2015年普通高等学校招生全国统一考试（陕西卷）数学文

一.选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.（本大题共10小题，每小题5分，共50分）.

1. 设集合 $M=\{x\mid x^2=x\}$，$N=\{x\mid \lg x\le 0\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $[0,1]$

B. $(0,1]$

C. $[0,1)$

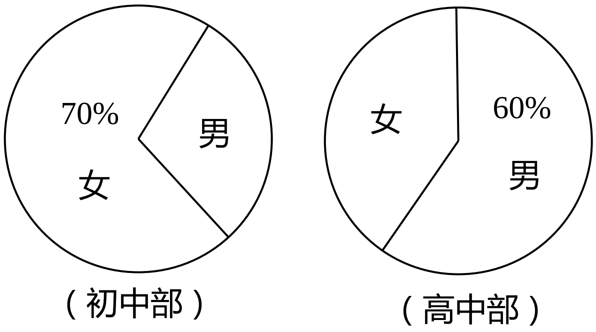
D. $(-\infty,1]$

【答案】A

解析：由 $M=\{x\mid x^2=x\}\Rightarrow M=\{0,1\}$，$N=\{x\mid \lg x\le 0\}\Rightarrow N=\{x\mid 0<x\le 1\}$，所以

$M\cup N=[0,1]$，故答案选A.

2. 某中学初中部共有110名教师，高中部共有150名教师，其性别比例如图所示，则该校女教师的人数为（　　）



A.93

B.123

C.137

D.167

【答案】C

解析：由图可知该校女教师的人数为 $110\times 70\%+150\times(1-60\%)=77+60=137$

故答案选C.

3. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线经过点 $(-1,1)$，则抛物线焦点坐标为（　　）

A. $(-1,0)$

B. $(1,0)$

C. $(0,-1)$

D. $(0,1)$

【答案】B

解析：由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 得准线 $x=-\dfrac{p}{2}$，因为准线经过点 $(-1,1)$，所以 $p=2$，所以抛物线焦点坐标为 $(1,0)$，故答案选 B

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x}, x\ge 0\\ 2^x, x<0\end{cases}$，则 $f(f(-2))=$（　　）

A. -1

B. $\dfrac{1}{4}$

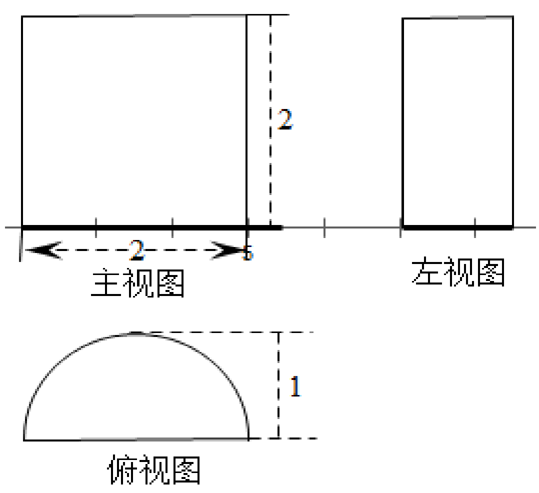
C. $\dfrac{1}{2}$

D. $\dfrac{3}{2}$

【答案】C

解析：因为 $f(-2)=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$，所以 $f(f(-2))=f(\dfrac{1}{4})=1-\sqrt{\dfrac{1}{4}}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，故答案选 C.

5. 一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



A. 3π

B. 4π

C. $2\pi+4$

D. $3\pi+4$

【答案】 D

解析：由几何体的三视图可知该几何体为圆柱的截去一半，

所以该几何体的表面积为$\pi\times1\times2+\frac{1}{2}\times\pi\times1^2\times2+2\times2=3\pi+4$，故答案选 D

6. “$\sin\alpha=\cos\alpha$”是“$\cos2\alpha=0$”的（　　）

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充分必要条件

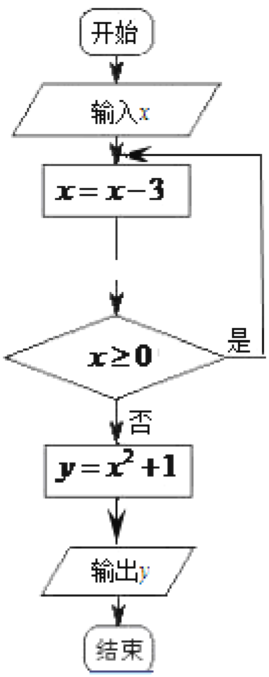
D.既不充分也不必要

【答案】 A

解析：$\cos2\alpha=0\Rightarrow\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0\Rightarrow(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=0$，所以

$\sin\alpha=\cos\alpha$或$\sin\alpha=-\cos\alpha$，故答案选 A.

7. 根据下边框图，当输入 x 为 6 时，输出的 $y=$（　　）



A. 1

B. 2

C. 5

D. 10

【答案】 D

解析：该程序框图运行如下： $x=6-3=3>0$， $x=3-3=0$， $x=0-3=-3<0$，

$y=(-3)^2+1=10$，故答案选 D.

8.对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$，下列关系式中不恒成立的是（　　）

A. $|\vec{a}\bullet\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$

B. $|\vec{a}-\vec{b}|\le||\vec{a}|-|\vec{b}||$

C. $(\vec{a}+\vec{b})^2=|\vec{a}+\vec{b}|^2$

D. $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$

【答案】 B

解析：因为 $|\vec{a}\bullet\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\le|\vec{a}||\vec{b}|$，所以 A 选项正确；当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反时，B 选项不成立，所以 B 选项错误；向量平方等于向量模的平方，所以 C 选项正确；$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$，所以 D 选项正确，故答案选 B.

9. 设 $f(x)=x-\sin x$，则 $f(x)=$（　　）

A.既是奇函数又是减函数

B.既是奇函数又是增函数

C.是有零点的减函数

D.是没有零点的奇函数

【答案】 B

解析： $f(x)=x-\sin x\Rightarrow f(-x)=(-x)-\sin(-x)=-x+\sin x=-(x-\sin x)=-f(x)$

又 $f(x)$ 的定义域为 R 是关于原点对称，所以 $f(x)$ 是奇函数；

$f'(x)=1-\cos x\ge 0\Rightarrow f(x)$ 是增函数.

故答案选 B

10.设 $f(x)=\ln x,0<a<b$，若 $p=f(\sqrt{ab})$， $q=f(\frac{a+b}{2})$， $r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$，则

下列关系式中正确的是（　　　）

A. $q=r<p$

B. $q=r>p$

C. $p=r<q$

D. $p=r>q$

【答案】C

解析：$p=f(\sqrt{ab})=\ln\sqrt{ab}=\frac{1}{2}\ln ab$；$q=f(\frac{a+b}{2})=\ln\frac{a+b}{2}$；

$r=\frac{1}{2}(f(a)+f(b))=\frac{1}{2}\ln ab$

因为$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，由 $f(x)=\ln x$ 是个递增函数，$f(\frac{a+b}{2})>f(\sqrt{ab})$

所以 $q>p=r$，故答案选C

11.某企业生产甲乙两种产品均需用 A，B 两种原料，已知生产 1 吨每种产品需原料及每天原料的可用限额表所示，如果生产 1 吨甲乙产品可获利润分别为 3 万元、4 万元，则该企业每天可获得最大利润为（　　）

	甲	乙	原料限额
A(吨)	3	2	12
B(吨)	1	2	8

A.12 万元

B.16 万元

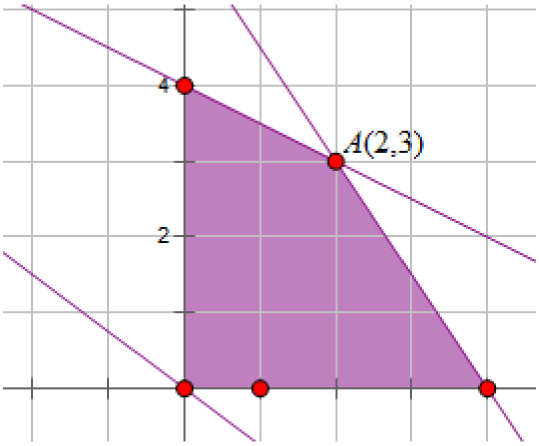
C.17 万元

D.18 万元

【答案】 D

解析：设该企业每天生产甲乙两种产品分别 x，y 吨，则利润 z=3x+4y，由题意可列

$\begin{cases} x\geq 0, y\geq 0 \\ 3x+2y\leq 12, \\ x+2y\leq 8 \end{cases}$，其表示如图阴影部分区域：



当直线 $3x+4y-z=0$ 过点 $A(2,3)$ 时， z 取得最大值 $z=3\times2+4\times3=18$

故答案选 D

12. 设复数 $z=(x-1)+yi$ $(x,y\in R)$，若 $|z|\le1$，则 $y\ge x$ 的概率（　　）

A. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2\pi}$

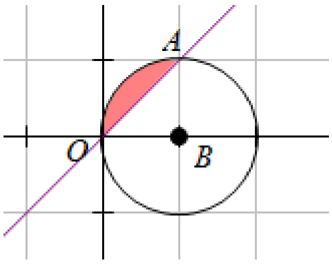
B. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}$

C. $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\pi}$

D. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}$

【答案】C

解析： $z=(x-1)+yi\Rightarrow|z|=\sqrt{(x-1)^2+y^2}\le1\Rightarrow(x-1)^2+y^2\le1$



如图可求得 $A(1,1)$，$B(1,0)$，阴影面积等于 $\dfrac{1}{4}\pi\times1^2-\dfrac{1}{2}\times1\times1=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$

若 $|z|\le1$，则 $y\ge x$ 的概率 $\dfrac{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}{\pi\times1^2}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2\pi}$

故答案选 C

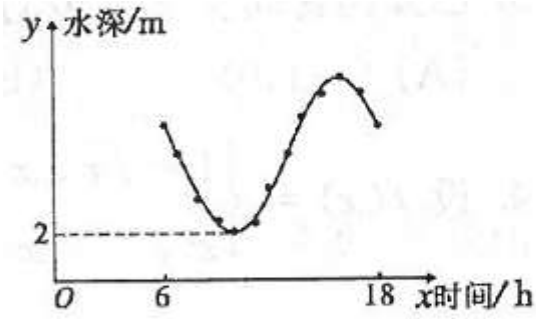
二、填空题：把答案填写在答题卡相应题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）.

13、中位数为1010的一组数构成等差数列，其末项为2015，则该数列的首项为________

【答案】5

解析：若这组数有2n+1个，则$a_{n+1}=1010$，$a_{2n+1}=2015$，又$a_1+a_{2n+1}=2a_{n+1}$，所以$a_1=5$；若这组数有2n个，则$a_n+a_{n+1}=1010\times 2=2020$，$a_{2n}=2015$，又$a_1+a_{2n}=a_n+a_{n+1}$，所以$a_1=5$；故答案为5.

14、如图，某港口一天6时到18时的谁深变化曲线近似满足函数 y＝3sin($\frac{\pi}{6}$ x＋Φ)＋k，据此函数可知，这段时间水深(单位：m)的最大值为____________.



【答案】8

解析：由图像得，当$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=-1$时 $y_{\min}=2$，求得 $k=5$，

当$\sin(\frac{\pi}{6}x+\Phi)=1$时，$y_{\max}=3\times 1+5=8$，故答案为8.

15、函数 $y=xe^x$ 在其极值点处的切线方程为____________.

解析：$y=f(x)=xe^x\Rightarrow f'(x)=(1+x)e^x$，令$f'(x)=0\Rightarrow x=-1$，此时$f(-1)=-\frac{1}{e}$，函数$y=xe^x$在其极值点处的切线方程为$y=-\frac{1}{e}$.

16、观察下列等式：

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$

…………

据此规律，第 n 个等式可为______________________.

【答案】$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

【解析】

解析：观察等式知：第 n 个等式的左边有 $2n$ 个数相加减，奇数项为正，偶数项为负，且分子为 1，分母是 1 到 $2n$ 的连续正整数，等式的右边是 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$.

故答案为 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

17. ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，向量 $\vec{m}=(a,\sqrt{3}b)$ 与 $\vec{n}=(\cos A,\sin B)$ 平行.

(I)求 A；

(II)若 $a=\sqrt{7},b=2$ 求 ΔABC 的面积.

解析：（Ⅰ）利用向量的平行，列出方程，通过正弦定理求解 A;

（Ⅱ）利用 A，以及 $a=\sqrt{7},b=2$，通过余弦定理求出 c，然后求解△ABC 的面积.

答案：(I)因为 $\vec{m}\,//\,\vec{n}$，所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$

由正弦定理，得 $\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，

又 $\sin B\neq 0$，从而 $\tan A=\sqrt{3}$，

由于 $0<A<\pi$

所以 $A=\frac{\pi}{3}$

(II)解法一：由余弦定理，得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，而 $a=\sqrt{7},b=2$， $A=\frac{\pi}{3}$，

得 $7=4+c^2-2c$，即 $c^2-2c-3=0$

因为 $c>0$，所以 $c=3$，

故 ΔABC 面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

解法二：由正弦定理，得 $\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin B}$

从而 $\sin B=\frac{\sqrt{21}}{7}$

又由 $a>b$ 知 $A>B$，所以$\cos B=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

故$\sin C=\sin(A+B)=\sin(B+\frac{\pi}{3})$

$=\sin B\cos\frac{\pi}{3}+\cos B\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$，

所以 ΔABC 面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

18.如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC, \angle BAD=\frac{\pi}{2}, AB=BC=\frac{1}{2}AD=a$，$E$ 是 AD 的中点，O 是OC 与 BE 的交点，将 ΔABE 沿 BE 折起到图 2 中ΔA_1BE 的位置，得到四棱锥 A_1-BCDE .

(I)证明：$CD\perp$ 平面 A_1OC ；

(II)当平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$ 时，四棱锥 A_1-BCDE 的体积为$36\sqrt{2}$，求 a 的值.

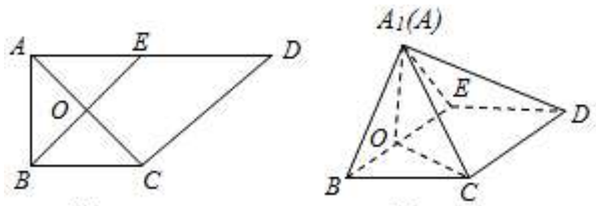


图1 图2

解析：（1）运用 E 是 AD 的中点，判断得出 BE⊥AC，BE⊥面 A_1OC，考虑 CD∥DE，即可判断 CD⊥面 A_1OC.

(II)由已知，平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，且平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$ ，又由(I)知，$A_1O\perp BE$，所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，即 A_1O 是四棱锥 A_1-BCDE 的高，易求得平行四边形 $BCDE$ 面积 $S=BC\cdot AB=a^2$ ，从而四棱锥 A_1-BCDE 的为 $V=\frac{1}{3}\times S\times A_1O=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，由$\frac{\sqrt{2}}{6}a^3=36\sqrt{2}$，得 $a=6$.

答案：（1）在图 1 中，

因为 AB=BC= $\frac{1}{2}AD$=a，E 是 AD 的中点，

∠BAD= $\frac{\pi}{2}$，

所以 BE⊥AC，
即在图 2 中，BE⊥A_1O，BE⊥OC，
从而 BE⊥面 A_1OC，
由 CD∥DE，
所以 CD⊥面 A_1OC.

(II)由已知，平面 $A_1BE \perp$ 平面 $BCDE$，

且平面 $A_1BE \cap$ 平面 $BCDE = BE$

又由(I)知，$A_1O \perp BE$，所以

$A_1O \perp$ 平面 $BCDE$，

即 A_1O 是四棱锥 $A_1 - BCDE$ 的高，

由图 1 可知，$A_1O = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$，平行四边形 $BCDE$ 面积 $S = BC \cdot AB = a^2$，

从而四棱锥 $A_1 - BCDE$ 的为

$V = \frac{1}{3} \times S \times A_1O = \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$，

由 $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3 = 36\sqrt{2}$，得 $a = 6$.

19.随机抽取一个年份，对西安市该年 4 月份的天气情况进行统计，结果如下：

日期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
天气	晴	雨	阴	阴	阴	雨	阴	晴	晴	晴	阴	晴	晴	晴	晴

日期	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
天气	晴	阴	雨	阴	阴	晴	阴	晴	晴	晴	阴	晴	晴	晴	雨

(I)在 4 月份任取一天，估计西安市在该天不下雨的概率；

(II)西安市某学校拟从 4 月份的一个晴天开始举行连续两天的运动会，估计运动会期间不下雨的概率.

解析：(I)在容量为 30 的样本中，从表格中得，不下雨的天数是 26，以频率估计概率，4 月份任选一天，西安市不下雨的概率是 $\frac{26}{30} = \frac{13}{15}$.

(II)称相邻两个日期为“互邻日期对”（如 1 日与 2 日，2 日与 3 日等）这样在 4 月份中，前

一天为晴天的互邻日期对有 16 对，其中后一天不下雨的有 14 个，所以晴天的次日不下雨的频率为 $\frac{14}{16}=\frac{7}{8}$，以频率估计概率，运动会期间不下雨的概率为 $\frac{7}{8}$.

答案：(I)在容量为 30 的样本中，不下雨的天数是 26，以频率估计概率，4 月份任选一天，西安市不下雨的概率是 $\frac{13}{15}$.

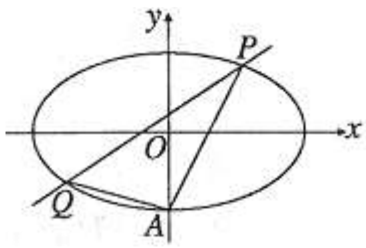
(II)称相邻两个日期为“互邻日期对”（如 1 日与 2 日，2 日与 3 日等）这样在 4 月份中，前一天为晴天的互邻日期对有 16 对，其中后一天不下雨的有 14 个，所以晴天的次日不下雨的频率为 $\frac{7}{8}$，

以频率估计概率，运动会期间不下雨的概率为 $\frac{7}{8}$.

20.如图，椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A(0,-1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I)求椭圆 E 的方程；

(II)经过点 $(1,1)$，且斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同两点 P,Q（均异于点 A），证明：直线 AP 与 AQ 的斜率之和为 2.



解析：(I)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},b=1$，由 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，继而得椭圆的方程为

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(II) 设 $P\left(x_1y_1\right),Q\left(x_2y_2\right)$，$x_1x_2\neq 0$ 由题设知，直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入

$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，化简得 $(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0$，则

$x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$，

由已知 $\Delta>0$，从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_1}$$

化简得 $k_{AP}+k_{AQ}=2k+(2-k)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\ =2k+\left(2-k\right)\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-(2k-1)=2$.

答案：(I)由题意知 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},b=1$，

综合 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，

所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(II)由题设知，直线 PQ 的方程为 $y=k(x-1)+1(k\neq 2)$，代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，得

$$(1+2k^2)x^2-4k(k-1)x+2k(k-2)=0,$$

由已知 $\Delta>0$，设 $P\left(x_1y_1\right),Q\left(x_2y_2\right)$， $x_1x_2\neq 0$

则 $x_1+x_2=\frac{4k(k-1)}{1+2k^2},x_1x_2=\frac{2k(k-2)}{1+2k^2}$,

从而直线 AP 与 AQ 的斜率之和

$$k_{AP}+k_{AQ}=\frac{y_1+1}{x_1}+\frac{y_2+1}{x_2}=\frac{kx_1+2-k}{x_1}+\frac{kx_2+2-k}{x_1}$$

$$=2k+(2-k)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=2k+(2-k)\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$$

$$=2k+\left(2-k\right)\frac{4k(k-1)}{2k(k-2)}=2k-(2k-1)=2.$$

21. 设 $f_n(x)=x+x^2+\cdots+x^n-1,n\in N,n\geq 2.$

(I)求 $f_n'(2)$；

(II)证明： $f_n(x)$ 在$\left(0,\frac{2}{3}\right)$内有且仅有一个零点（记为 a_n ），且$0<a_n-\frac{1}{2}<\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

解析：(I)由题设 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}$，所以 $f_n'(2)=1+2\times 2+\cdots+n2^{n-1}$，此式等价于数列 $\{n\cdot 2^{n-1}\}$ 的前 n 项和，由错位相减法求得 $f_n'(2)=(n-1)2^n+1$；

(II)因为 $f(0)=-1<0$，$f_n(\frac{2}{3})=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\geq 1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内至少存在一个零点，又 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$，所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内单调递增，

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内有且只有一个零点 a_n，由于 $f_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}-1$，所以

$0=f_n(a_n)=\frac{1-{a_n}^n}{1-a_n}-1$，由此可得 $a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}{a_n}^{n+1}>\frac{1}{2}$

故 $\frac{1}{2}<a_n<\frac{2}{3}$，继而得 $0<a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}{a_n}^{n+1}<\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

答案：(I)由题设 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}$，

所以 $f_n'(2)=1+2\times 2+\cdots+n2^{n-1}$ ①

由 $2f_n'(2)=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+n2^n$ ②

① − ②得 $-f_n'(2)=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n2^n$

$$=\frac{1-2^2}{1-2}-n\cdot 2^n=(1-n)2^n-1,$$

所以 $f_n'(2)=(n-1)2^n+1$

(II)因为 $f(0)=-1<0$

$$f_n(\frac{2}{3})=\frac{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{2}{3}}-1=1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n\geq 1-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2>0,$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内至少存在一个零点，

又 $f_n'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}>0$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内单调递增，

因此，$f_n(x)$ 在 $(0,\frac{2}{3})$ 内有且只有一个零点 a_n，

由于 $f_n(x)=\frac{1-x^n}{1-x}-1$，

所以$0 = f_n(a_n) = \dfrac{1-{a_n}^n}{1-a_n} - 1$

由此可得 $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}{a_n}^{n+1} > \dfrac{1}{2}$

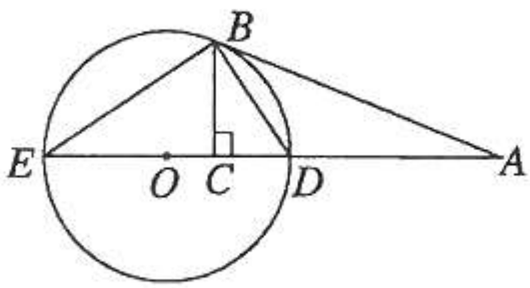
故$\dfrac{1}{2} < a_n < \dfrac{2}{3}$

所以 $0 < a_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}{a_n}^{n+1} < \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1} = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

22. 如图， AB 切⊙O 于点 B，直线 AO 交⊙O 于 D,E 两点， $BC \perp DE,$ 垂足为C.

(I)证明： $\angle CBD = \angle DBA$

(II)若 $AD = 3DC, BC = \sqrt{2}$，求⊙O 的直径.



解析：(I)因为 DE 是⊙O 的直径，则 $\angle BED + \angle EDB = 90°$，又 $BC \perp DE$，所以 $\angle CBD + \angle EDB = 90°$，又 AB 切⊙O 于点 B，得 $\angle DBA = \angle BED$，所以 $\angle CBD = \angle DBA$；

(II)由(I)知 BD 平分 $\angle CBA$，则 $\dfrac{BA}{BC} = \dfrac{AD}{CD} = 3$，又 $BC = \sqrt{2}$，从而 $AB = 3\sqrt{2}$，由 $AB^2 = BC^2 + AC^2$，

解得 $AC = 4$，所以 $AD = 3$，由切割线定理得 $AB^2 = AD \cdot AE$，解得 $AE = 6$，故 $DE = AE - AD = 3$，

即⊙O 的直径为 3.

答案：(I)因为 DE 是⊙O 的直径，

则 $\angle BED + \angle EDB = 90°$

又 $BC \perp DE$，所以 $\angle CBD + \angle EDB = 90°$

又 AB 切⊙O 于点 B，

得 $\angle DBA = \angle BED$

所以 $\angle CBD=\angle DBA$

(II)由(I)知 BD 平分 $\angle CBA$，

则 $\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{AD}{CD}=3$，

又 $BC=\sqrt{2}$，从而 $AB=3\sqrt{2}$，

所以 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=4$

所以 $AD=3$，

由切割线定理得 $AB^2=AD\cdot AE$

即 $AE=\dfrac{AB^2}{AD}=6$，

故 $DE=AE-AD=3$，

即⊙O 的直径为 3.

23.在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=3+\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，以原点为极点， x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，⊙C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$.

(I)写出⊙C 的直角坐标方程;

(II) P 为直线 l 上一动点，当 P 到圆心 C 的距离最小时，求点 P 的坐标.

解析：(I) 由 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$，得 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，从而有 $x^2+y^2=2\sqrt{3}y$，所以 $x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$

(II)设 $P\left(3+\dfrac{1}{2}t,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，又 $C(0,\sqrt{3})$，则 $|PC|=\sqrt{\left(3+\dfrac{1}{2}t\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{t^2+12}$，

故当 $t=0$ 时，$|PC|$ 取得最小值，此时 P 点的坐标为 $(3,0)$.

答案：(I)由 $\rho=2\sqrt{3}\sin\theta$，

得 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\sin\theta$，

从而有 $x^2+y^2=2\sqrt{3}y$

所以$x^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=3$

(II)设$P\left(3+\dfrac{1}{2}t,\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$，又$C(0,\sqrt{3})$，

则$|PC|=\sqrt{\left(3+\dfrac{1}{2}t\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{t^2+12}$，

故当$t=0$时，$|PC|$取得最小值，

此时P点的坐标为$(3,0)$.

24.已知关于x的不等式$|x+a|<b$的解集为$\{x\,|\,2<x<4\}$

(I)求实数a,b的值；

(II)求$\sqrt{at+12}+\sqrt{bt}$的最大值.

解析：(I)由$|x+a|<b$，得$-b-a<x<b-a$，由题意得$\begin{cases}-b-a=2\\ b-a=4\end{cases}$，解得$a=-3,b=1$；

(II)柯西不等式得$\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{4-t}+\sqrt{t}\le\sqrt{[(\sqrt{3})^2+1^2][(\sqrt{4-t})^2+(\sqrt{t})^2}$

$=2\sqrt{4-t+t}=4$，当且仅当$\dfrac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{t}}{1}$即$t=1$时等号成立，故

$\left(\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}\right)_{\min}=4$.

答案：(I)由$|x+a|<b$，得$-b-a<x<b-a$

则$\begin{cases}-b-a=2\\ b-a=4\end{cases}$，解得$a=-3,b=1$.

(II)$\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}=\sqrt{3}\sqrt{4-t}+\sqrt{t}$

$\le\sqrt{[(\sqrt{3})^2+1^2][(\sqrt{4-t})^2+(\sqrt{t})^2}$

$=2\sqrt{4-t+t}=4$

当且仅当$\dfrac{\sqrt{4-t}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{t}}{1}$即$t=1$时等号成立，

故$\left(\sqrt{-3t+12}+\sqrt{t}\right)_{\min}=4$