题意得： $\angle ACO = \angle BCD,$

$\because \angle AOC = \angle BDC = 90^\circ, \therefore \triangle AOC \sim \triangle BDC,$

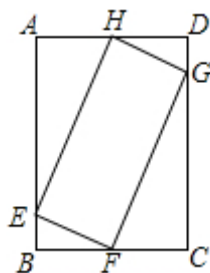
$\therefore OA : BD = OC : DC = AC : BC = 2 : 3,$

$\therefore OC = 5 \times \frac{2}{5} = 2, \therefore CD = OD - OC = 3,$

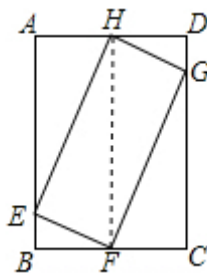
$\therefore AC = \sqrt{OA^2 + OC^2} = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = 3\sqrt{2}, \therefore AC + BC = 5\sqrt{2}.$

答案： $5\sqrt{2}$

14. 如图，四边形 ABCD 为矩形，H、F 分别为 AD、BC 边的中点，四边形 EFGH 为矩形，E、G 分别在 AB、CD 边上，则图中四个直角三角形面积之和与矩形 EFGH 的面积之比为_____.



解析：连接 HF，



∵ 四边形 ABCD 为矩形，∴ AD=BC，AD//BC，∠D=90°

∵ H、F 分别为 AD、BC 边的中点，∴ DH=CF，DH//CF，

∵ ∠D=90°，∴ 四边形 HFCD 是矩形，∴ $\triangle HFG$ 的面积是 $\frac{1}{2} CD \times DH = \frac{1}{2} S_{\text{矩形 HFCD}}$ ，

即 $S_{\triangle HFG} = S_{\triangle DHG} + S_{\triangle CFG}$ ，同理 $S_{\triangle HEF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle AEH}$ ，∴ 图中四个直角三角形面积之和与矩形 EFGH 的面积之比是 1:1.

答案：1:1

三、解答题(本大题共 10 个小题，本题共 78 分，把解答和证明过程写在答题卡的相应区域内)

15. 解方程组
$$\begin{cases} x + 3y = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$$

解析：利用加减消元法求解可得.

答案：
$$\begin{cases} x + 3y = -1 \text{①}, \\ 3x - 2y = 8 \text{②}. \end{cases}$$

①×3，得：3x+9y=-3③，

③-②，得：11y=-11，解得：y=-1，

将 y=-1 代入①，得：x-3=-1，解得：x=2，

则方程组的解为
$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$

16. 解不等式组
$$\begin{cases} 2x + 3 > 1, \\ 2 - x \geq 0, \end{cases}$$
 并把解集在数轴上表示出来.

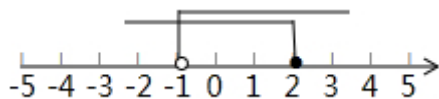
解析：首先分别计算出两个不等式的解集，再根据“大小小大中间找”可找出不等式组的解集.

答案：
$$\begin{cases} 2x + 3 > 1 \text{①}, \\ 2 - x \geq 0 \text{②}, \end{cases}$$
 由①得：x>-1，

由②得：x≤2，

不等式组的解集为：-1<x≤2，

在数轴上表示如下.



17. 一项工程，甲、乙两公司合作，12天可以完成，共需付施工费102000元；如果甲、乙两公司单独完成此项工程，乙公司所用时间是甲公司的1.5倍，乙公司每天的施工费比甲公司每天的施工费少1500元.

(1) 甲、乙两公司单独完成此项工程，各需多少天？

(2) 若让一个公司单独完成这项工程，哪个公司的施工费较少？

解析：(1) 设甲公司单独完成此项工程需 x 天，则乙工程公司单独完成需 $1.5x$ 天，根据合作12天完成列出方程求解即可.

(2) 分别求得两个公司施工所需费用后比较即可得到结论.

答案：(1) 设甲公司单独完成此项工程需 x 天，则乙公司单独完成此项工程需 $1.5x$ 天.

根据题意，得 $\frac{1}{x} + \frac{1}{1.5x} = \frac{1}{12}$ ，解得 $x=20$ ，

经检验知 $x=20$ 是方程的解且符合题意.

$1.5x=30$.

故甲公司单独完成此项工程，需20天，乙公司单独完成此项工程，需30天；

(2) 设甲公司每天的施工费为 y 元，则乙公司每天的施工费为 $(y-1500)$ 元，

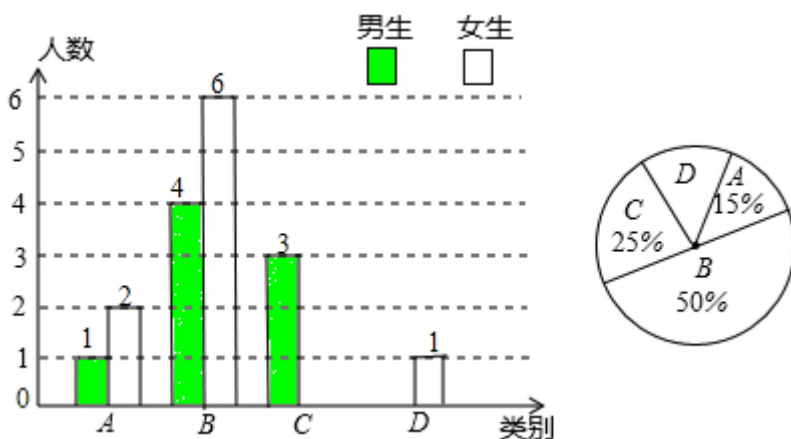
根据题意得 $12(y+y-1500)=102000$ ，解得 $y=5000$ ，

甲公司单独完成此项工程所需的施工费： $20 \times 5000=100000$ (元)；

乙公司单独完成此项工程所需的施工费： $30 \times (5000-1500)=105000$ (元)；

故甲公司的施工费较少.

18. 自实施新教育改革后，学生的自主学习、合作交流能力有很大提高，张老师为了了解所教班级学生自主学习、合作交流的具体情况，对本班部分同学进行了为期半个月的跟踪调查，并将调查结果分为四类：A. 特别好；B. 好；C. 一般；D. 较差，并将调查结果绘制成以下两幅不完整的统计图，请你根据统计图解答下列问题：



(1) 本次调查中，张老师一共调查了多少名同学？

(2) 求出调查中C类女生及D类男生的人数，将条形统计图补充完整；

(3) 为了共同进步，张老师想从被调查的A类和D类学生中分别选取一位同学进行“一帮一”互助学习，请用列表法或画树形图的方法求出所选两位同学恰好是一位男同学和一位女同学的概率.

解析：(1)根据 A 类的人数是 3，所占的百分比是 15%，据此即可求得总人数；

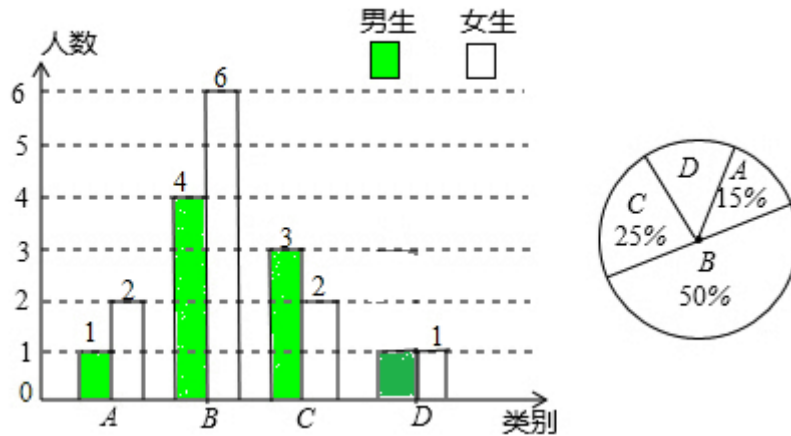
(2)根据百分比的意义求得 C、D 两类的人数，进而求得 C 类女生及 D 类男生的人数；

(3)利用列举法表示出所有可能的结果，然后利用概率公式即可求解。

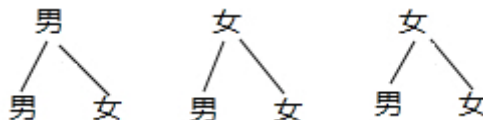
答案：(1)调查的总人数是： $(1+2) \div 15\% = 20$ (人)；

(2)C 类学生的人数是： $20 \times 25\% = 5$ (人)，则 C 类女生人数是： $5 - 3 = 2$ (人)；

D 类的人数是： $20 \times (1 - 50\% - 25\% - 15\%) = 2$ (人)，则 D 类男生的人数是： $2 - 1 = 1$ (人)；如图所示：

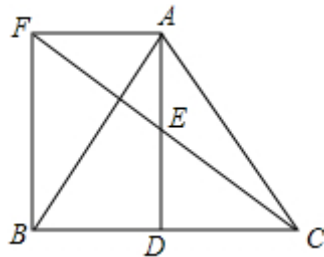


(3) 如图所示：



则恰好是一位男同学和一位女同学的概率是： $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

19. 如图所示， $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 BC 的平行线交 CE 的延长线于 F，且 $AF = BD$ ，连接 BF。



(1) 求证：D 是 BC 的中点；

(2) 若 $AB = AC$ ，试判断四边形 AFBD 的形状，并证明你的结论。

解析：(1)根据两直线平行，内错角相等求出 $\angle AFE = \angle DCE$ ，然后利用“角角边”证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEC$ 全等，再根据全等三角形的性质和等量关系即可求解；

(2)由(1)知 AF 平行等于 BD，易证四边形 AFBD 是平行四边形，而 $AB = AC$ ，AD 是中线，利用等腰三角形三线合一定理，可证 $AD \perp BC$ ，即 $\angle ADB = 90^\circ$ ，那么可证四边形 AFBD 是矩形。

答案：(1) $\because AF \parallel BC, \therefore \angle AFE = \angle DCE$,

\because 点 E 为 AD 的中点， $\therefore AE = DE$,

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} \angle AFE = \angle DCE, \\ \angle AEF = \angle DEC, \therefore \triangle AEF \cong \triangle DEC \text{ (AAS)}, \\ AE = DE, \end{cases}$$

$\therefore AF=CD$, $\because AF=BD$, $\therefore CD=BD$, $\therefore D$ 是 BC 的中点;

(2) 若 $AB=AC$, 则四边形 $AFBD$ 是矩形. 理由如下:

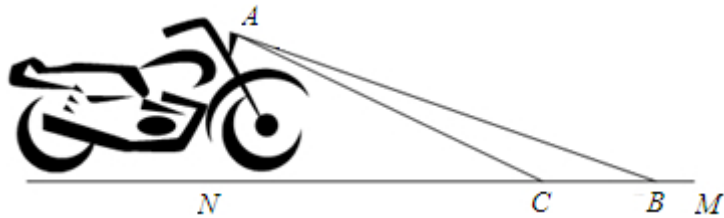
$\because \triangle AEF \cong \triangle DEC$, $\therefore AF=CD$,

$\because AF=BD$, $\therefore CD=BD$;

$\because AF \parallel BD$, $AF=BD$, \therefore 四边形 $AFBD$ 是平行四边形,

$\because AB=AC$, $BD=CD$, $\therefore \angle ADB=90^\circ$, \therefore 平行四边形 $AFBD$ 是矩形.

20. 如图是某厂家新开发的一款摩托车, 它的大灯射出的光线 AB 、 AC 与地面 MN 的夹角分别为 8° 和 10° , 该大灯照亮地面的宽度 BC 的长为 1.4 米, 求该大灯距地面的高度. (参考数据: $\sin 8^\circ \approx \frac{4}{25}$, $\tan 8^\circ \approx \frac{1}{7}$, $\sin 10^\circ \approx \frac{9}{50}$, $\tan 10^\circ \approx \frac{5}{28}$)

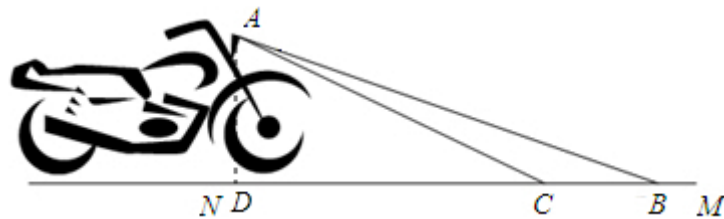


解析: 过点 A 作 $AD \perp MN$ 于点 D , 在 $Rt\triangle ADB$ 与 $Rt\triangle ACD$ 中, 由锐角三角函数的定义可知,

$$\frac{AD}{(CD + BC)} = \tan \angle ABD, \frac{AD}{(CD + 1.4)} = \frac{1}{7} \text{ ①}, \frac{AD}{CD} = \tan \angle ACD, \frac{AD}{CD} = \frac{5}{28} \text{ ②}, \text{ 联立两方程}$$

即可求出 AD 的长.

答案: 过点 A 作 $AD \perp MN$ 于点 D ,



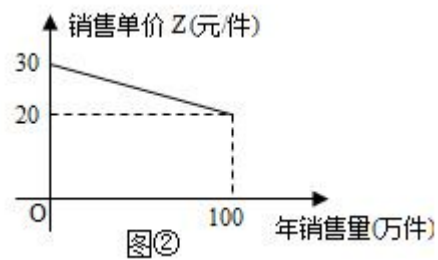
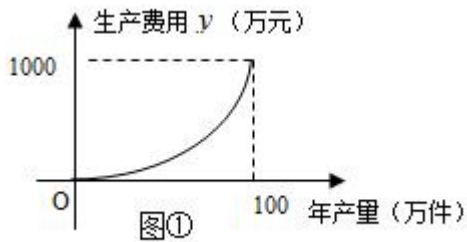
在 $Rt\triangle ADB$ 与 $Rt\triangle ACD$ 中, 由锐角三角函数的定义可知,

$$\frac{AD}{(CD + BC)} = \tan \angle ABD, \frac{AD}{(CD + 1.4)} = \frac{1}{7} \text{ ①}, \frac{AD}{CD} = \tan \angle ACD, \frac{AD}{CD} = \frac{5}{28} \text{ ②},$$

$$\text{联立两方程得} \begin{cases} \frac{AD}{CD} + 1.4 = \frac{1}{7}, \\ \frac{AD}{CD} = \frac{5}{28}, \end{cases} \text{ 解得 } AD=1.$$

答: 该大灯距地面的高度 1 米.

21. 某低碳节能产品的年产量不超过 100 万件, 该产品的生产费用 y (万元) 与年产量 x (万件) 之间的函数图象是顶点在原点的抛物线的一部分(如图①所示); 该产品的销售单价 z (元/件) 与年销售量 x (万件) 之间的函数图象是如图②所示的一条线段, 生产出的产品都能在当年销售完, 达到产销平衡.



(1) 求 y 与 x 以及 z 与 x 之间的函数关系式;

(2) 设年产量为 x 万件时, 所获毛利润为 w 万元, 求 w 与 x 之间的函数关系式; 并求年产量多少万件时, 所获毛利润最大? 最大毛利润是多少? (毛利润=销售额-生产费用).

解析: (1) 利用待定系数法可求出 y 与 x 以及 z 与 x 之间的函数关系式;

(2) 根据 (1) 的表达式及毛利润=销售额-生产费用, 可得出 w 与 x 之间的函数关系式, 再利用配方法求函数最值即可.

答案: (1) 图①可得函数经过点 $(100, 1000)$,

设抛物线的解析式为 $y=ax^2$ ($a \neq 0$),

将点 $(100, 1000)$ 代入得: $1000=10000a$, 解得: $a=\frac{1}{10}$,

故 y 与 x 之间的关系式为 $y=\frac{1}{10}x^2$.

图②可得: 函数经过点 $(0, 30)$ 、 $(100, 20)$,

$$\text{设 } z=kx+b, \text{ 则 } \begin{cases} 100k+b=20, \\ b=30, \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} k=-\frac{1}{10}, \\ b=30, \end{cases}$$

故 z 与 x 之间的关系式为 $z=-\frac{1}{10}x+30$;

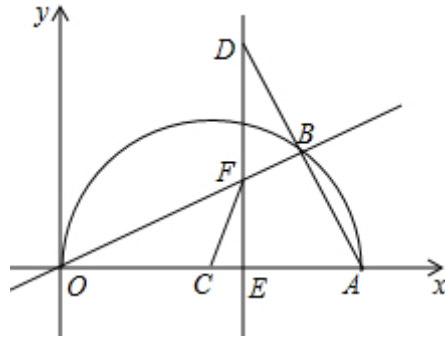
(2) 年产量为 x 万件时, 生产费用为 $\frac{1}{10}x^2$, 销售额为: $zx=\left(-\frac{1}{10}x+30\right)x=-\frac{1}{10}x^2+30x$,

则 $w=-\frac{1}{10}x^2+30x-\frac{1}{10}x^2=-\frac{1}{5}x^2+30x=-\frac{1}{5}(x^2-150x)=-\frac{1}{5}(x-75)^2+1125$,

当 $x=75$ 时, 获得毛利润最大, 最大毛利润为 1125 万元.

答: 当年产量为 75 万件时, 获得毛利润最大, 最大毛利润为 1125 万元.

22. 平面直角坐标系中, 已知点 A 的坐标为 $(10, 0)$, 已知点 C 为 AB 的中点, 以 C 为圆心作圆, 点 B 是该半圆周上的一动点, 连结 OB、AB, 并延长 AB 至点 D, 使 $DB=AB$, 过点 D 作 x 轴垂线, 分别交 x 轴、直线 OB 于点 E、F, 点 E 为垂足, 连结 CF.

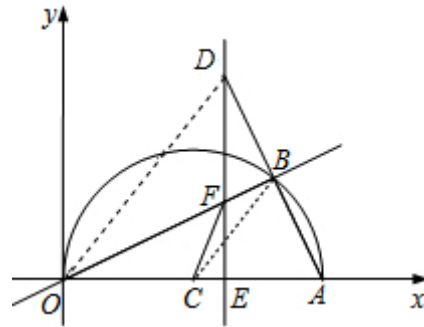


- (1) 当 $\angle AOB=30^\circ$ 时, 求弧 AB 的长;
 (2) 当 $DE=8$ 时, 求线段 EF 的长.

解析: (1) 连接 BC, 由已知得 $\angle ACB=2\angle AOB=60^\circ$, $AC=\frac{1}{2}AO=5$, 根据弧长公式求解;

(2) 连接 OD, 由垂直平分线的性质得 $OD=OA=10$, 又 $DE=8$, 在 $Rt\triangle ODE$ 中, 由勾股定理求 OE, 依题意证明 $\triangle OEF \sim \triangle DEA$, 利用相似比求 EF 即可.

答案: (1) 连接 BC,



$\because A(10, 0)$, $\therefore OA=10$, $CA=5$,

$\because \angle AOB=30^\circ$, $\therefore \angle ACB=2\angle AOB=60^\circ$, \therefore 弧 AB 的长 $=\frac{60\pi \times 5}{180} = \frac{5\pi}{3}$;

(2) ①若 D 在第一象限, 连接 OD,

$\because OA$ 是 $\odot C$ 直径, $\therefore \angle OBA=90^\circ$,

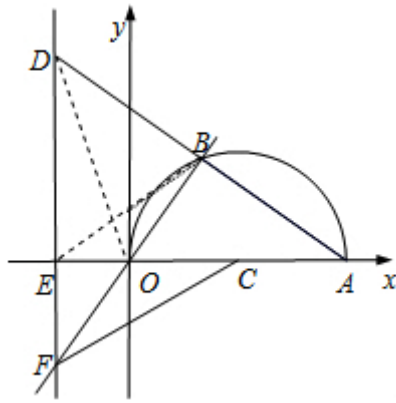
又 $\because AB=BD$, $\therefore OB$ 是 AD 的垂直平分线, $\therefore OD=OA=10$,

在 $Rt\triangle ODE$ 中, $OE=\sqrt{OD^2 - DE^2}=6$, $\therefore AE=AO-OE=10-6=4$,

由 $\angle AOB=\angle ADE=90^\circ - \angle OAB$, $\angle OEF=\angle DEA$,

得 $\triangle OEF \sim \triangle DEA$, $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{EF}{OE}$, 即 $\frac{4}{8} = \frac{EF}{6}$, $\therefore EF=3$;

②若 D 在第二象限, 连接 OD,



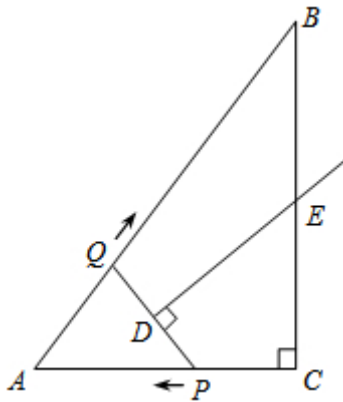
$\because OA$ 是 $\odot C$ 直径, $\therefore \angle OBA=90^\circ$,
 又 $\because AB=BD$, $\therefore OB$ 是 AD 的垂直平分线,

$\therefore OD=OA=10$, 在 $Rt\triangle ODE$ 中, $OE=\sqrt{OD^2-DE^2}=6$, $\therefore AE=AO+OE=10+6=16$,

由 $\angle AOB=\angle ADE=90^\circ-\angle OAB$, $\angle OEF=\angle DEA$,

得 $\triangle OEF \sim \triangle DEA$, $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{EF}{OE}$, 即 $\frac{16}{8} = \frac{EF}{6}$, $\therefore EF=12$; $\therefore EF=3$ 或 12 .

23. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$, $AB=5$. 点 P 从点 C 出发沿 CA 以每秒 1 个单位长的速度向点 A 匀速运动; 点 Q 从点 A 出发沿 AB 以每秒 1 个单位长的速度向点 B 匀速运动. 伴随着 P 、 Q 的运动, DE 保持垂直平分 PQ , 且交 PQ 于点 D , 交 BC 于点 E . 点 P 、 Q 同时出发, 当点 P 到达点 A 时停止运动, 点 Q 也随之停止. 设点 P 、 Q 运动的时间是 t 秒 ($t>0$).



(1) 当 t 为何值时, $DE \parallel AB$?

(2) 求四边形 $BQPC$ 的面积 s 与 t 的函数关系式;

(3) 是否存在某一时刻 t , 使四边形 $BQPC$ 的面积与 $Rt\triangle ABC$ 的面积比为 $13:15$? 若存在, 求 t 的值. 若不存在, 请说明理由;

(4) 若 DE 经过点 C , 试求 t 的值.

解析: (1) 根据 $DE \parallel AB$, 得到 $\triangle AQP \sim \triangle ACB$, 根据相似三角形的对应边成比例, 求出 t ;

(2) 根据四边形 $BQPC$ 的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 - $\triangle AQP$ 的面积, 列出关于 x 、 y 的函数关系式;

(3) 根据 (2) 中的函数关系式和面积比, 求出 t ;

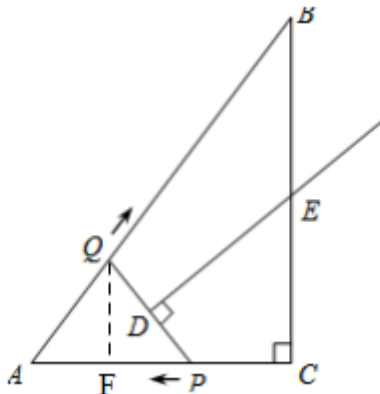
(4) DE 经过点 C , 作 $QH \perp BC$ 于 H , 得到 $DH \parallel AC$, 用 t 表示出 QH 、 EH , 根据垂直平分线的性质和勾股定理列出关系式求出 t .

答案: (1) 当 $DE \parallel AB$ 时, $\angle AQP=90^\circ$,

则 $\triangle AQP \sim \triangle ACB$, $\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{t}{3} = \frac{3-t}{5}$, $t = \frac{9}{8}$;

(2) $\angle C = 90^\circ$, $AC = 3$, $AB = 5$, 根据勾股定理得, $BC = 4$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$, 作 $QF \perp BC$ 于 F ,



则 $QF \parallel BC$, $\frac{AQ}{AB} = \frac{QF}{BC}$, 即 $\frac{t}{5} = \frac{QF}{4}$,

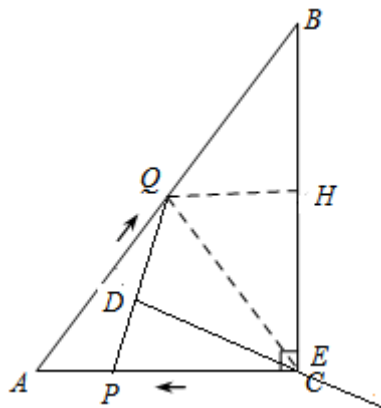
$QF = \frac{4}{5}t$, $S_{\triangle AQP} = \frac{1}{2} \times (3-t) \times \frac{4}{5}t = -\frac{2}{5}t^2 + \frac{6}{5}t$, $S = 6 - \left(-\frac{2}{5}t^2 + \frac{6}{5}t\right) = \frac{2}{5}t^2 - \frac{6}{5}t + 6$.

(3) $\left(\frac{2}{5}t^2 - 6t + 6\right) : 6 = 13 : 15$,

整理得, $t^2 - 3t + 2 = 0$, 解得: $t_1 = 1$, $t_2 = 3$ (舍去);

当 $t = 1$ 时, 四边形 $BQPC$ 的面积与 $Rt\triangle ABC$ 的面积比为 $13 : 15$;

(4) 如图, DE 经过点 C , 作 $QH \perp BC$ 于 H ,



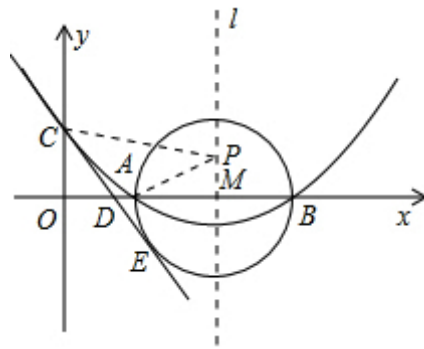
$\because DH \parallel AC$, $\therefore BQBA = QHAC = BHBC$, $QH = 5 - t$,

$\frac{BQ}{BA} = \frac{QH}{AC} = \frac{BH}{BC}$, $\frac{QH}{3} = \frac{5-t}{5}$, $QH = \frac{15-3t}{5}$, $\frac{BH}{4} = \frac{5-t}{5}$, $BH = \frac{20-4t}{5}$, $HC = \frac{4}{5}t$,

$\because DE$ 垂直平分 PQ , $\therefore PC = CQ$, $\left(\frac{15-3t}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}t\right)^2 = t^2$, $90t = 225$, $t = \frac{5}{2}$.

24. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标为 $(4, -\frac{2}{3})$, 且与 y 轴交于点 $C(0, 2)$,

与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左边).



- (1) 求抛物线的解析式及 A、B 两点的坐标;
- (2) 在(1)中抛物线的对称轴 l 上是否存在一点 P, 使 AP+CP 的值最小? 若存在, 求 AP+CP 的最小值, 若不存在, 请说明理由;
- (3) 以 AB 为直径的 $\odot M$ 相切于点 E, CE 交 x 轴于点 D, 求直线 CE 的解析式.

解析: (1) 利用顶点式求得二次函数的解析式后令其等于 0 后求得 x 的值即为与 x 轴交点坐标的横坐标;

(2) 线段 BC 的长即为 AP+CP 的最小值;

(3) 连接 ME, 根据 CE 是 $\odot M$ 的切线得到 $ME \perp CE$, $\angle CEM = 90^\circ$, 从而证得 $\triangle COD \cong \triangle MED$, 设 $OD = x$, 在 $RT\triangle COD$ 中, 利用勾股定理求得 x 的值即可求得点 D 的坐标, 然后利用待定系数法确定线段 CE 的解析式即可.

答案: (1) 由题意, 设抛物线的解析式为 $y = a(x-4)^2 - \frac{2}{3}$ ($a \neq 0$),

\because 抛物线经过 $(0, 2)$, $\therefore a(0-4)^2 - \frac{2}{3} = 2$, 解得: $a = \frac{1}{6}$, $\therefore y = \frac{1}{6}(x-4)^2 - \frac{2}{3}$,

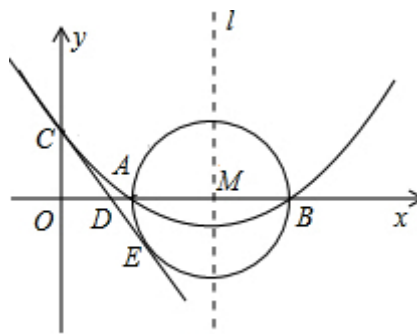


图1

即: $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$,

当 $y=0$ 时, $\frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{3}x + 2 = 0$, 解得: $x=2$ 或 $x=6$, $\therefore A(2, 0)$, $B(6, 0)$;

(2) 存在,

如图 2, 由(1)知: 抛物线的对称轴 l 为 $x=4$,

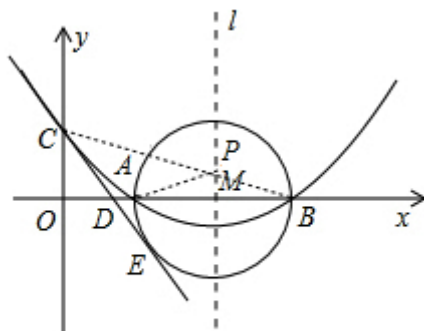


图2

因为 A、B 两点关于 l 对称，连接 CB 交 l 于点 P ，则 $AP=BP$ ，所以 $AP+CP=BC$ 的值最小，

$\because B(6, 0), C(0, 2), \therefore OB=6, OC=2, \therefore BC=2\sqrt{10}, \therefore AP+CP=BC=2\sqrt{10}, \therefore AP+CP$ 的最小

值为 $2\sqrt{10}$ ；

(3) 如图 3，连接 ME ，

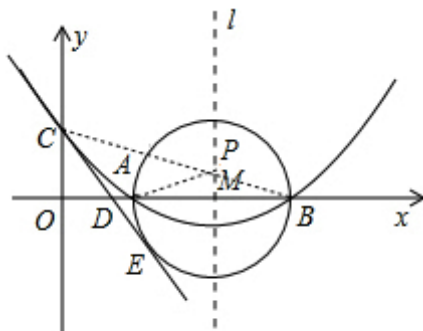


图2

$\because CE$ 是 $\odot M$ 的切线， $\therefore ME \perp CE, \angle CEM=90^\circ$ ，

$\because C$ 的坐标 $(0, 2), \therefore OC=2$ ，

$\because AB=4, \therefore ME=2, \therefore OC=ME=2$ ，

$\because \angle ODC = \angle MDE$ ，

\therefore 在 $\triangle COD$ 与 $\triangle MED$ 中，
$$\begin{cases} \angle COD = \angle MED, \\ \angle ODC = \angle EDM, \\ OC = ME, \end{cases} \therefore \triangle COD \cong \triangle MED (AAS), \therefore OD=DE, DC=DM,$$

设 $OD=x$ ，则 $CD=DM=OM-OD=4-x$ ，

则 $Rt\triangle COD$ 中， $OD^2+OC^2=CD^2, \therefore x^2+2^2=(4-x)^2, \therefore x=\frac{3}{2}, \therefore D(\frac{3}{2}, 0)$ ，

设直线 CE 的解析式为 $y=kx+b(k \neq 0)$ ，

\because 直线 CE 过 $C(0, 2), D(\frac{3}{2}, 0)$ 两点，则
$$\begin{cases} \frac{3}{2}k + b = 0, \\ b = 2, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{4}{3}, \\ b = 2, \end{cases}$$

\therefore 直线 CE 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+2$ 。