2015年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）数学文

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合A={1，2，3}，B={1，3}，则A∩B=(　　)

A.{2}

B.{1，2}

C.{1，3}

D.{1，2，3}

解析：集合A={1，2，3}，B={1，3}，则A∩B={1，3}.

答案：C.

2.“x=1”是“$x^2-2x+1=0$”的(　　)

A.充要条件

B.充分而不必要条件

C.必要而不充分条件

D.既不充分也不必要条件

解析：由$x^2-2x+1=0$，解得：x=1，

故“x=1”是“$x^2-2x+1=0$”的充要条件，

答案：A.

3.函数$f(x)=\log_2(x^2+2x-3)$的定义域是(　　)

A.[-3，1]

B.(-3，1)

C.(-∞，-3]∪[1，+∞)

D.(-∞，-3)∪(1，+∞)

解析：由题意得：$x^2+2x-3>0$，即$(x-1)(x+3)>0$

解得x＞1或x＜-3

所以定义域为(-∞，-3)∪(1，+∞)

答案：D.

4.重庆市2013年各月的平均气温(℃)数据的茎叶图如，则这组数据的中位数是(　　)

0	8	9			
1	2	5	8		
2	0	0	3	3	8
3	1	2			

A.19

B.20

C.21.5

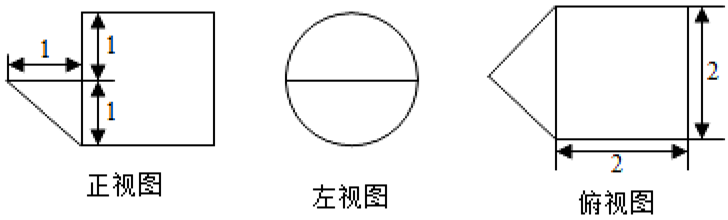
D.23

解析：样本数据有12个，位于中间的两个数为20，20，

则中位数为$\frac{20+20}{2}=20$，

答案：B

5.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



A. $\frac{1}{3}+2\pi$

B. $\frac{13\pi}{6}$

C. $\frac{7\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{2}$

解析：由题意可知几何体的形状是放倒的圆柱，底面半径为1，高为2，左侧与一个底面半径为1，高为1的半圆锥组成的组合体，

几何体的体积为：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1^{2}\pi\times1+1^{2}\pi\times2=\frac{13\pi}{6}$.

答案：B.

6.若$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则$\tan\beta=$(　　)

A. $\frac{1}{7}$

B. $\frac{1}{6}$

C. $\frac{5}{7}$

D. $\frac{5}{6}$

解析：∵$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则$\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=$

$\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{7}$，

答案：A.

7.已知非零向量a，b满足|b|=4|a|，且a⊥(2a+b)则a与b的夹角为(　　)

A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

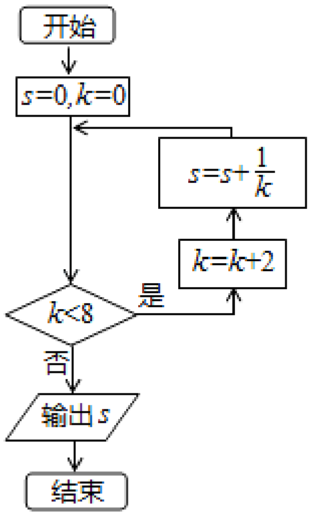
D. $\frac{5\pi}{6}$

解析：由已知非零向量 a，b 满足|b|=4|a|，且 a⊥(2a+b)，设两个非零向量 a，b 的夹角为 θ，

所以 a•(2a+b)=0,即 $2\vec{a}^2+|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=0$,所以 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，θ∈[0，π],所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$;

答案：C.

8.执行如图所示的程序框图，则输出 s 的值为(　　)



A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{11}{12}$

D. $\frac{25}{24}$

解析：模拟执行程序框图，可得

s=0，k=0

满足条件 k＜8，k=2，$s=\frac{1}{2}$

满足条件 k＜8，k=4，$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

满足条件 k＜8，k=6，$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$

满足条件 k＜8，k=8，$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$

不满足条件 k＜8，退出循环，输出 s 的值为$\frac{25}{24}$.

答案：D.

9.设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右焦点是 F，左、右顶点分别是 A_1，A_2，过 F 做 A_1A_2 的垂线与双曲线交于 B，C 两点，若 $A_1B\perp A_2C$，则该双曲线的渐近线的斜率为(　　)

A. $\pm\frac{1}{2}$

B. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. ±1

D. $\pm\sqrt{2}$

解析：由题意，$A_1(-a，0)$，$A_2(a，0)$，B(c，$\frac{b^2}{a}$)，C(c，$-\frac{b^2}{a}$)，

∵$A_1B\perp A_2C$，

∴$\frac{\frac{b^2}{a}}{c+a}\cdot\frac{-\frac{b^2}{a}}{c-a}=-1$，

∴a=b，

∴双曲线的渐近线的斜率为±1.

答案：C.

10.若不等式组$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\x+2y-2\geqslant 0\\x-y+2m\geqslant 0\end{cases}$，表示的平面区域为三角形，且其面积等于$\frac{4}{3}$，则 m 的值为(　　)

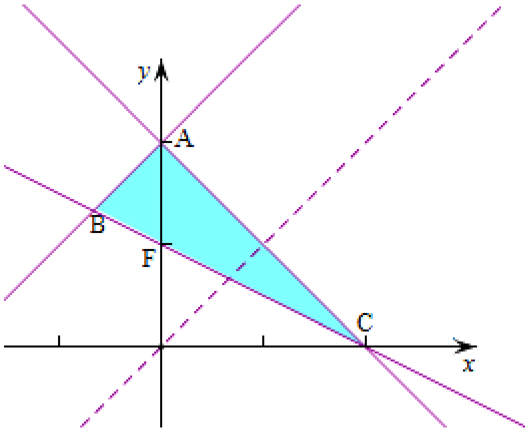
A. -3

B. 1

C. $\frac{4}{3}$

D. 3

解析：作出不等式组对应的平面区域如图：



若表示的平面区域为三角形，
则 C(2，0)在直线 $x-y+2m=0$ 的下方，
即 $2+2m>0$，
则 $m>-1$，
则 C(2，0)，F(0，1)，

由 $\begin{cases}x-y+2m=0\\x+y-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1-m\\y=1+m\end{cases}$，即 $A(1-m，1+m)$，

由 $\begin{cases}x-y+2m=0\\x+2y-2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{2-4m}{3}\\y=\dfrac{2+2m}{3}\end{cases}$，即 $B(\dfrac{2-4m}{3}，\dfrac{2+2m}{3})$．

$|AF|=1+m-1=m$，

则三角形 ABC 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times m\times 2+\dfrac{1}{2}\times m\times(-\dfrac{2-4m}{3})=\dfrac{4}{3}$，

即 $m^2+m-2=0$，
解得 $m=1$ 或 $m=-2$(舍)，
答案：B

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.把答案填写在答题卡相应位置上.

11.复数(1+2i)i 的实部为_____.
解析：$(1+2i)i=i+2i^2=-2+i$，所以此复数的实部为-2；
故答案为：-2.

12.若点 P(1，2)在以坐标原点为圆心的圆上，则该圆在点 P 处的切线方程为_____.

解析：由题意可得 OP 和切线垂直，故切线的斜率为 $-\dfrac{1}{K_{OP}}=\dfrac{-1}{\dfrac{2-0}{1-0}}=-\dfrac{1}{2}$，

故切线的方程为 $y-2=-\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $x+2y-5=0$，

故答案为：$x+2y-5=0$.

13.设△ABC的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且a=2，cosC=$-\frac{1}{4}$，3sinA=2sinB，则c=_____.

解析：∵3sinA=2sinB，

∴由正弦定理可得：3a=2b，

∵a=2，

∴可解得b=3，

又∵cosC=$-\frac{1}{4}$，

∴由余弦定理可得：$c^2=a^2+b^2-2abcosC=4+9-2\times 2\times 3\times\left(-\frac{1}{4}\right)=16$，

∴解得：c=4.

故答案为：4.

14.设a，b＞0，a+b=5，则$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$的最大值为_____.

解析：利用柯西不等式，即可求出$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$的最大值.

答案：由题意，$(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3})^2\leqslant(1+1)(a+1+b+3)=18$，

∴$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+3}$的最大值为$3\sqrt{2}$

15.在区间[0，5]上随机地选择一个数p，则方程$x^2+2px+3p-2=0$有两个负根的概率为_____.

解析:由一元二次方程根的分布可得p的不等式组，解不等式组，由长度之比可得所求概率.

答案：方程$x^2+2px+3p-2=0$有两个负根等价于$\begin{cases}\triangle=4p^2-4(3p-2)\geqslant 0\\ x_1+x_2=-2p\leqslant 0\\ x_1x_2=3p-2\geqslant 0\end{cases}$，

解关于p的不等式组可得$\frac{2}{3}\leqslant p\leqslant 1$或$p\geqslant 2$，

∴所求概率$P=\frac{1-\frac{2}{3}+5-2}{5-0}=\frac{2}{3}$

三、解答题：本大题共6小题，共75分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=2$，前3项和$S_3=\frac{9}{2}$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设等比数列$\{b_n\}$满足$b_1=a_1$，$b_4=a_{15}$，求$\{b_n\}$前n项和T_n.

解析：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则由已知条件列式求得首项和公差，代入等差数列的通项公式得答案;

(2)求出 $b_1=1$，$b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$，再求出等比数列的公比，由等比数列的前 n 项和公式求得{b_n}前 n 项和 T_n.

答案：(1)设等差数列{a_n}的公差为 d，则由已知条件得：

$\begin{cases} a_1+2d=2 \\ 3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=\frac{9}{2} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1=1 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases}$.

代入等差数列的通项公式得：$a_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$；

(2)由(1)得，$b_1=1$，$b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$.

设{b_n}的公比为 q，则 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$，从而 q=2，

故{b_n}的前 n 项和 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

17.随着我国经济的发展，居民的储蓄存款逐年增长.设某地区城乡居民人民币储蓄存款(年底余额)如下表：

年份	2010	2011	2012	2013	2014
时间代号 t	1	2	3	4	5
储蓄存款 y(千亿元)	5	6	7	8	10

(1)求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$.

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2} \\ a=\overline{y}-b\overline{t} \end{cases}$$

.

(2)用所求回归方程预测该地区 2015 年(t=6)的人民币储蓄存款.

解析：(1)利用公式求出 a，b，即可求 y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$.

(2)t=6，代入回归方程，即可预测该地区 2015 年的人民币储蓄存款.

答案：(1)

i	t_i	y_i	t_i^2	t_iy_i
1	1	5	1	5
2	2	6	4	12
3	3	7	9	21
4	4	8	16	32
5	5	10	25	52
Σ	15	36	55	120

由题意，$\overline{t}=3$，$\overline{y}=7.2$，

$\sum\limits_{i=1}^{5}t_i^2-5\overline{t}^2=55-5\times3^2=10$，$\sum\limits_{i=1}^{5}t_iy_i-5\overline{t}\,\overline{y}=120-5\times3\times7.2=12$，

∴$\hat{b}=1.2$，$\hat{a}=7.2-1.2\times3=3.6$，

∴y 关于 t 的回归方程 $\hat{y}=1.2t+3.6$.

(2)t=6 时，$\hat{y}=1.2\times6+3.6=10.8$(千亿元).

18.已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\sqrt{3}\cos^2x$.

(1)求 f(x)的最小周期和最小值；

(2)将函数 f(x)的图象上每一点的横坐标伸长到原来的两倍，纵坐标不变，得到函数 g(x)的图象.当 $x\in[\frac{\pi}{2},\ \pi]$时，求 g(x)的值域.

解析：(1)由三角函数中的恒等变换应用化简函数解析式可得 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而可求最小周期和最小值；

(2)由函数 $y=A\sin(\omega x+\phi)$的图象变换可得 $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，由 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时，可得 $x-\frac{\pi}{3}$的范围，即可求得 g(x)的值域.

答案：(1)∵$f(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\sqrt{3}\cos^2x=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos2x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴f(x)的最小周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最小值为：$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

(2)由条件可知：$g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

当 $x\in[\frac{\pi}{2}，\pi]$时，有 $x-\frac{\pi}{3}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$，从而 $\sin(x-\frac{\pi}{3})$的值域为$[\frac{1}{2},1]$，那么 $\sin(x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$的值域为：$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$，

故 $g(x)$在区间$[\frac{\pi}{2}，\pi]$上的值域是$[\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}]$.

19.已知函数 $f(x)=ax^3+x^2(a\in R)$在 $x=-\frac{4}{3}$处取得极值.

(1)确定 a 的值；

(2)若 $g(x)=f(x)e^x$，讨论 $g(x)$的单调性.

解析：(1)求导数，利用 $f(x)=ax^3+x^2(a\in R)$在 $x=-\frac{4}{3}$处取得极值，可得 $f'(-\frac{4}{3})=0$，即可确定 a 的值；

(2)由(1)得 $g(x)=(\frac{1}{2}x^3+x^2)e^x$，利用导数的正负可得 $g(x)$的单调性.

答案：(1)对 $f(x)$求导得 $f'(x)=3ax^2+2x$.

$\because f(x)=ax^3+x^2(a\in R)$在 $x=-\frac{4}{3}$处取得极值，

$\therefore f'(-\frac{4}{3})=0$，

$\therefore 3a\cdot\frac{16}{9}+2\cdot(-\frac{4}{3})=0$，

$\therefore a=\frac{1}{2}$;

(2)由(1)得 $g(x)=(\frac{1}{2}x^3+x^2)e^x$，

$\therefore g'(x)=(\frac{3}{2}x^2+2x)e^x+(\frac{1}{2}x^3+x^2)e^x=\frac{1}{2}x(x+1)(x+4)e^x$，

令 $g'(x)=0$，解得 $x=0$，$x=-1$ 或 $x=-4$，

当 $x<-4$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$为减函数；

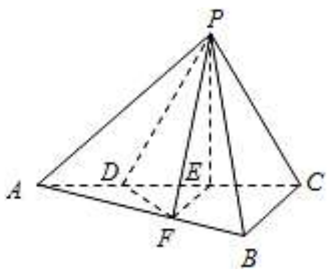
当$-4<x<-1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$为增函数；

当$-1<x<0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$为减函数；

当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$，故 $g(x)$为增函数；

综上知 $g(x)$在$(-\infty，-4)$和$(-1，0)$内为减函数，在$(-4，-1)$和$(0，+\infty)$内为增函数.

20.如题图，三棱锥 P-ABC 中，平面 PAC⊥平面 ABC，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，点 D、E 在线段 AC 上，且 AD=DE=EC=2，PD=PC=4，点 F 在线段 AB 上，且 EF∥BC.



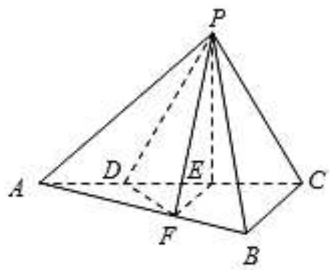
(1)证明：AB⊥平面 PFE.

(2)若四棱锥 P-DFBC 的体积为 7，求线段 BC 的长.

解析：(1)由等腰三角形的性质可证 PE⊥AC，可证 PE⊥AB.又 EF∥BC，可证 AB⊥EF，从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，可证 AB⊥平面 PEF.

(2)设 BC=x，可求 AB，$S_{\triangle ABC}$，由 EF∥BC 可得△AFE≌△ABC，求得 $S_{\triangle AFE}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$，由 $AD=\frac{1}{2}AE$，可求 $S_{\triangle AFD}$，从而求得四边形 DFBC 的面积，由(1)知 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高，求得 PE，由体积 $V_{P-DFBC}=\frac{1}{3}S_{DFBC}\cdot PE=7$，即可解得线段 BC 的长.

答案：(1)如图，



由 DE=EC，PD=PC 知，E 为等腰△PDC 中 DC 边的中点，故 PE⊥AC，

又平面 PAC⊥平面 ABC，平面 PAC∩平面 ABC=AC，PE⊂平面 PAC，PE⊥AC，

所以 PE⊥平面 ABC，从而 PE⊥AB.

因为 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，EF∥BC，

故 AB⊥EF，

从而 AB 与平面 PEF 内两条相交直线 PE，EF 都垂直，

所以 AB⊥平面 PEF.

(2)设 BC=x，则在直角△ABC 中，$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{36-x^2}$，

从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$，

由 EF∥BC 知 $\frac{AF}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$，得△AFE≌△ABC，

故 $\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$，即 $S_{\triangle AFE}=\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}$，

由 AD=$\frac{1}{2}$AE，$S_{\triangle AFD}=\frac{1}{2}S_{\triangle AFE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}$，

从而四边形 DFBC 的面积为：$S_{DFBC}=S_{\triangle ABC}-S_{AFD}=\frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}-\frac{1}{9}x\sqrt{36-x^2}=\frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}$.

由(1)知，PE⊥平面 ABC，所以 PE 为四棱锥 P-DFBC 的高.

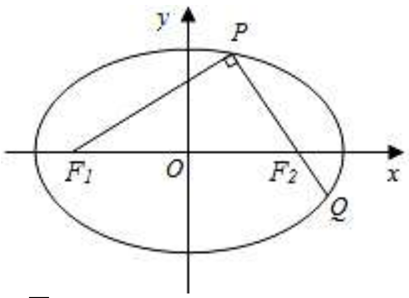
在直角△PEC 中，$PE=\sqrt{PC^2-EC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

故体积 $V_{P-DFBC}=\frac{1}{3}\cdot S_{DFBC}\cdot PE=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{18}x\sqrt{36-x^2}\cdot 2\sqrt{3}=7$，

故得 $x^4-36x^2+243=0$，解得 $x^2=9$ 或 $x^2=27$，由于 $x>0$，可得 $x=3$ 或 $x=3\sqrt{3}$.

所以：BC=3 或 BC=$3\sqrt{3}$.

21.如题图，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1，F_2，且过 F_2 的直线交椭圆于 P，Q 两点，且 $PQ\perp PF_1$.



(1)若$|PF_1|=2+\sqrt{2}$，$|PF_2|=2-\sqrt{2}$，求椭圆的标准方程.

(2)若$|PQ|=\lambda|PF_1|$，且$\frac{3}{4}\leqslant\lambda<\frac{4}{3}$，试确定椭圆离心率 e 的取值范围.

解析：(1)由椭圆的定义可得：$2a=|PF_1|+|PF_2|$，解得 a.设椭圆的半焦距为 c，由于 $PQ\perp PF_1$，利用勾股定理可得 $2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}$，解得 c.利用 $b^2=a^2-c^2$.即可得出椭圆的标准方程.

(2)如图所示，由 $PQ\perp PF_1$，$|PQ|=\lambda|PF_1|$，可得$|QF_1|=\sqrt{1+\lambda^2}|PF_1|$，由椭圆的定义可得：$|PF_1|+|PQ|+|QF_1|=4a$，解得$|PF_1|=\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$.$|PF_2|=2a-|PF_1|$，由勾股定理可得：$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}$，代入化简.令 $t=1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，则上式化为 $e^2=8\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$，解出即可.

答案：(1)由椭圆的定义可得：$2a=|PF_1|+|PF_2|=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$，解得 a=2.

设椭圆的半焦距为 c，∵$PQ\perp PF_1$，

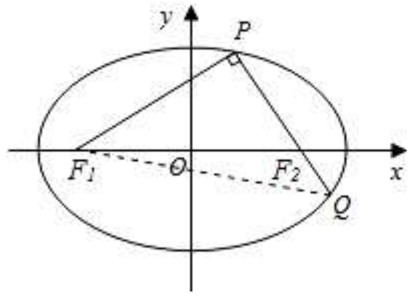
∴$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}=\sqrt{(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，

∴$c=\sqrt{3}$.

∴$b^2=a^2-c^2=1$.

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)如图所示，由 $PQ\perp PF_1$，$|PQ|=\lambda|PF_1|$，



∴$|QF_1|=\sqrt{|PF_1|^2+|PQ|^2}=\sqrt{1+\lambda^2}|PF_1|$，

由椭圆的定义可得：$2a=|PF_1|+|PF_2|=|QF_1|+|QF_2|$，

∴$|PF_1|+|PQ|+|QF_1|=4a$，

∴$(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|PF_1|=4a$，解得$|PF_1|=\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$.

$|PF_2|=2a-|PF_1|=\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}$，

由勾股定理可得：$2c=|F_1F_2|=\sqrt{|PF_1|^2+|PF_2|^2}$，

∴$\left(\frac{4a}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right)^2+\left[\frac{2a(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)}{1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}}\right]^2=4c^2$，

∴$\frac{4}{(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2}+\frac{(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}-1)^2}{(1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})^2}=e^2$.

令 $t=1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，则上式化为$e^2=\frac{4+(t-2)^2}{t^2}=8\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}$，

∵$t=1+\lambda+\sqrt{1+\lambda^2}$，且$\frac{3}{4}\leqslant\lambda<\frac{4}{3}$,

∴t 关于 λ 单调递增，∴$3\leqslant t<4$. ∴$\frac{1}{4}<\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{3}$，

∴$\frac{1}{2}<e^2\leqslant\frac{5}{9}$，解得$\frac{\sqrt{2}}{2}<e\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}$.

∴椭圆离心率的取值范围是$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}]$.