# 2015年甘肃省兰州市中考真题数学（a卷）

## 一、选择题(共15小题，每小题4分，满分60分)

1.(4分)下列函数解析式中，一定为二次函数的是(　　)

A. $y=3x-1$

B. $y=ax^2+bx+c$

C. $s=2t^2-2t+1$

D. $y=x^2+\frac{1}{x}$

解析：A、$y=3x-1$是一次函数，故A错误；

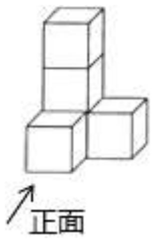
B、$y=ax^2+bx+c$　($a\neq0$)是二次函数，故B错误；

C、$s=2t^2-2t+1$是二次函数，故C正确；

D、$y=x^2+\frac{1}{x}$不是二次函数，故D错误.

答案：C.

2.(4分)由五个同样大小的立方体组成如图的几何体，则关于此几何体三种视图叙述正确的是(　　)




A. 左视图与俯视图相同

B. 左视图与主视图相同

C. 主视图与俯视图相同

D. 三种视图都相同

解析：如图所示几何体的左视图与主视图都是两列，每列正方形的个数从左往右都是3，1，左视图与主视图相同；俯视图是两列，每列正方形的个数从左往右都是2，1.

答案：B.

3.(4分)在下列二次函数中，其图象对称轴为$x=-2$的是(　　)

A. $y=(x+2)^2$

B. $y=2x^2-2$

C. $y=-2x^2-2$

D. $y=2(x-2)^2$

解析：$y=(x+2)^2$的对称轴为$x=-2$，A正确；

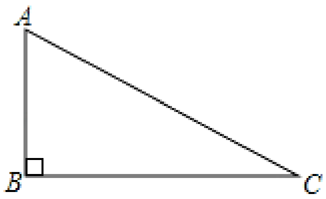
$y=2x^2-2$的对称轴为$x=0$，B错误；

$y=-2x^2-2$的对称轴为$x=0$，C错误；

$y=2(x-2)^2$的对称轴为$x=2$，D错误.

答案：A.

4.(4分)如图，△ABC中，∠B=90°，BC=2AB，则cosA=(　　)




A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

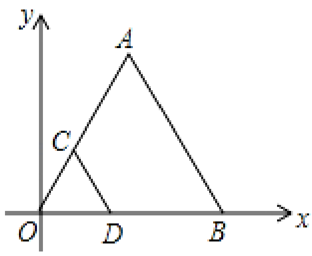
解析：∵∠B=90°，BC=2AB，

∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{AB^2+\left(2AB\right)^2}=\sqrt{5}AB$，

∴cosA=$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AB}{\sqrt{5}AB}\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

答案：D.

5.(4 分)如图，线段 CD 两个端点的坐标分别为 C(1，2)、D(2，0)，以原点为位似中心，将线段 CD 放大得到线段 AB，若点 B 坐标为(5，0)，则点 A 的坐标为(　　)



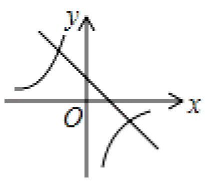

A.(2，5)
B.(2.5，5)
C.(3，5)
D.(3，6)
解析：∵以原点 O 为位似中心，在第一象限内，将线段 CD 放大得到线段 AB，
∴B 点与 D 点是对应点，则位似比为：5：2，
∵C(1，2)，
∴点 A 的坐标为：(2.5，5)
答案：B.

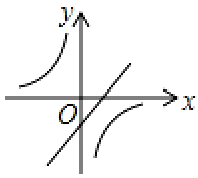
6.(4 分)一元二次方程 $x^2$-8x-1=0 配方后可变形为(　　)
A.$(x+4)^2$=17

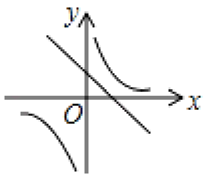
B. $(x+4)^2=15$
C. $(x-4)^2=17$
D. $(x-4)^2=15$
解析：方程变形得：$x^2-8x=1$，
配方得：$x^2-8x+16=17$，即$(x-4)^2=17$.
答案：C

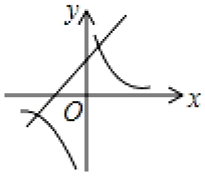
7.(4 分)下列命题错误的是(　　)
A.对角线互相垂直平分的四边形是菱形
B.平行四边形的对角线互相平分
C.矩形的对角线相等
D.对角线相等的四边形是矩形
解析：A、对角线互相垂直平分的四边形是菱形，正确；
B、平行四边形的对角线互相平分，正确；
C、矩形的对角线相等，正确；
D、对角线相等的平行四边形是矩形，故错误.
答案：D.

8.(4 分)在同一直角坐标系中，一次函数 y=kx-k 与反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}$ (k≠0)的图象大致是(　　)

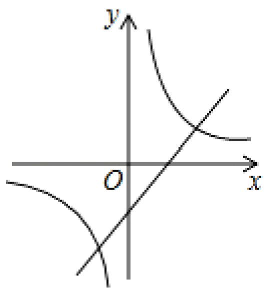
A.



B.


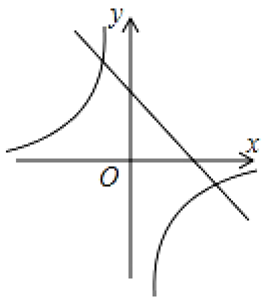

C.



D.



解析：(1)当 k＞0 时，一次函数 y=kx-k 经过一、三、四象限，反比例函数经过一、三象限，如图所示：

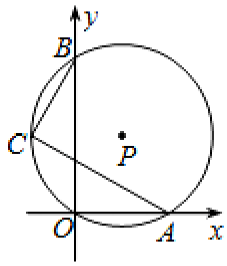



(2)当 k＜0 时，一次函数 y=kx-k 经过一、二、四象限，反比例函数经过二、四象限.如图所示：



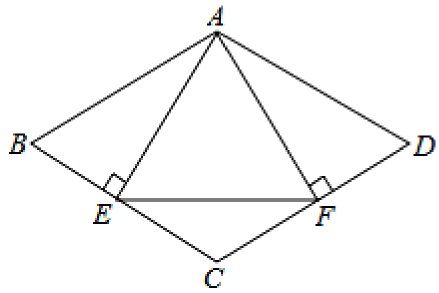

答案：A.

9.(4 分)如图，已知经过原点的⊙P 与 x、y 轴分别交于 A、B 两点，点 C 是劣弧 OB 上一点，则∠ACB=(　　)




A.80°
B.90°
C.100°
D.无法确定
解析：∵∠AOB 与∠ACB 是优弧 AB 所对的圆周角，
∴∠AOB=∠ACB，
∵∠AOB=90°，
∴∠ACB=90°.
答案：B.

10.(4 分)如图，菱形 ABCD 中，AB=4，∠B=60°，AE⊥BC，AF⊥CD，垂足分别为 E，F，连接 EF，则的△AEF 的面积是(　　)




A. $4\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $\sqrt{3}$

解析：∵四边形 ABCD 是菱形，

∴BC=CD，∠B=∠D=60°，

∵AE⊥BC，AF⊥CD，

∴BC×AE=CD×AF，∠BAE=∠DAF=30°，

∴AE=AF，

∵∠B=60°，

∴∠BAD=120°，

∴∠EAF=120°-30°-30°=60°，

∴△AEF 是等边三角形，

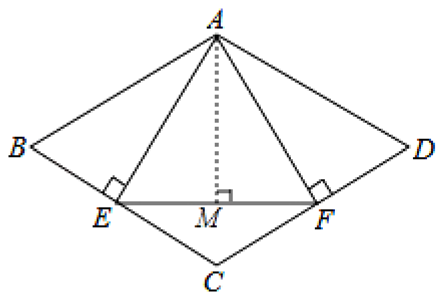
∴AE=EF，∠AEF=60°，

∵AB=4，

∴AE=$2\sqrt{3}$，

∴EF=AE=$2\sqrt{3}$，

过 A 作 AM⊥EF，




∴AM=AE·sin60°=3，

∴△AEF 的面积是：$\frac{1}{2}$EF·AM=$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 3=3\sqrt{3}$.

答案：B.

11.(4 分)股票每天的涨、跌幅均不能超过 10%，即当涨了原价的 10%后，便不能再涨，叫做涨停；当跌了原价的 10%后，便不能再跌，叫做跌停.已知一只股票某天跌停，之后两天时间又涨回到原价.若这两天此股票股价的平均增长率为 x，则 x 满足的方程是(　　)

A. $(1+x)^2=\frac{11}{10}$

B. $(1+x)^2=\frac{10}{9}$

C. $1+2x=\frac{11}{10}$

D. $1+2x=\frac{10}{9}$

解析：设平均每天涨 x.

则 $90\%(1+x)^2=1$，

即 $(1+x)^2=\frac{10}{9}$.

答案：B.

12.(4 分)若点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k＞0)的图象上，且 $x_1=-x_2$，则(　　)

A. $y_1<y_2$

B. $y_1=y_2$

C. $y_1>y_2$

D. $y_1=-y_2$

解析：∵点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k＞0)的图象上，

∴$y_1=\frac{k}{x_1}$，$y_2=\frac{k}{x_2}$，

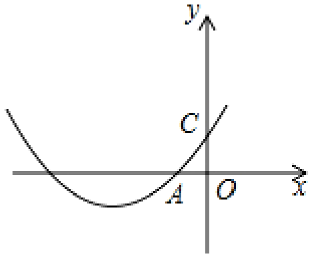
∵$x_1=-x_2$，

∴$y_1=\frac{k}{x_1}=-\frac{k}{x_2}$

∴$y_1=-y_2$.

答案：D.

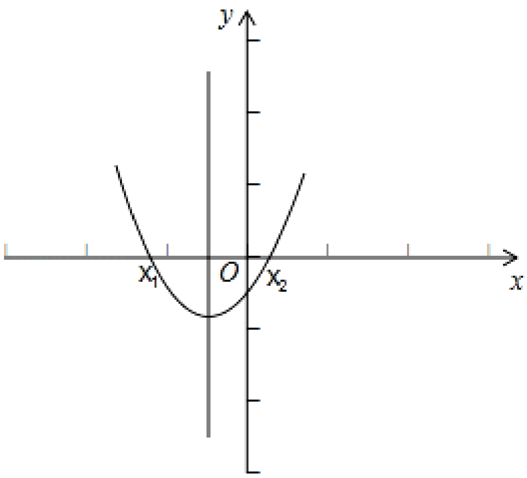
13.(4 分)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图，点 C 在 y 轴的正半轴上，且 OA=OC，则(　　)




A. ac+1=b

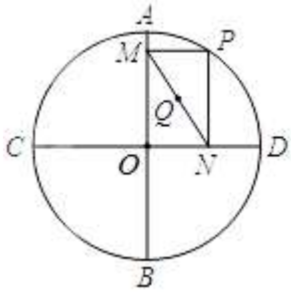
B. ab+1=c
C. bc+1=a
D. 以上都不是
解析：当 x=0 时，$y=ax^2+bx+c=c$，则 C(0，c)(c＞0)，
∵OA=OC，
∴A(-c，0)，
∴$a\cdot(-c)^2+b\cdot(-c)+c=0$，
∴ac-b+1=0，
即 ac+1=b.
答案：A.

14.(4 分)二次函数 $y=x^2+x+c$ 的图象与 x 轴的两个交点 A($x_1$，0)，B($x_2$，0)，且 $x_1<x_2$，点 P(m，n)是图象上一点，那么下列判断正确的是(　　)
A. 当 n＜0 时，m＜0
B. 当 n＞0 时，$m>x_2$
C. 当 n＜0 时，$x_1<m<x_2$
D. 当 n＞0 时，$m<x_1$
解析：∵a=1＞0，
∴开口向上，
∵抛物线的对称轴为：$x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{2\times1}=-\dfrac{1}{2}$，
二次函数 $y=x^2+x+c$ 的图象与 x 轴的两个交点 A($x_1$，0)，B($x_2$，0)，且 $x_1<x_2$，
无法确定 $x_1$ 与 $x_2$ 的正负情况，
∴当 n＜0 时，$x_1<m<x_2$，但 m 的正负无法确定，故 A 错误，C 正确；
当 n＞0 时，$m<x_1$ 或 $m>x_2$，故 B，D 错误.




答案：C.

15.(4 分)如图，⊙O 的半径为 2，AB、CD 是互相垂直的两条直径，点 P 是⊙O 上任意一点(P 与 A、B、C、D 不重合)，经过 P 作 PM⊥AB 于点 M，PN⊥CD 于点 N，点 Q 是 MN 的中点，当点 P 沿着圆周转过 45° 时，点 Q 走过的路径长为(　　)




A. $\dfrac{\pi}{4}$

B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. $\dfrac{\pi}{6}$

D. $\dfrac{\pi}{3}$

解析：∵PM⊥y 轴于点 M，PN⊥x 轴于点 N，

∴四边形 ONPM 是矩形，

又∵点 Q 为 MN 的中点，

∴点 Q 为 OP 的中点，

则 OQ=1，

点 Q 走过的路径长=$\dfrac{45\pi\times 1}{180}=\dfrac{\pi}{4}$.

答案：A.

**二、填空题(共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分)**

16.(4 分)若一元二次方程 $ax^2-bx-2015=0$ 有一根为 x=-1，则 a+b=_____.

解析：把 x=-1 代入一元二次方程 $ax^2-bx-2015=0$ 得：a+b-2015=0，

即 a+b=2015.

答案：2015.

17.(4 分)如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$ (b+d+f≠0)，且 a+c+e=3(b+d+f)，那么 k=_____.

解析：由等比性质，得 $k=\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=3$.

答案：3.

18.(4 分)在一个不透明的袋中装有除颜色外其余均相同的 n 个小球，其中有 5 个黑球，从袋中随机摸出一球，记下其颜色，这称为一次摸球试验，之后把它放回袋中，搅匀后，再继续摸出一球，以下是利用计算机模拟的摸球试验次数与摸出黑球次数的列表：

| 摸球试验次数 | 100 | 1000 | 5000 | 10000 | 50000 | 100000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 摸出黑球次数 | 46 | 487 | 2506 | 5008 | 24996 | 50007 |

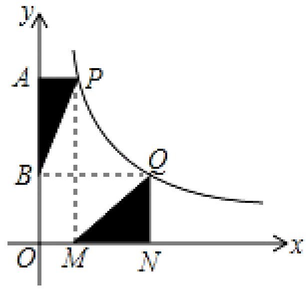
根据列表，可以估计出 n 的值是_____.
解析：∵通过大量重复试验后发现，摸到黑球的频率稳定于 0.5，

∴$\frac{5}{n}$=0.5，

解得：n=10.

答案：10.

19.(4 分)如图，点 P、Q 是反比例函数 y=$\frac{k}{x}$图象上的两点，PA⊥y 轴于点 A，QN⊥x 轴于点 N，作 PM⊥x 轴于点 M，QB⊥y 轴于点 B，连接 PB、QM，△ABP 的面积记为 $S_1$，△QMN 的面积记为 $S_2$，则 $S_1$_____$S_2$.(填“＞”或“＜”或“=”)




解析：设 p(a，b)，Q(m，n)，

则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot AB=\frac{1}{2}a(b-n)=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}an$，

$S_{\triangle QMN}=\frac{1}{2}MN\cdot QN=\frac{1}{2}(m-a)n=\frac{1}{2}mn-\frac{1}{2}$，

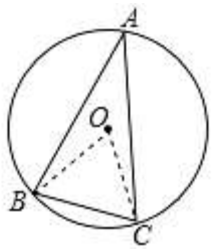
∵点 P，Q 在反比例函数的图象上，

∴ab=mn=k，

∴$S_1=S_2$.

答案：=

20.(4 分)已知△ABC 的边 BC=4cm，⊙O 是其外接圆，且半径也为 4cm，则∠A 的度数是_____.
解析：如图：连接 BO，CO，




∵△ABC 的边 BC=4cm，⊙O 是其外接圆，且半径也为 4cm，

∴△OBC 是等边三角形，

∴∠BOC=60°，

∴∠A=30°.

若点 A 在劣弧 BC 上时，∠A=150°.

∴∠A=30°或 150°.

答案：30°或 150°.

三、解答题(共 8 小题，满分 70 分)

21.(10 分)(1)计算：$2^{-1}-\sqrt{3}\tan60°+(\pi-2015)^0+|-\frac{1}{2}|$；

(2)解方程：$x^2-1=2(x+1)$.

解析：(1)原式第一项利用负整数指数幂法则计算，第二项利用特殊角的三角函数值计算，第三项利用零指数幂法则计算，最后一项利用绝对值的代数意义化简，计算即可得到结果；

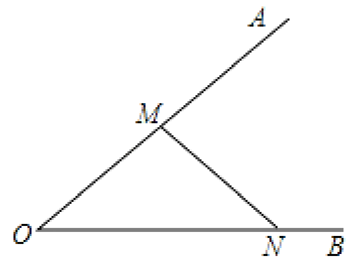
(2)方程整理后，利用因式分解法求出解即可.

答案：(1)原式$=\frac{1}{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}+1+\frac{1}{2}=-1$；

(2)方程整理得：$x^2-2x-3=0$，即$(x-3)(x+1)=0$，

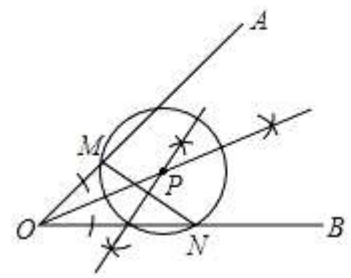
解得：$x_1=-1$，$x_2=3$.

22.(5 分)如图，在图中求作⊙P，使⊙P 满足以线段 MN 为弦且圆心 P 到∠AOB 两边的距离相等.(要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹，并把作图痕迹用黑色签字笔加黑)




解析：作∠AOB 的角平分线，作 MN 的垂直平分线，以角平分线与垂直平分线的交点为圆心，以圆心到 M 点(或 N 点)的距离为半径作圆.

答案：如图所示.




圆 P 即为所作的圆.

23.(6 分)为了参加中考体育测试，甲、乙、丙三位同学进行足球传球训练，球从一个人脚下随机传到另一个人脚下，且每位传球人传给其余两人的机会是均等的，由甲开始传球，共传球三次.

(1)请利用树状图列举出三次传球的所有可能情况；

(2)求三次传球后，球回到甲脚下的概率；

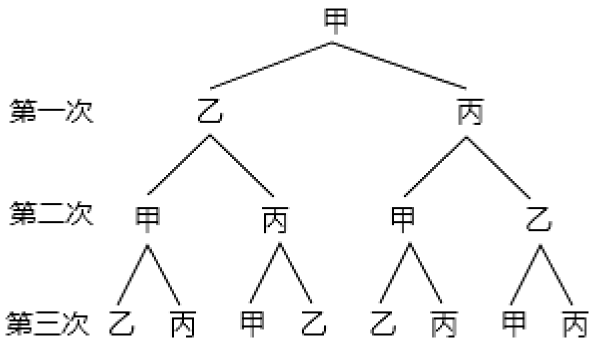
(3)三次传球后，球回到甲脚下的概率大还是传到乙脚下的概率大？

解析：(1)画出树状图，

(2)根据(1)的树形图，利用概率公式列式进行计算即可得解；

(3)分别求出球回到甲脚下的概率和传到乙脚下的概率，比较大小即可.

答案：(1)根据题意画出树状图如下：



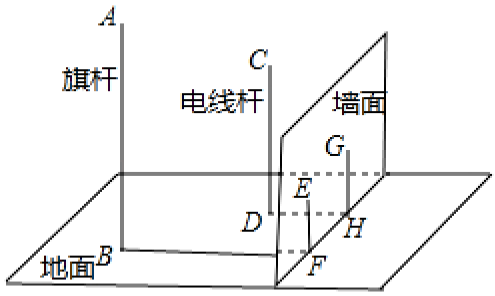

由树形图可知三次传球有 8 种等可能结果；

(2)由(1)可知三次传球后，球回到甲脚下的概率$=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$；

(3)由(1)可知球回到甲脚下的概率$=\dfrac{1}{4}$，传到乙脚下的概率$=\dfrac{3}{8}$，

所以球回到乙脚下的概率大.

24.(8 分)如图，在一面与地面垂直的围墙的同侧有一根高 10 米的旗杆 AB 和一根高度未知的电线杆 CD，它们都与地面垂直，为了测得电线杆的高度，一个小组的同学进行了如下测量：某一时刻，在太阳光照射下，旗杆落在围墙上的影子 EF 的长度为 2 米，落在地面上的影子 BF 的长为 10 米，而电线杆落在围墙上的影子 GH 的长度为 3 米，落在地面上的影子 DH 的长为 5 米，依据这些数据，该小组的同学计算出了电线杆的高度.




(1)该小组的同学在这里利用的是_____投影的有关知识进行计算的；

(2)试计算出电线杆的高度，并写出计算的过程.

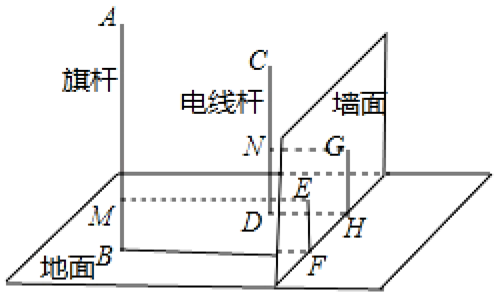
解析：(1)这是利用了平行投影的有关知识；

(2)过点 E 作 EM⊥AB 于 M，过点 G 作 GN⊥CD 于 N.利用矩形的性质和平行投影的知识可以得到比例式：$\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{CN}{NG}$，即$\dfrac{8}{10}=\dfrac{CD-3}{5}$，由此求得 CD 即电线杆的高度即可.

答案：(1)该小组的同学在这里利用的是 平行投影的有关知识进行计算的；

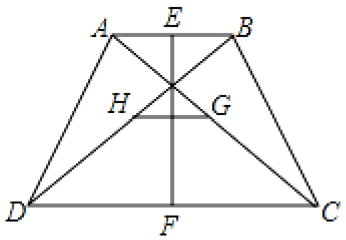
故答案是：平行；

(2)过点 E 作 EM⊥AB 于 M，过点 G 作 GN⊥CD 于 N.



则 MB=EF=2，ND=GH=3，ME=BF=10，NG=DH=5.
所以 AM=10-2=8，
由平行投影可知，$\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$，即 $\frac{8}{10}=\frac{CD-3}{5}$，
解得 CD=7，即电线杆的高度为 7 米.

25.(9 分)如图，四边形 ABCD 中，AB∥CD，AB≠CD，BD=AC.




(1)求证：AD=BC；
(2)若 E、F、G、H 分别是 AB、CD、AC、BD 的中点，求证：线段 EF 与线段 GH 互相垂直平分.
解析：(1)由平行四边形的性质易得 AC=BM=BD，∠BDC=∠M=∠ACD，由全等三角形判定定理及性质得出结论；
(2)连接 EH，HF，FG，GE，E，F，G，H 分别是 AB，CD，AC，BD 的中点，易得四边形 HFGE 为平行四边形，由平行四边形的性质及(1)结论得▱HFGE 为菱形，易得 EF 与 GH 互相垂直平分.
答案：(1)过点 B 作 BM∥AC 交 DC 的延长线于点 M，如图 1，

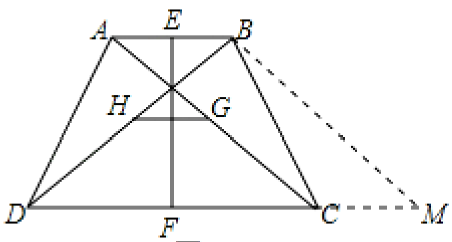


图1

∵AB∥CD
∴四边形 ABMC 为平行四边形，
∴AC=BM=BD，∠BDC=∠M=∠ACD，
在△ACD 和△BDC 中，

$$\begin{cases} AC=BD \\ \angle ACD=\angle BDC, \\ CD=DC \end{cases}$$

∴△ACD≌△BDC(SAS)，
∴AD=BC；
(2)连接 EH，HF，FG，GE，如图 2，

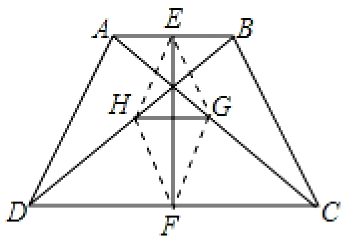



图2

∵E，F，G，H 分别是 AB，CD，AC，BD 的中点，

∴HE∥AD，且 HE=$\frac{1}{2}$AD，FG∥AD，且 FG=$\frac{1}{2}$AD，

∴四边形 HFGE 为平行四边形，

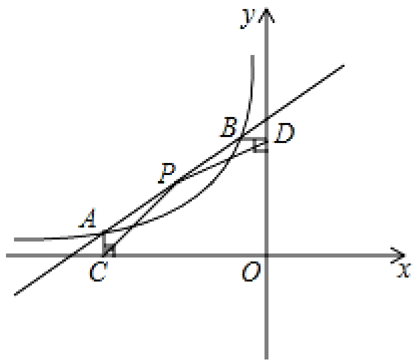
由(1)知，AD=BC，

∴HE=EG，

∴▱HFGE 为菱形，

∴EF 与 GH 互相垂直平分.

26.(10 分)如图，A(-4，$\frac{1}{2}$)，B(-1，2)是一次函数 $y_1$=ax+b 与反比例函数 $y_2$=$\frac{\pi}{x}$ 图象的两个交点，AC⊥x 轴于点 C，BD⊥y 轴于点 D.




(1)根据图象直接回答：在第二象限内，当 x 取何值时，$y_1-y_2>0$？

(2)求一次函数解析式及 m 的值；

(3)P 是线段 AB 上一点，连接 PC，PD，若△PCA 和△PDB 面积相等，求点 P 的坐标.

解析：(1)观察函数图象得到当$-4<x<-1$时，一次函数图象都在反比例函数图象上方；

(2)先利用待定系数法求一次函数解析式，然后把 B 点坐标代入 y=$\frac{\pi}{x}$ 可计算出 m 的值；

(3)设 P 点坐标为(m，$\frac{1}{2}$m+$\frac{5}{2}$)，利用三角形面积公式可得到 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(m+4)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot(2-\frac{1}{2}m-\frac{5}{2})$，解方程得到 m=$-\frac{5}{2}$，从而可确定 P 点坐标.

答案：(1)当 $y_1-y_2>0$，

即：$y_1>y_2$，

∴一次函数 $y_1$=ax+b 的图象在反比例函数 $y_2$=$\frac{\pi}{x}$ 图象的上面，

∵A(-4，$\frac{1}{2}$)，B(-1，2)

∴当-4＜x＜-1 时，$y_1$-$y_2$＞0；

(2)∵$y_2$=$\frac{\pi}{x}$图象过 B(-1，2)，

∴m=-1×2=-2，

∵$y_1$=ax+b 过 A(-4，$\frac{1}{2}$)，B(-1，2)，

∴$\begin{cases}-4a+b=\frac{1}{2}\\-a+b=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=\frac{5}{2}\end{cases}$，

∴一次函数解析式为；y=$\frac{1}{2}$x+$\frac{5}{2}$，

(3)设 P(m，$\frac{1}{2}$m+$\frac{5}{2}$)，过 P 作 PM⊥x 轴于 M，PN⊥y 轴于 N，

∴PM=$\frac{1}{2}$m+$\frac{5}{2}$，PN=-m，

∵△PCA 和△PDB 面积相等，

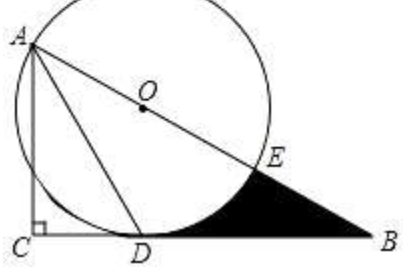
∴$\frac{1}{2}AC \bullet CM=\frac{1}{2}BD \bullet DN$，

即；$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(m+4\right)=\frac{1}{2}\times1\times\left(2-\frac{1}{2}m-\frac{5}{2}\right)$，

解得 m=-$\frac{5}{2}$，

∴P(-$\frac{5}{2}$，$\frac{5}{4}$).

27.(10 分)如图，在 Rt△ABC 中，∠C=90°，∠BAC 的角平分线 AD 交 BC 边于 D.以 AB 上某一点 O 为圆心作⊙O，使⊙O 经过点 A 和点 D.




(1)判断直线 BC 与⊙O 的位置关系，并说明理由；

(2)若 AC=3，∠B=30°.

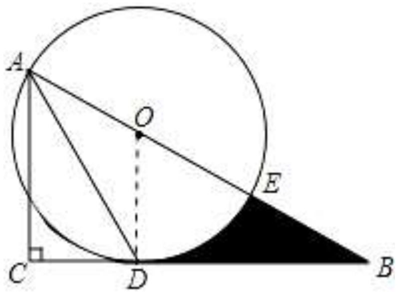
①求⊙O 的半径；

②设⊙O 与 AB 边的另一个交点为 E，求线段 BD、BE 与劣弧 DE 所围成的阴影部分的图形面积.(结果保留根号和 π)

解析：(1)连接OD，根据平行线判定推出OD∥AC，推出OD⊥BC，根据切线的判定推出即可；(2)①根据含有30°角的直角三角形的性质得出OB=2OD=2r，AB=2AC=3r，从而求得半径r的值；②根据$S_{阴影}=S_{\triangle BOD}-S_{扇形DOE}$求得即可.

答案：(1)直线BC与⊙O相切；

连结OD，




∵OA=OD，

∴∠OAD=∠ODA，

∵∠BAC的角平分线AD交BC边于D，

∴∠CAD=∠OAD，

∴∠CAD=∠ODA，

∴OD∥AC，

∴∠ODB=∠C=90°，

即OD⊥BC.

又∵直线BC过半径OD的外端，

∴直线BC与⊙O相切.

(2)设OA=OD=r，在Rt△BDO中，∠B=30°，

∴OB=2r，

在Rt△ACB中，∠B=30°，

∴AB=2AC=6，

∴3r=6，解得r=2.

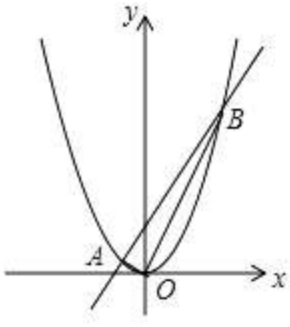
(3)在Rt△ACB中，∠B=30°，

∴∠BOD=60°.

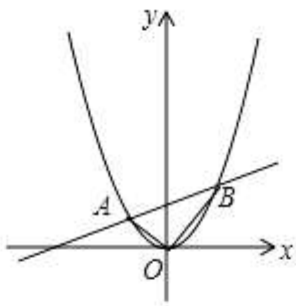
∴$S_{扇形ODE}=\frac{60\pi\bullet 2^2}{360}=\frac{2}{3}\pi$.

∴所求图形面积为$S_{\triangle BOD}-S_{扇形ODE}=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$.

28.(12分)已知二次函数$y=ax^2$的图象经过点(2，1).




图①




图②

(1)求二次函数 $y=ax^2$ 的解析式；

(2)一次函数 y=mx+4 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象交于点 $A(x_1、y_1)$、$B(x_2、y_2)$两点.

①当 m=$\frac{3}{2}$时(图①)，求证：△AOB 为直角三角形；

②试判断当 m≠$\frac{3}{2}$时(图②)，△AOB 的形状，并证明；

(3)根据第(2)问，说出一条你能得到的结论.(不要求证明)

解析：(1)把点(2，1)代入可求得 a 的值，可求得抛物线的解析式；

(2)①可先求得 A、B 两点的坐标，过 A、B 两点作 x 轴的垂线，结合条件可证明△ACO∽△ODB，可证明∠AOB=90°，可判定△AOB 为直角三角形；②可用 m 分别表示出 A、B 两点的坐标，过 A、B 两点作 x 轴的垂线，表示出 AC、BD 的长，可证明△ACO∽△ODB，结合条件可得到∠AOB=90°，可判定△AOB 为直角三角形；

(3)结合(2)的过程可得到△AOB 恒为直角三角形等结论.

答案：(1)解：∵$y=ax^2$过点(2，1)，

∴1=4a，解得 a=$\frac{1}{4}$，

∴抛物线解析式为 y=$\frac{1}{4}x^2$；

(2)①证明：

当 m=$\frac{3}{2}$时，联立直线和抛物线解析式可得$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+4 \\ y=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$或$\begin{cases} x=8 \\ y=16 \end{cases}$，

∴A(-2，1)，B(8，16)，

分别过 A、B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，垂足分别为 C、D，如图 1，

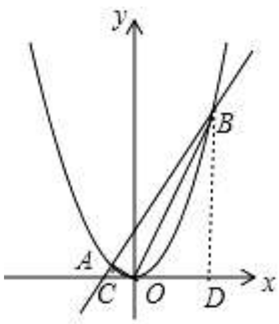



图1

∴AC=1，OC=2，OD=8，BD=16，

∴$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{OD}{BD}=\dfrac{1}{2}$，且∠ACO=∠ODB，

∴△ACO∽△ODB，

∴∠AOC=∠OBD，

又∵∠OBD+∠BOD=90°，

∴∠AOC+∠BOD=90°，即∠AOB=90°，

∴△AOB 为直角三角形；

②解：△AOB 为直角三角形.

证明如下：

当 m≠$\dfrac{3}{2}$时，联立直线和抛物线解析式可得$\begin{cases} y=mx+4 \\ y=\dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=2m-2\sqrt{m^2+4} \\ y=\left(m-\sqrt{m^2+4}\right)^2 \end{cases}$或

$\begin{cases} x=2m+2\sqrt{m^2+4} \\ y=\left(m+\sqrt{m^2+4}\right)^2 \end{cases}$，

∴A(2m-2$\sqrt{m^2+4}$，(m-$\sqrt{m^2+4}$)$^2$)，B(2m+2$\sqrt{m^2+4}$，(m+$\sqrt{m^2+4}$)$^2$)，

分别过 A、B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，如图 2，

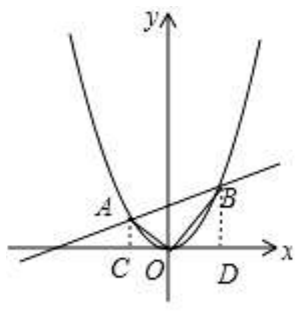



图2

∴AC=(m-$\sqrt{m^2+4}$)$^2$，OC=-(2m-2$\sqrt{m^2+4}$)，BD=(m+$\sqrt{m^2+4}$)$^2$，OD=2m+2$\sqrt{m^2+4}$，

∴$\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{OD}{BD}=\dfrac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}$，且∠ACO=∠ODB，

∴△ACO∽△OBD，

∴∠AOC=∠OBD，

又∵∠OBD+∠BOD=90°，

∴∠AOC+∠BOD=90°，即∠AOB=90°，

∴△AOB 为直角三角形；

(3)解：由(2)可知，一次函数 y=mx+4 的图象与二次函数 y=ax$^2$ 的交点为 A、B，则△AOB 恒为直角三角形.(答案不唯一).