

2018 年江苏省南京市中考真题数学

一、选择题(本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分，在每小题所给出的四个选中，恰有一项是符合题目要求的)

1. $\sqrt{\frac{9}{4}}$ 的值等于()

A. $\frac{3}{2}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\pm\frac{3}{2}$

D. $\frac{81}{16}$

解析：根据算术平方根解答即可.

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

答案：A

2. 计算 $a^3 \cdot (a^3)^2$ 的结果是()

A. a^8

B. a^9

C. a^{11}

D. a^{18}

解析：根据幂的乘方，即可解答.

$$a^3 \cdot (a^3)^2 = a^9.$$

答案：B

3. 下列无理数中，与 4 最接近的是()

A. $\sqrt{11}$

B. $\sqrt{13}$

C. $\sqrt{17}$

D. $\sqrt{19}$

解析：直接利用估算无理数的大小方法得出最接近 4 的无理数.

$$\because \sqrt{16} = 4,$$

∴与4最接近的是： $\sqrt{17}$.

答案：C

4. 某排球队6名场上队员的身高(单位：cm)是：180, 184, 188, 190, 192, 194. 现用一名身高为186cm的队员换下场上身高为192cm的队员，与换人前相比，场上队员的身高()

- A. 平均数变小，方差变小
- B. 平均数变小，方差变大
- C. 平均数变大，方差变小
- D. 平均数变大，方差变大

解析：分别计算出原数据和新数据的平均数和方差即可得.

原数据的平均数为 $\frac{1}{6} \times (180+184+188+190+192+194)=188$,

则原数据的方差为 $\frac{1}{6} \times$

$$[(180-188)^2+(184-188)^2+(188-188)^2+(190-188)^2+(192-188)^2+(194-188)^2]=\frac{68}{3};$$

新数据的平均数为 $\frac{1}{6} \times (180+184+188+190+186+194)=187$,

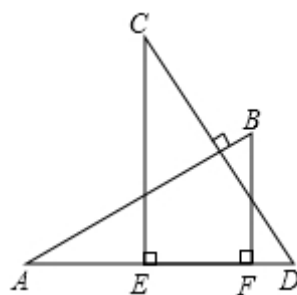
则新数据的方差为 $\frac{1}{6} \times$

$$[(180-187)^2+(184-187)^2+(188-187)^2+(190-187)^2+(186-187)^2+(194-187)^2]=\frac{62}{3}.$$

所以平均数变小，方差变小.

答案：A

5. 如图， $AB \perp CD$ ，且 $AB=CD$. E、F是AD上两点， $CE \perp AD$ ， $BF \perp AD$. 若 $CE=a$ ， $BF=b$ ， $EF=c$ ，则AD的长为()



- A. $a+c$
- B. $b+c$
- C. $a-b+c$
- D. $a+b-c$

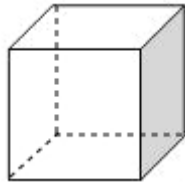
解析：∵ $AB \perp CD$ ， $CE \perp AD$ ， $BF \perp AD$ ，
∴ $\angle AFB = \angle CED = 90^\circ$ ， $\angle A + \angle D = 90^\circ$ ， $\angle C + \angle D = 90^\circ$ ，
∴ $\angle A = \angle C$ ，
在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CDE$ 中

$$\begin{cases} \angle AFB = \angle CED \\ \angle A = \angle C \\ AB = CD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ (AAS),
 $\therefore AF = CE = a, BF = DE = b,$
 $\because EF = c,$
 $\therefore AD = AF + DF = a + (b - c) = a + b - c.$

答案: D

6. 用一个平面去截正方体(如图), 下列关于截面(截出的面)的形状的结论:



- ①可能是锐角三角形;
- ②可能是直角三角形;
- ③可能是钝角三角形;
- ④可能是平行四边形.

其中所有正确结论的序号是()

- A. ①②
- B. ①④
- C. ①②④
- D. ①②③④

解析: 用平面去截正方体, 得的截面可能为三角形、四边形、五边形、六边形, 而三角形只能是锐角三角形, 不能是直角三角形和钝角三角形.

答案: B

二、填空题(本大题共 10 小题, 每小题 2 分, 共 20 分, 不需写出解答过程)

7. 写出一个数, 使这个数的绝对值等于它的相反数: _____.

解析: 一个数的绝对值等于它的相反数, 那么这个数 0 或负数.

答案: -1 (答案不唯一)

8. 习近平同志在党的十九大报告中强调, 生态文明建设功在当代, 利在千秋. 55 年来, 经过三代人的努力, 河北塞罕坝林场有林地面积达到 1120000 亩. 用科学记数法表示 1120000 是_____.

解析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

$1120000 = 1.12 \times 10^6$.

答案: 1.12×10^6

9. 若式子 $\sqrt{x-2}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

解析: 根据被开方数是非负数, 可得答案.

由题意, 得 $x-2 \geq 0$, 解得 $x \geq 2$.

答案: $x \geq 2$

10. 计算 $\sqrt{3} \times \sqrt{6} - \sqrt{8}$ 的结果是_____.

解析: 先利用二次根式的乘法运算, 然后化简后合并即可.

$$\text{原式} = \sqrt{3 \times 6} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

答案: $\sqrt{2}$

11. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-3, -1)$, 则 $k =$ _____.

解析: \because 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-3, -1)$,

$$\therefore -1 = \frac{k}{-3},$$

解得 $k=3$.

答案: 3

12. 设 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 - mx - 6 = 0$ 的两个根, 且 $x_1 + x_2 = 1$, 则 $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____.

解析: 根据根与系数的关系结合 $x_1 + x_2 = 1$ 可得出 m 的值, 将其代入原方程, 再利用因式分解法解一元二次方程, 即可得出结论.

$\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 - mx - 6 = 0$ 的两个根,

$$\therefore x_1 + x_2 = m,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 1,$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore \text{原方程为 } x^2 - x - 6 = 0, \text{ 即 } (x+2)(x-3) = 0,$$

解得: $x_1 = -2, x_2 = 3$.

答案: $-2; 3$

13. 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标是 $(-1, 2)$, 作点 A 关于 y 轴的对称点, 得到点 A' , 再将点 A' 向下平移 4 个单位, 得到点 A'' , 则点 A'' 的坐标是(_____, _____).

解析: 直接利用关于 y 轴对称点的性质得出点 A' 坐标, 再利用平移的性质得出答案.

\because 点 A 的坐标是 $(-1, 2)$, 作点 A 关于 y 轴的对称点, 得到点 A' ,

$$\therefore A' (1, 2),$$

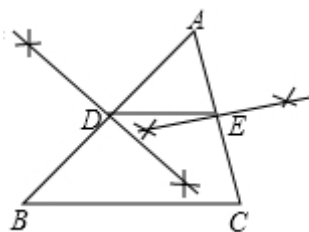
\because 将点 A' 向下平移 4 个单位, 得到点 A'' ,

\therefore 点 A'' 的坐标是: $(1, -2)$.

答案: $1; -2$

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 用直尺和圆规作 AB, AC 的垂直平分线, 分别交 AB, AC 于点 D, E ,

连接 DE. 若 BC=10cm, 则 DE=_____cm.



解析: 直接利用线段垂直平分线的性质得出 DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, 进而得出答案.

\therefore 用直尺和圆规作 AB、AC 的垂直平分线,

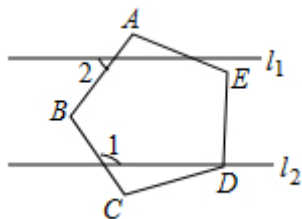
\therefore D 为 AB 的中点, E 为 AC 的中点,

\therefore DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

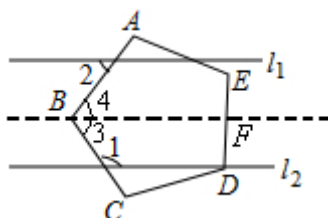
$$\therefore DE = \frac{1}{2} BC = 5 \text{cm}.$$

答案: 5

15. 如图, 五边形 ABCDE 是正五边形. 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $\angle 1 - \angle 2 =$ _____ $^\circ$.



解析: 过 B 点作 $BF \parallel l_1$,



\therefore 五边形 ABCDE 是正五边形,

$\therefore \angle ABC = 108^\circ$,

$\therefore BF \parallel l_1, l_1 \parallel l_2$,

$\therefore BF \parallel l_2, \angle 4 = \angle 2$,

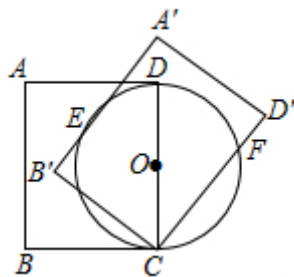
$\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 1$,

$\therefore \angle ABC = \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ - \angle 1 + \angle 2 = 108^\circ$,

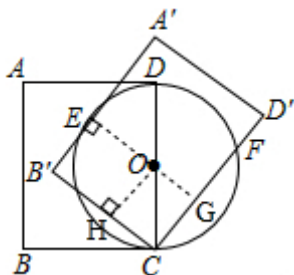
$\therefore \angle 1 - \angle 2 = 72^\circ$.

答案: 72

16. 如图, 在矩形 ABCD 中, AB=5, BC=4, 以 CD 为直径作 $\odot O$. 将矩形 ABCD 绕点 C 旋转, 使所得矩形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$ 与 $\odot O$ 相切, 切点为 E, 边 CD' 与 $\odot O$ 相交于点 F, 则 CF 的长为_____.



解析：连接 OE，延长 EO 交 CD 于点 G，作 $OH \perp B'C$ 于点 H，



则 $\angle OEB' = \angle OHB' = 90^\circ$ ，

\because 矩形 ABCD 绕点 C 旋转所得矩形为 $A'B'C'D'$ ，

$\therefore \angle B' = \angle B'CD' = 90^\circ$ ， $AB = CD = 5$ 、 $BC = B'C = 4$ ，

\therefore 四边形 $OEB'H$ 和四边形 $EB'CG$ 都是矩形， $OE = OD = OC = 2.5$ ，

$\therefore B'H = OE = 2.5$ ，

$\therefore CH = B'C - B'H = 1.5$ ，

$\therefore CG = B'E = OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{2.5^2 - 1.5^2} = 2$ ，

\therefore 四边形 $EB'CG$ 是矩形，

$\therefore \angle OGC = 90^\circ$ ，即 $OG \perp CD'$ ，

$\therefore CF = 2CG = 4$ 。

答案：4

三、解答题(本大题共 11 小题，共 88 分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 计算 $\left(m + 2 - \frac{5}{m-2}\right) \div \frac{m-3}{2m-4}$ 。

解析：根据分式混合运算顺序和运算法则计算可得。

答案：原式 = $\left(\frac{m^2 - 4}{m-2} - \frac{5}{m-2}\right) \div \frac{m-3}{2(m-2)}$

$$= \frac{(m+3)(m-3)}{m-2} \cdot \frac{2(m-2)}{m-3}$$

$$= 2(m+3)$$

$$= 2m+6.$$

18. 如图，在数轴上，点 A、B 分别表示数 1、 $-2x+3$.



(1) 求 x 的取值范围.

解析：(1) 根据数轴上的点表示的数右边的总比左边的大，可得不等式，根据解不等式，可得答案.

答案：(1) \because 数轴上的点表示的数右边的总比左边的大，

$$\therefore -2x+3 > 1,$$

解得 $x < 1$.

(2) 数轴上表示数 $-x+2$ 的点应落在_____.

A. 点 A 的左边

B. 线段 AB 上

C. 点 B 的右边

解析：(2) 根据不等式的性质，可得点在 A 点的右边，根据作差法，可得点在 B 点的左边.

由 $x < 1$ ，得 $-x > -1$ ，

$$-x+2 > -1+2,$$

解得 $-x+2 > 1$.

数轴上表示数 $-x+2$ 的点在 A 点的右边；

作差，得 $-2x+3 - (-x+2) = -x+1$ ，

由 $x < 1$ ，得 $-x > -1$ ，

$$-x+1 > 0,$$

$$-2x+3 - (-x+2) > 0,$$

$$\therefore -2x+3 > -x+2,$$

数轴上表示数 $-x+2$ 的点在 B 点的左边.

故数轴上表示数 $-x+2$ 的点应落在线段 AB 上.

答案：(2) B.

19. 刘阿姨到超市购买大米，第一次按原价购买，用了 105 元，几天后，遇上这种大米 8 折出售，她用 140 元又买了一些，两次一共购买了 40kg. 这种大米的原价是多少？

解析：设这种大米的原价是每千克 x 元，根据两次一共购买了 40kg 列出方程，求解即可.

答案：设这种大米的原价是每千克 x 元，根据题意，得

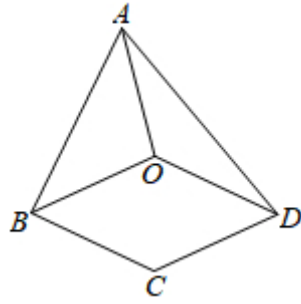
$$\frac{105}{x} + \frac{140}{0.8x} = 40,$$

解得： $x=7$.

经检验， $x=7$ 是原方程的解.

答：这种大米的原价是每千克 7 元.

20. 如图，在四边形 ABCD 中， $BC=CD$ ， $\angle C=2\angle BAD$. O 是四边形 ABCD 内一点，且 $OA=OB=OD$.

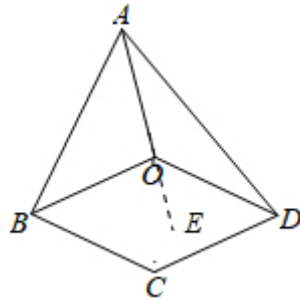


求证：

(1) $\angle BOD = \angle C$.

解析：(1) 延长 AO 到 E，利用等边对等角和角之间关系解答即可。

答案：(1) 证明：延长 OA 到 E，



$\because OA = OB$,

$\therefore \angle ABO = \angle BAO$,

又 $\angle BOE = \angle ABO + \angle BAO$,

$\therefore \angle BOE = 2\angle BAO$,

同理 $\angle DOE = 2\angle DAO$,

$\therefore \angle BOE + \angle DOE = 2\angle BAO + 2\angle DAO = 2(\angle BAO + \angle DAO)$,

即 $\angle BOD = 2\angle BAD$,

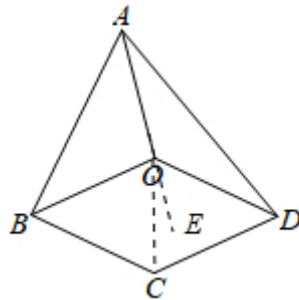
又 $\angle C = 2\angle BAD$,

$\therefore \angle BOD = \angle C$.

(2) 四边形 OBCD 是菱形。

解析：(2) 连接 OC，根据全等三角形的判定和性质以及菱形的判定解答即可。

答案：(2) 证明：连接 OC，



$\because OB = OD, CB = CD, OC = OC$,

$\therefore \triangle OBC \cong \triangle ODC$,

$\therefore \angle BOC = \angle DOC, \angle BCO = \angle DCO,$
 $\because \angle BOD = \angle BOC + \angle DOC, \angle BCD = \angle BCO + \angle DCO,$
 $\therefore \angle BOC = \frac{1}{2} \angle BOD, \angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD,$
 又 $\angle BOD = \angle BCD,$
 $\therefore \angle BOC = \angle BCO,$
 $\therefore BO = BC,$
 又 $OB = OD, BC = CD,$
 $\therefore OB = BC = CD = DO,$
 \therefore 四边形 $OBCD$ 是菱形.

21. 随机抽取某理发店一周的营业额如下表(单位: 元):

星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期日	合计
540	680	760	640	960	2200	1780	7560

(1) 求该店本周的日平均营业额.

解析: (1) 根据平均数的定义计算可得.

答案: (1) 该店本周的日平均营业额为 $7560 \div 7 = 1080$ (元),

答: 该店本周的日平均营业额为 1080 元.

(2) 如果用该店本周星期一到星期五的日平均营业额估计当月的营业总额, 你认为是否合理? 如果合理, 请说明理由; 如果不合理, 请设计一个方案, 并估计该店当月(按 30 天计算)的营业总额.

解析: (2) 从极端值对平均数的影响作出判断, 可用该店本周一到周日的日均营业额估计当月营业额.

答案: (2) 因为在周一至周日的营业额中周六、日的营业额明显高于其他五天的营业额, 所以去掉周六、日的营业额对平均数的影响较大,

故用该店本周星期一到星期五的日平均营业额估计当月的营业总额不合理,

方案: 用该店本周一到周日的日均营业额估计当月营业额,

当月的营业额为 $30 \times 1080 = 32400$ (元),

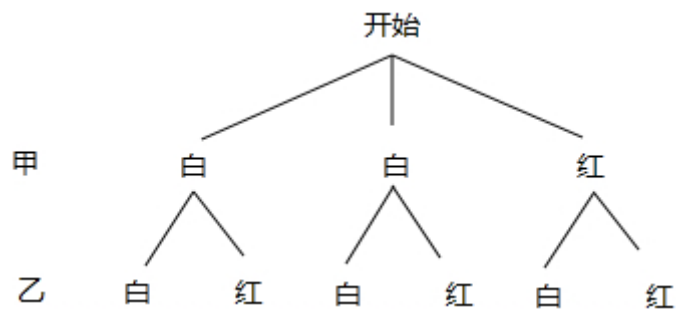
答: 当月的营业额为 32400 元.

22. 甲口袋中有 2 个白球、1 个红球, 乙口袋中有 1 个白球、1 个红球, 这些球除颜色外无其他差别. 分别从每个口袋中随机摸出 1 个球.

(1) 求摸出的 2 个球都是白球的概率.

解析: (1) 先画出树状图展示所有 6 种等可能的结果数, 再找出 2 个球都是白球所占结果数, 然后根据概率公式求解.

答案: (1) 画树状图如下:



由树状图知，共有 6 种等可能结果，其中摸出的 2 个球都是白球的有 2 种结果，所以摸出的 2 个球都是白球的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 。

(2) 下列事件中，概率最大的是_____。

- A. 摸出的 2 个球颜色相同
- B. 摸出的 2 个球颜色不相同
- C. 摸出的 2 个球中至少有 1 个红球
- D. 摸出的 2 个球中至少有 1 个白球

解析：(2) 根据概率公式分别计算出每种情况的概率，据此即可得出答案。

答案：(2) ∵ 摸出的 2 个球颜色相同概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ；

摸出的 2 个球颜色不相同的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ；

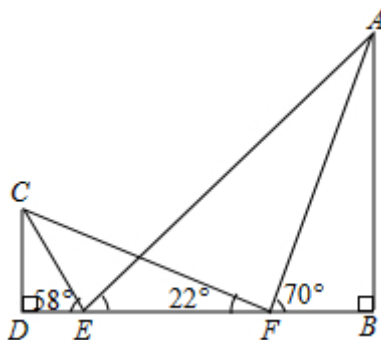
摸出的 2 个球中至少有 1 个红球的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ；

摸出的 2 个球中至少有 1 个白球的概率为 $\frac{5}{6}$ 。

∴ 概率最大的是摸出的 2 个球中至少有 1 个白球。

答案：D.

23. 如图，为了测量建筑物 AB 的高度，在 D 处树立标杆 CD，标杆的高是 2m，在 DB 上选取观测点 E、F，从 E 测得标杆和建筑物的顶部 C、A 的仰角分别为 58° 、 45° 。从 F 测得 C、A 的仰角分别为 22° 、 70° 。求建筑物 AB 的高度(精确到 0.1m)。(参考数据： $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ， $\tan 58^\circ \approx 1.60$ ， $\tan 70^\circ \approx 2.75$.)



解析：在 $\triangle CED$ 中，得出 DE，在 $\triangle CFD$ 中，得出 DF，进而得出 EF，列出方程即可得出建筑物 AB 的高度。

答案：在 Rt△CED 中， $\angle CED=58^\circ$ ，

$$\therefore \tan 58^\circ = \frac{CD}{DE},$$

$$\therefore DE = \frac{CD}{\tan 58^\circ} = \frac{2}{\tan 58^\circ},$$

在 Rt△CFD 中， $\angle CFD=22^\circ$ ，

$$\therefore \tan 22^\circ = \frac{CD}{DF},$$

$$\therefore DF = \frac{CD}{\tan 22^\circ} = \frac{2}{\tan 22^\circ},$$

$$\therefore EF = DF - DE = \frac{2}{\tan 22^\circ} - \frac{2}{\tan 58^\circ},$$

$$\text{同理：} EF = BE - BF = \frac{AB}{\tan 45^\circ} - \frac{AB}{\tan 70^\circ},$$

$$\therefore \frac{AB}{\tan 45^\circ} - \frac{AB}{\tan 70^\circ} = \frac{2}{\tan 22^\circ} - \frac{2}{\tan 58^\circ},$$

解得： $AB \approx 5.9$ (米)，

答：建筑物 AB 的高度约为 5.9 米.

24. 已知二次函数 $y=2(x-1)(x-m-3)$ (m 为常数).

(1) 求证：不论 m 为何值，该函数的图象与 x 轴总有公共点.

解析：(1) 代入 $y=0$ 求出 x 的值，分 $m+3=1$ 和 $m+3 \neq 1$ 两种情况考虑方程解的情况，进而即可证出：不论 m 为何值，该函数的图象与 x 轴总有公共点.

答案：(1) 证明：当 $y=0$ 时， $2(x-1)(x-m-3)=0$ ，

解得： $x_1=1$ ， $x_2=m+3$.

当 $m+3=1$ ，即 $m=-2$ 时，方程有两个相等的实数根；

当 $m+3 \neq 1$ ，即 $m \neq -2$ 时，方程有两个不相等的实数根.

\therefore 不论 m 为何值，该函数的图象与 x 轴总有公共点.

(2) 当 m 取什么值时，该函数的图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方？

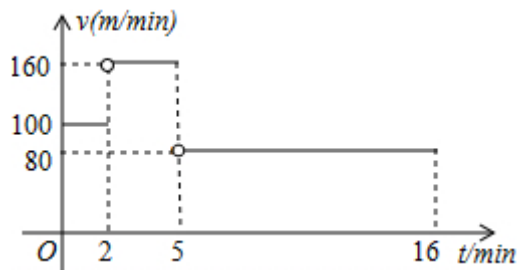
解析：(2) 利用二次函数图象上点的坐标特征求出该函数的图象与 y 轴交点的纵坐标，令其大于 0 即可求出结论.

答案：(2) 当 $x=0$ 时， $y=2(x-1)(x-m-3)=2m+6$ ，

\therefore 该函数的图象与 y 轴交点的纵坐标为 $2m+6$ ，

\therefore 当 $2m+6 > 0$ ，即 $m > -3$ 时，该函数的图象与 y 轴的交点在 x 轴的上方.

25. 小明从家出发，沿一条直道跑步，经过一段时间原路返回，刚好在第 16min 回到家中. 设小明出发第 t min 时的速度为 v m/min，离家的距离为 s m， v 与 t 之间的函数关系如图所示(图中的空心圈表示不包含这一点).



(1) 小明出发第 2min 时离家的距离为 _____ m.

解析: (1) 根据路程=速度×时间求出小明出发第 2min 时离家的距离即可.

$100 \times 2 = 200$ (m).

故小明出发第 2min 时离家的距离为 200m.

答案: (1) 200.

(2) 当 $2 < t \leq 5$ 时, 求 s 与 t 之间的函数表达式.

解析: (2) 当 $2 < t \leq 5$ 时, 离家的距离 s = 前面 2min 走的路程加上后面 $(t-2)$ min 走过的路程列式即可.

答案: (2) 当 $2 < t \leq 5$ 时, $s = 100 \times 2 + 160(t-2) = 160t - 120$.

故 s 与 t 之间的函数表达式为 $160t - 120$.

(3) 画出 s 与 t 之间的函数图象.

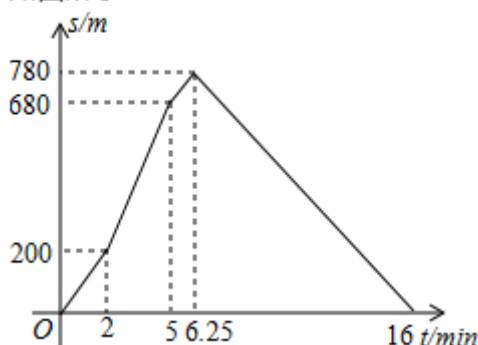
解析: (3) 分类讨论: $0 \leq t \leq 2$ 、 $2 < t \leq 5$ 、 $5 < t \leq 6.25$ 和 $6.25 < t \leq 16$ 四种情况, 画出各自的图形即可求解.

答案: (3) s 与 t 之间的函数关系式为

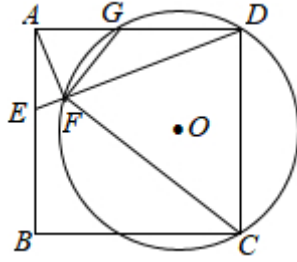
$$\begin{cases} 100t & (0 \leq t \leq 2) \\ 160t - 120 & (2 < t \leq 5) \\ 80t + 280 & (5 < t \leq 6.25) \\ 1280 - 80t & (6.25 < t \leq 16) \end{cases}$$

s 与 t 之间的函数图象如图所示:

如图所示:



26. 如图, 在正方形 ABCD 中, E 是 AB 上一点, 连接 DE. 过点 A 作 $AF \perp DE$, 垂足为 F, $\odot O$ 经过点 C、D、F, 与 AD 相交于点 G.



(1) 求证: $\triangle AFG \sim \triangle DFC$.

解析: (1) 欲证明 $\triangle AFG \sim \triangle DFC$, 只要证明 $\angle FAG = \angle FDC$, $\angle AGF = \angle FCD$.

答案: (1) 证明: 在正方形 ABCD 中, $\angle ADC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CDF + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\because AF \perp DE,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle CDF,$$

\because 四边形 GFCD 是 $\odot O$ 的内接四边形,

$$\therefore \angle FCD + \angle DGF = 180^\circ,$$

$$\because \angle FGA + \angle DGF = 180^\circ,$$

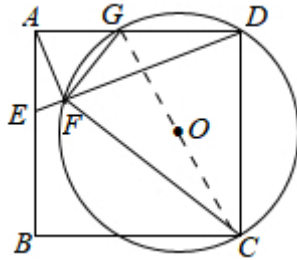
$$\therefore \angle FGA = \angle FCD,$$

$$\therefore \triangle AFG \sim \triangle DFC.$$

(2) 若正方形 ABCD 的边长为 4, $AE = 1$, 求 $\odot O$ 的半径.

解析: (2) 首先证明 CG 是直径, 求出 CG 即可解决问题;

答案: (2) 如图, 连接 CG.



$$\because \angle EAD = \angle AFD = 90^\circ, \quad \angle EDA = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle EDA \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{EA}{AF} = \frac{DA}{DF}, \quad \text{即} \quad \frac{EA}{DA} = \frac{AF}{DF},$$

$$\because \triangle AFG \sim \triangle DFC,$$

$$\therefore \frac{AG}{DC} = \frac{AF}{DF},$$

$$\therefore \frac{AG}{DC} = \frac{EA}{DA},$$

在正方形 ABCD 中, $DA = DC$,

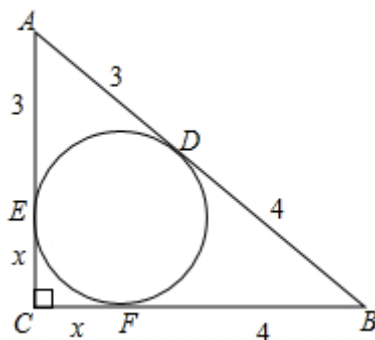
$$\therefore AG = EA = 1, \quad DG = DA - AG = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore CG = \sqrt{DG^2 + DC^2} = 5,$$

$\because \angle CDG=90^\circ$,
 $\therefore CG$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{5}{2}$.

27. 结果如此巧合!

下面是小颖对一道题目的解答.



题目: 如图, $Rt\triangle ABC$ 的内切圆与斜边 AB 相切于点 D , $AD=3$, $BD=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F , CE 的长为 x .

根据切线长定理, 得 $AE=AD=3$, $BF=BD=4$, $CF=CE=x$.

根据勾股定理, 得 $(x+3)^2 + (x+4)^2 = (3+4)^2$.

整理, 得 $x^2 + 7x = 12$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

$$= \frac{1}{2} (x+3)(x+4)$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 7x + 12)$$

$$= \frac{1}{2} \times (12 + 12)$$

$$= 12.$$

小颖发现 12 恰好就是 3×4 , 即 $\triangle ABC$ 的面积等于 AD 与 BD 的积. 这仅仅是巧合吗?

请你帮她完成下面的探索.

已知: $\triangle ABC$ 的内切圆与 AB 相切于点 D , $AD=m$, $BD=n$.

可以一般化吗?

(1) 若 $\angle C=90^\circ$, 求证: $\triangle ABC$ 的面积等于 mn .

解析: (1) 由切线长知 $AE=AD=m$ 、 $BF=BD=n$ 、 $CF=CE=x$, 根据勾股定理得 $(x+m)^2 + (x+n)^2 = (m+n)^2$, 即 $x^2 + (m+n)x = mn$, 再利用三角形的面积公式计算可得.

答案: (1) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F , CE 的长为 x ,

根据切线长定理, 得: $AE=AD=m$ 、 $BF=BD=n$ 、 $CF=CE=x$,

如图 1,

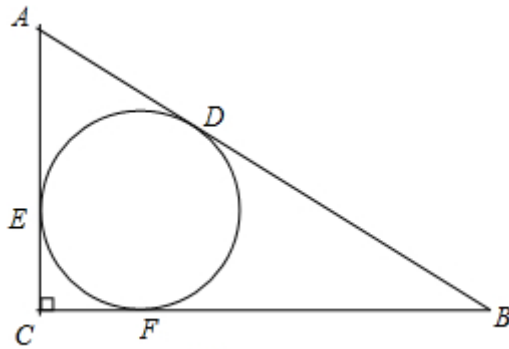


图 1

在 Rt $\triangle ABC$ 中，根据勾股定理，得： $(x+m)^2+(x+n)^2=(m+n)^2$ ，

整理，得： $x^2+(m+n)x=mn$ ，

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} (x+m)(x+n)$$

$$= \frac{1}{2} [x^2+(m+n)x+mn]$$

$$= \frac{1}{2} (mn+mn)$$

$$= mn.$$

(2) 倒过来思考呢？

若 $AC \cdot BC = 2mn$ ，求证 $\angle C = 90^\circ$.

解析：(2) 由 $AC \cdot BC = 2mn$ 得 $(x+m)(x+n) = 2mn$ ，即 $x^2+(m+n)x=mn$ ，再利用勾股定理逆定理求证即可.

答案：(2) 由 $AC \cdot BC = 2mn$ ，得： $(x+m)(x+n) = 2mn$ ，

整理，得： $x^2+(m+n)x=mn$ ，

$$\therefore AC^2+BC^2=(x+m)^2+(x+n)^2$$

$$= 2[x^2+(m+n)x]+m^2+n^2$$

$$= 2mn+m^2+n^2$$

$$= (m+n)^2$$

$$= AB^2,$$

根据勾股定理逆定理可得 $\angle C = 90^\circ$.

(3) 改变一下条件……

若 $\angle C = 60^\circ$ ，用 m 、 n 表示 $\triangle ABC$ 的面积.

解析：(3) 作 $AG \perp BC$ ，由三角函数得 $AG = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} (x+m)$ ， $CG = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} (x+m)$ ，

$BG = BC - CG = (x+n) - \frac{1}{2} (x+m)$ ，在 Rt $\triangle ABG$ 中，根据勾股定理可得 $x^2+(m+n)x=3mn$ ，最后利用三

角形的面积公式计算可得.

答案：(3) 如图 2，过点 A 作 $AG \perp BC$ 于点 G，

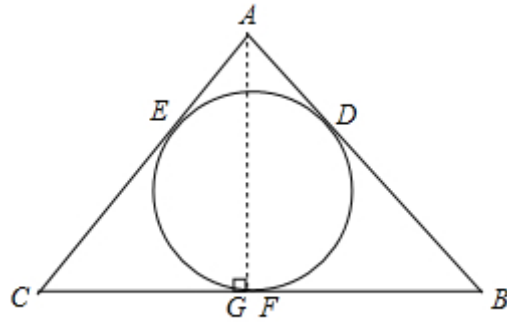


图 2

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中, $AG=AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+m)$, $CG=AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}(x+m)$,

$$\therefore BG=BC-CG=(x+n)-\frac{1}{2}(x+m),$$

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中, 根据勾股定理可得: $[\frac{\sqrt{3}}{2}(x+m)]^2 + [(x+n)-\frac{1}{2}(x+m)]^2 = (m+n)^2$,

整理, 得: $x^2 + (m+n)x = 3mn$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AG$$

$$= \frac{1}{2} \times (x+n) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(x+m)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} [x^2 + (m+n)x + mn]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (3mn + mn)$$

$$= \sqrt{3} mn.$$