

2015年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)数学文

一、选择题:本大题共10小题,每小题5分,共50分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合  $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{1, 3\}$ , 则  $A \cap B=(\quad)$

- A.  $\{2\}$
- B.  $\{1, 2\}$
- C.  $\{1, 3\}$
- D.  $\{1, 2, 3\}$

解析: 集合  $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $B=\{1, 3\}$ , 则  $A \cap B=\{1, 3\}$ .

答案: C.

2. “ $x=1$ ”是“ $x^2-2x+1=0$ ”的( )

- A. 充要条件
- B. 充分而不必要条件
- C. 必要而不充分条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析: 由  $x^2-2x+1=0$ , 解得:  $x=1$ ,

故“ $x=1$ ”是“ $x^2-2x+1=0$ ”的充要条件,

答案: A.

3. 函数  $f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$  的定义域是( )

- A.  $[-3, 1]$
- B.  $(-3, 1)$
- C.  $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$
- D.  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

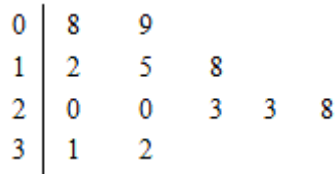
解析: 由题意得:  $x^2+2x-3 > 0$ , 即  $(x-1)(x+3) > 0$

解得  $x > 1$  或  $x < -3$

所以定义域为  $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

答案: D.

4. 重庆市2013年各月的平均气温( $^{\circ}\text{C}$ )数据的茎叶图如, 则这组数据的中位数是( )



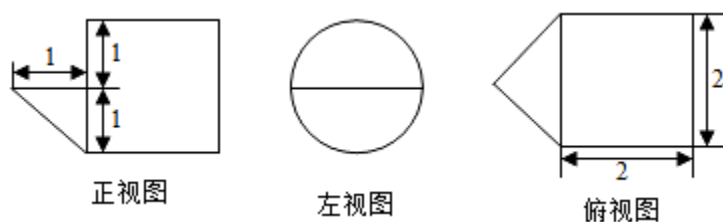
- A. 19
- B. 20
- C. 21.5
- D. 23

解析: 样本数据有12个, 位于中间的两个数为20, 20,

则中位数为  $\frac{20+20}{2}=20$ ,

答案：B

5. 某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为( )



A.  $\frac{1}{3}+2\pi$

B.  $\frac{13\pi}{6}$

C.  $\frac{7\pi}{3}$

D.  $\frac{5\pi}{2}$

解析：由题意可知几何体的形状是放倒的圆柱，底面半径为1，高为2，左侧与一个底面半径为1，高为1的半圆锥组成的组合体，

几何体的体积为： $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1^2 \pi \times 1 + 1^2 \pi \times 2 = \frac{13\pi}{6}$ .

答案：B.

6. 若  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ , 则  $\tan \beta =$ ( )

A.  $\frac{1}{7}$

B.  $\frac{1}{6}$

C.  $\frac{5}{7}$

D.  $\frac{5}{6}$

解析： $\because \tan \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ , 则  $\tan \beta = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha] =$

$$\frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{7}$$

答案：A.

7. 已知非零向量  $a$ ,  $b$  满足  $|b| = 4|a|$ , 且  $a \perp (2a + b)$  则  $a$  与  $b$  的夹角为( )

A.  $\frac{\pi}{3}$

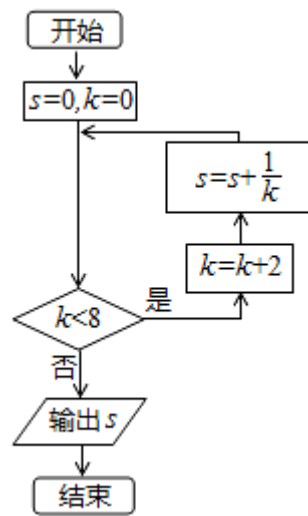
- B.  $\frac{\pi}{2}$   
 C.  $\frac{2\pi}{3}$   
 D.  $\frac{5\pi}{6}$

解析：由已知非零向量  $a, b$  满足  $|b|=4|a|$ ，且  $a \perp (2a+b)$ ，设两个非零向量  $a, b$  的夹角为  $\theta$ ，

所以  $a \cdot (2a+b)=0$ ，即  $2\vec{a}^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 0$ ，所以  $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ ， $\theta \in [0, \pi]$ ，所以  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ；

答案：C.

8. 执行如图所示的程序框图，则输出  $s$  的值为( )



- A.  $\frac{3}{4}$   
 B.  $\frac{5}{6}$   
 C.  $\frac{11}{12}$   
 D.  $\frac{25}{24}$

解析：模拟执行程序框图，可得  $s=0, k=0$

满足条件  $k < 8$ ， $k=2$ ， $s=\frac{1}{2}$

满足条件  $k < 8$ ， $k=4$ ， $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

满足条件  $k < 8$ ， $k=6$ ， $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

满足条件  $k < 8$ ， $k=8$ ， $s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$

不满足条件  $k < 8$ ，退出循环，输出  $s$  的值为  $\frac{25}{24}$ 。

答案：D.

9. 设双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点是  $F$ ，左、右顶点分别是  $A_1, A_2$ ，过  $F$  做  $A_1A_2$  的垂线与双曲线交于  $B, C$  两点，若  $A_1B \perp A_2C$ ，则该双曲线的渐近线的斜率为( )

A.  $\pm \frac{1}{2}$

B.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

C.  $\pm 1$

D.  $\pm \sqrt{2}$

解析：由题意， $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B(c, \frac{b^2}{a}), C(c, -\frac{b^2}{a})$ ,

$\because A_1B \perp A_2C$ ,

$$\therefore \frac{b^2}{c+a} \cdot \frac{-b^2}{c-a} = -1,$$

$\therefore a=b$ ,

$\therefore$  双曲线的渐近线的斜率为  $\pm 1$ .

答案：C.

10. 若不等式组  $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x+2y-2 \geq 0 \\ x-y+2m \geq 0 \end{cases}$ ，表示的平面区域为三角形，且其面积等于  $\frac{4}{3}$ ，则  $m$  的值为

( )

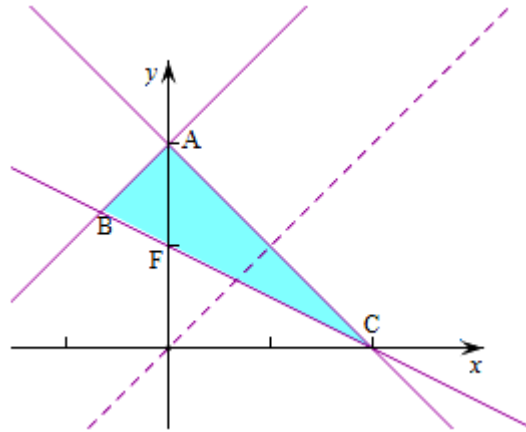
A. -3

B. 1

C.  $\frac{4}{3}$

D. 3

解析：作出不等式组对应的平面区域如图：



若表示的平面区域为三角形，  
 则  $C(2, 0)$  在直线  $x-y+2m=0$  的下方，  
 即  $2+2m > 0$ ，  
 则  $m > -1$ ，  
 则  $C(2, 0)$ ， $F(0, 1)$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} x-y+2m=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=1-m \\ y=1+m \end{cases}, \text{ 即 } A(1-m, 1+m),$$

$$\text{由 } \begin{cases} x-y+2m=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{2-4m}{3} \\ y=\frac{2+2m}{3} \end{cases}, \text{ 即 } B\left(\frac{2-4m}{3}, \frac{2+2m}{3}\right).$$

$$|AF|=1+m-1=m,$$

$$\text{则三角形 } ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times m \times 2 + \frac{1}{2} \times m \times \left(-\frac{2-4m}{3}\right) = \frac{4}{3},$$

$$\text{即 } m^2+m-2=0,$$

解得  $m=1$  或  $m=-2$  (舍)，

答案：B

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分. 把答案填写在答题卡相应位置上.

11. 复数  $(1+2i)i$  的实部为\_\_\_\_\_.

解析： $(1+2i)i = i+2i^2 = -2+i$ ，所以此复数的实部为-2；

故答案为：-2.

12. 若点  $P(1, 2)$  在以坐标原点为圆心的圆上，则该圆在点  $P$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

$$-\frac{1}{K_{OP}} = -\frac{-1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

解析：由题意可得  $OP$  和切线垂直，故切线的斜率为

$$\text{故切线的方程为 } y-2 = -\frac{1}{2}(x-1), \text{ 即 } x+2y-5=0,$$

故答案为：  $x+2y-5=0$ .

13. 设 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ , 且 $a=2, \cos C=-\frac{1}{4}, 3\sin A=2\sin B$ , 则

$c=$ \_\_\_\_\_.

解析:  $\because 3\sin A=2\sin B$ ,

$\therefore$ 由正弦定理可得:  $3a=2b$ ,

$\because a=2$ ,

$\therefore$ 可解得  $b=3$ ,

又 $\because \cos C=-\frac{1}{4}$ ,

$\therefore$ 由余弦定理可得:  $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-2\times 2\times 3\times (-\frac{1}{4})=16$ ,

$\therefore$ 解得:  $c=4$ .

故答案为: 4.

14. 设 $a, b>0, a+b=5$ , 则 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值为\_\_\_\_\_.

解析: 利用柯西不等式, 即可求出 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值.

答案: 由题意,  $(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3})^2 \leq (1+1)(a+1+b+3)=18$ ,

$\therefore \sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$

15. 在区间 $[0, 5]$ 上随机地选择一个数 $p$ , 则方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根的概率为\_\_\_\_\_.

解析: 由一元二次方程根的分布可得 $p$ 的不等式组, 解不等式组, 由长度之比可得所求概率.

答案: 方程 $x^2+2px+3p-2=0$ 有两个负根等价于
$$\begin{cases} \Delta=4p^2-4(3p-2) \geq 0 \\ x_1+x_2=-2p \leq 0 \\ x_1x_2=3p-2 \geq 0 \end{cases},$$

解关于 $p$ 的不等式组可得 $\frac{2}{3} \leq p \leq 1$  或  $p \geq 2$ ,

$$P = \frac{1 - \frac{2}{3} + 5 - 2}{5 - 0} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ 所求概率

**三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 75 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3=2$ , 前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$ .

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=a_1, b_4=a_{15}$ , 求 $\{b_n\}$ 前  $n$  项和 $T_n$ .

解析: (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ , 则由已知条件列式求得首项和公差, 代入等差数列的通项公式得答案:

(2) 求出  $b_1=1$ ,  $b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$ , 再求出等比数列的公比, 由等比数列的前  $n$  项和公式

求得  $\{b_n\}$  前  $n$  项和  $T_n$ .

答案: (1) 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则由已知条件得:

$$\begin{cases} a_1+2d=2 \\ 3a_1+\frac{3 \times 2}{2}d=\frac{9}{2} \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1=1 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

代入等差数列的通项公式得:  $a_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$ ;

(2) 由(1)得,  $b_1=1$ ,  $b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$ .

设  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 则  $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$ , 从而  $q=2$ ,

故  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1 \times (1-2^n)}{1-2}=2^n-1$ .

17. 随着我国经济的发展, 居民的储蓄存款逐年增长. 设某地区城乡居民人民币储蓄存款(年底余额)如下表:

年份	2010	2011	2012	2013	2014
时间代号 $t$	1	2	3	4	5
储蓄存款 $y$ (千亿元)	5	6	7	8	10

(1) 求  $y$  关于  $t$  的回归方程  $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ .

附: 回归方程  $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$  中

$$\begin{cases} \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n\bar{t}^2} \\ \hat{a}=\bar{y} - \hat{b}\bar{t} \end{cases}.$$

(2) 用所求回归方程预测该地区 2015 年( $t=6$ )的人民币储蓄存款.

解析: (1) 利用公式求出  $a$ ,  $b$ , 即可求  $y$  关于  $t$  的回归方程  $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ .

(2)  $t=6$ , 代入回归方程, 即可预测该地区 2015 年的人民币储蓄存款.

答案: (1)

$i$	$t_i$	$y_i$	$t_i^2$	$t_i y_i$
1	1	5	1	5
2	2	6	4	12
3	3	7	9	21
4	4	8	16	32
5	5	10	25	50
$\Sigma$	15	36	55	120

由题意,  $\bar{t}=3, \bar{y}=7.2,$

$$\sum_{i=1}^5 t_i^2 - 5\bar{t}^2 = 55 - 5 \times 3^2 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 t_i y_i - 5\bar{t}\bar{y} = 120 - 5 \times 3 \times 7.2 = 12,$$

$$\therefore \hat{b} = 1.2, \quad \hat{a} = 7.2 - 1.2 \times 3 = 3.6,$$

$\therefore y$  关于  $t$  的回归方程  $\hat{y} = 1.2t + 3.6.$

(2)  $t=6$  时,  $\hat{y} = 1.2 \times 6 + 3.6 = 10.8$  (千亿元).

18. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{3}\cos^2 x.$

(1) 求  $f(x)$  的最小周期和最小值;

(2) 将函数  $f(x)$  的图象上每一点的横坐标伸长到原来的两倍, 纵坐标不变, 得到函数  $g(x)$  的图象. 当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时, 求  $g(x)$  的值域.

解析: (1) 由三角函数中的恒等变换应用化简函数解析式可得  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2},$  从而可求最小周期和最小值;

(2) 由函数  $y = A\sin(\omega x + \phi)$  的图象变换可得  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2},$  由  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时, 可得  $x - \frac{\pi}{3}$  的范围, 即可求得  $g(x)$  的值域.

$$\text{答案: (1) } \because f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{3}\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小周期 } T = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 最小值为: } -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

(2) 由条件可知:  $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$



当  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  时, 有  $x - \frac{\pi}{3} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ , 从而  $\sin(x - \frac{\pi}{3})$  的值域为  $[\frac{1}{2}, 1]$ , 那么  $\sin(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$  的值域为:

$$[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}],$$

故  $g(x)$  在区间  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$  上的值域是  $[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}]$ .

19. 已知函数  $f(x) = ax^3 + x^2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 在  $x = -\frac{4}{3}$  处取得极值.

(1) 确定  $a$  的值;

(2) 若  $g(x) = f(x)e^x$ , 讨论  $g(x)$  的单调性.

解析: (1) 求导数, 利用  $f(x) = ax^3 + x^2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 在  $x = -\frac{4}{3}$  处取得极值, 可得  $f'(-\frac{4}{3}) = 0$ , 即可确定  $a$  的值;

(2) 由 (1) 得  $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 + x^2)e^x$ , 利用导数的正负可得  $g(x)$  的单调性.

答案: (1) 对  $f(x)$  求导得  $f'(x) = 3ax^2 + 2x$ .

$\because f(x) = ax^3 + x^2$  ( $a \in \mathbb{R}$ ) 在  $x = -\frac{4}{3}$  处取得极值,

$$\therefore f'(-\frac{4}{3}) = 0,$$

$$\therefore 3a \cdot \frac{16}{9} + 2 \cdot (-\frac{4}{3}) = 0,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2};$$

(2) 由 (1) 得  $g(x) = (\frac{1}{2}x^3 + x^2)e^x$ ,

$$\therefore g'(x) = (\frac{3}{2}x^2 + 2x)e^x + (\frac{1}{2}x^3 + x^2)e^x = \frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x,$$

令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x = 0$ ,  $x = -1$  或  $x = -4$ ,

当  $x < -4$  时,  $g'(x) < 0$ , 故  $g(x)$  为减函数;

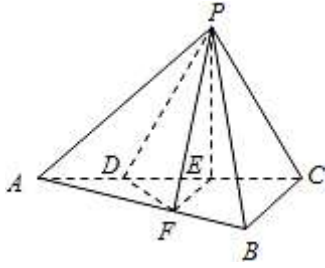
当  $-4 < x < -1$  时,  $g'(x) > 0$ , 故  $g(x)$  为增函数;

当  $-1 < x < 0$  时,  $g'(x) < 0$ , 故  $g(x)$  为减函数;

当  $x > 0$  时,  $g'(x) > 0$ , 故  $g(x)$  为增函数;

综上知  $g(x)$  在  $(-\infty, -4)$  和  $(-1, 0)$  内为减函数, 在  $(-4, -1)$  和  $(0, +\infty)$  内为增函数.

20. 如题图, 三棱锥  $P-ABC$  中, 平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ ,  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ , 点  $D$ 、 $E$  在线段  $AC$  上, 且  $AD = DE = EC = 2$ ,  $PD = PC = 4$ , 点  $F$  在线段  $AB$  上, 且  $EF \parallel BC$ .



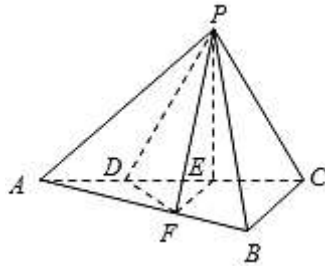
(1) 证明:  $AB \perp$  平面 PFE.

(2) 若四棱锥 P-DFBC 的体积为 7, 求线段 BC 的长.

解析: (1) 由等腰三角形的性质可证  $PE \perp AC$ , 可证  $PE \perp AB$ . 又  $EF \parallel BC$ , 可证  $AB \perp EF$ , 从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE, EF 都垂直, 可证  $AB \perp$  平面 PEF.

(2) 设  $BC=x$ , 可求 AB,  $S_{\triangle ABC}$ , 由  $EF \parallel BC$  可得  $\triangle AFE \cong \triangle ABC$ , 求得  $S_{\triangle AFE} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}$ , 由  $AD = \frac{1}{2} AE$ , 可求  $S_{\triangle AFD}$ , 从而求得四边形 DFBC 的面积, 由 (1) 知 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高, 求得 PE, 由体积  $V_{P-DFBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{DFBC} \cdot PE = 7$ , 即可解得线段 BC 的长.

答案: (1) 如图,



由  $DE=EC$ ,  $PD=PC$  知, E 为等腰  $\triangle PDC$  中 DC 边的中点, 故  $PE \perp AC$ , 又平面  $PAC \perp$  平面  $ABC$ , 平面  $PAC \cap$  平面  $ABC=AC$ ,  $PE \subset$  平面  $PAC$ ,  $PE \perp AC$ , 所以  $PE \perp$  平面  $ABC$ , 从而  $PE \perp AB$ .

因为  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ ,  $EF \parallel BC$ ,

故  $AB \perp EF$ ,

从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE, EF 都垂直,

所以  $AB \perp$  平面 PEF.

(2) 设  $BC=x$ , 则在直角  $\triangle ABC$  中,  $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{36 - x^2}$ ,

从而  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} x \sqrt{36 - x^2}$ ,

由  $EF \parallel BC$  知  $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$ , 得  $\triangle AFE \cong \triangle ABC$ ,

故  $\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ , 即  $S_{\triangle AFE} = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}$ ,

由  $AD = \frac{1}{2}AE$ ,  $S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2}S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}S_{\triangle ABC} = \frac{2}{9}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}$ ,

从而四边形 DFBC 的面积为:  $S_{DFBC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2} - \frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2} = \frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}$ .

由(1)知,  $PE \perp$  平面 ABC, 所以 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高.

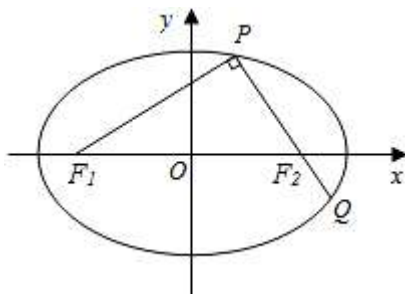
在直角  $\triangle PEC$  中,  $PE = \sqrt{PC^2 - EC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ,

故体积  $V_{P-DFBC} = \frac{1}{3} \cdot S_{DFBC} \cdot PE = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2} \cdot 2\sqrt{3} = 7$ ,

故得  $x^4 - 36x^2 + 243 = 0$ , 解得  $x^2 = 9$  或  $x^2 = 27$ , 由于  $x > 0$ , 可得  $x = 3$  或  $x = 3\sqrt{3}$ .

所以:  $BC = 3$  或  $BC = 3\sqrt{3}$ .

21. 如题图, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 且过  $F_2$  的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且  $PQ \perp PF_1$ .



(1) 若  $|PF_1| = 2 + \sqrt{2}$ ,  $|PF_2| = 2 - \sqrt{2}$ , 求椭圆的标准方程.

(2) 若  $|PQ| = \lambda |PF_1|$ , 且  $\frac{3}{4} \leq \lambda < \frac{4}{3}$ , 试确定椭圆离心率  $e$  的取值范围.

解析: (1) 由椭圆的定义可得:  $2a = |PF_1| + |PF_2|$ , 解得  $a$ . 设椭圆的半焦距为  $c$ , 由于  $PQ \perp PF_1$ ,

利用勾股定理可得  $2c = |F_1F_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PF_2|^2}$ , 解得  $c$ . 利用  $b^2 = a^2 - c^2$ . 即可得出椭圆的标准方程.

(2) 如图所示, 由  $PQ \perp PF_1$ ,  $|PQ| = \lambda |PF_1|$ , 可得  $|QF_1| = \sqrt{1 + \lambda^2} |PF_1|$ , 由椭圆的定义可

得:  $|PF_1| + |PQ| + |QF_1| = 4a$ , 解得  $|PF_1| = \frac{4a}{1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}$ .  $|PF_2| = 2a - |PF_1|$ , 由勾股定理可得:

$2c = |F_1F_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PF_2|^2}$ , 代入化简. 令  $t = 1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}$ , 则上式化为  $e^2 =$

$8 \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{1}{2}$ , 解出即可.

答案: (1) 由椭圆的定义可得:  $2a = |PF_1| + |PF_2| = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$ , 解得  $a = 2$ .

设椭圆的半焦距为  $c$ ,  $\because PQ \perp PF_1$ ,

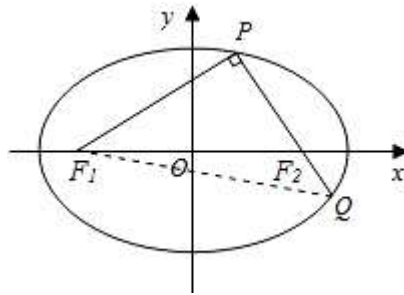
$$\therefore 2c = |F_1F_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PF_2|^2} = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2 + (2-\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore c = \sqrt{3}.$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 如图所示, 由  $PQ \perp PF_1$ ,  $|PQ| = \lambda |PF_1|$ ,



$$\therefore |QF_1| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PQ|^2} = \sqrt{1 + \lambda^2} |PF_1|,$$

由椭圆的定义可得:  $2a = |PF_1| + |PF_2| = |QF_1| + |QF_2|$ ,

$$\therefore |PF_1| + |PQ| + |QF_1| = 4a,$$

$$\therefore (1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}) |PF_1| = 4a, \text{ 解得 } |PF_1| = \frac{4a}{1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

$$|PF_2| = 2a - |PF_1| = \frac{2a(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2} - 1)}{1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}},$$

由勾股定理可得:  $2c = |F_1F_2| = \sqrt{|PF_1|^2 + |PF_2|^2}$ ,

$$\therefore \left(\frac{4a}{1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}\right)^2 + \left[\frac{2a(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2} - 1)}{1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}}\right]^2 = 4c^2,$$

$$\therefore \frac{4}{(1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})^2} + \frac{(\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2} - 1)^2}{(1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2})^2} = e^2.$$

$$\text{令 } t = 1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}, \text{ 则上式化为 } e^2 = \frac{4 + (t - 2)^2}{t^2} = 8 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

$$\therefore t = 1 + \lambda + \sqrt{1 + \lambda^2}, \text{ 且 } \frac{3}{4} \leq \lambda < \frac{4}{3},$$

$$\therefore t \text{ 关于 } \lambda \text{ 单调递增, } \therefore 3 \leq t < 4. \therefore \frac{1}{4} < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{1}{2} < e^2 \leq \frac{5}{9}, \text{ 解得 } \frac{\sqrt{2}}{2} < e \leq \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

∴椭圆离心率的取值范围是  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$ .