2007年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

本试卷分第**I**卷（选择题）和第**II**卷（非选择题）两部分．第**I**卷**1**至**2**页，第**II**卷**3**至**4**页，共**150**分．

第I卷

考生注意：

1．答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上．考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致．

2．第**I**卷每小题选出答案后，用**2B**铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号．第**II**卷用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，若在试题卷上作答，答案无效．

3．考试结束，监考员将试题卷、答题卡一并收回．

参考公式：

如果事件A，B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A，B相互独立，那么

$$P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$$

如果事件A在一次试验中发的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

球的表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R表示球的半径

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．若集合$M=\{0,1\}$，$I=\{0,1,2,3,4,5\}$，则$\complement_I M$为（　　）

A．$\{0,1\}$　　B．$\{2,3,4,5\}$　　C．$\{0,2,3,4,5\}$　　D．$\{1,2,3,4,5\}$

2．函数$y=5\tan(2x+1)$的最小正周期为（　　）

A．$\dfrac{\pi}{4}$　　B．$\dfrac{\pi}{2}$　　C．π　　D．2π

3．函数$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{x-4}$的定义域为（　　）

A．$(1,4)$　　B．$[1,4)$　　C．$(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$　　D．$(-\infty,1]\cup(4,+\infty)$

4．若$\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{4}{3}$，则$\tan(\alpha-\beta)$等于（　　）

A．-3　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．3　　D．$\frac{1}{3}$

5．设$(x^2+1)(2x+1)^9=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{11}(x+2)^{11}$，

则$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}$的值为（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

6．一袋中装有大小相同，编号分别为$1,2,3,4,5,6,7,8$的八个球，从中有放回地每次取一个球，共取 2 次，则取得两个球的编号和不小于 15 的概率为（　　）

A．$\frac{1}{32}$　　B．$\frac{1}{64}$　　C．$\frac{3}{32}$　　D．$\frac{3}{64}$

7．连接抛物线$x^2=4y$的焦点F与点$M(1,0)$所得的线段与抛物线交于点A，设点O为坐标原点，则三角形OAM的面积为（　　）

A．$-1+\sqrt{2}$　　B．$\frac{3}{2}-\sqrt{2}$　　C．$1+\sqrt{2}$　　D．$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$

8．若$0<x<\frac{\pi}{2}$，则下列命题正确的是（　　）

A．$\sin x<\frac{2}{\pi}x$　　B．$\sin x>\frac{2}{\pi}x$　　C．$\sin x<\frac{3}{\pi}x$　　D．$\sin x>\frac{3}{\pi}x$

9．四面体$ABCD$的外接球球心在CD上，且$CD=2$，$AD=\sqrt{3}$，在外接球面上两点A，B间的球面距离是（　　）

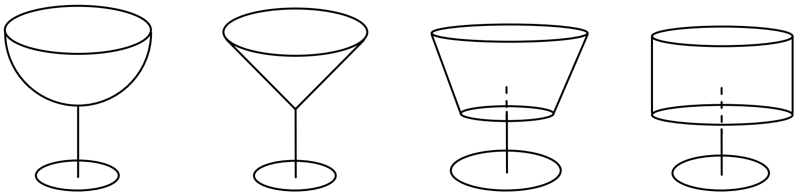
A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{2\pi}{3}$　　D．$\frac{5\pi}{6}$

10．设$p:f(x)=x^3+2x^2+mx+1$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增，$q:m\geqslant\frac{4}{3}$，则p是q的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

11．四位好朋友在一次聚会上，他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯，如图所示，盛满酒后他们约定：先各自饮杯中酒的一半．设剩余酒的高度从左到右依次为h_1，h_2，h_3，h_4，则它们的大小关系正确的是（　　）



A．$h_2>h_1>h_4$　　B．$h_1>h_2>h_3$

C．$h_3>h_2>h_4$　　D．$h_2>h_4>h_1$

12．设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\mathrm{e}=\dfrac{1}{2}$，右焦点为 $F(c,0)$，方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个实根分别为 x_1 和 x_2，则点 $P(x_1,\ x_2)$（　　）

A．必在圆 $x^2+y^2=2$ 上　　B．必在圆 $x^2+y^2=2$ 外

C．必在圆 $x^2+y^2=2$ 内　　D．以上三种情形都有可能

2007年普通高等学校招生全国统一考试（江西卷）

文科数学

第II卷

注意事项：

第II卷2页，须要黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，若在试卷题上作答，答案无效．

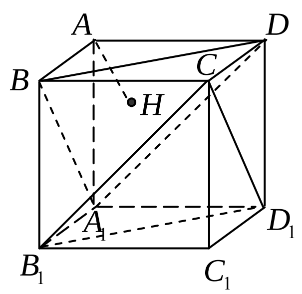
二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分．请把答案填在答题卡上．

13．在平面直角坐标系中，正方形 $OABC$ 的对角线 OB 的两端点分别为 $O(0,0)$，$B(1,1)$，则 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=$____________________．

14．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{12}=21$，则 $a_2+a_5+a_8+a_{11}=$____________________．

15．已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $y=f^{-1}(x)$，若函数 $y=f(1+x)$ 的图象经过点 $(3,1)$，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象必经过点__________________．

16．如图，正方体 AC_1 的棱长为 1，过点作平面 A_1BD 的垂线，垂足为点 H．有下列四个命题



A．点 H 是 $\triangle A_1BD$ 的垂心

B．AH 垂直平面 CB_1D_1

C．二面角 $C-B_1D_1-C_1$ 的正切值为 $\sqrt{2}$

D．点 H 到平面 $A_1B_1C_1D_1$ 的距离为 $\dfrac{3}{4}$

其中真命题的代号是________________．（写出所有真命题的代号）

三、解答题：本大题共6小题，共74分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分12分）

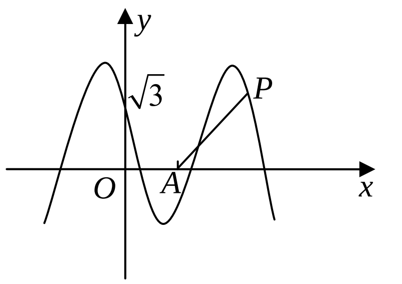
已知函数 $f(x)=\begin{cases} cx+1 & (0<x<c) \\ 2^{-\frac{x}{c^2}}+1 & (c\leqslant x<1) \end{cases}$ 满足 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$.

（1）求常数 c 的值；

（2）解不等式 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$.

18.（本小题满分 12 分）

如图，函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)(x\in\mathbf{R}，\omega>0,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$ 的图象与 y 轴相交于点 $(0,\sqrt{3})$，且该函数的最小正周期为 π.



（1）求 θ 和 ω 的值；

（2）已知点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$，点 P 是该函数图象上一点，点 $Q(x_0，y_0)$ 是 PA 的中点，当 $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$x_0\in\left[\dfrac{\pi}{2}，\pi\right]$ 时，求 x_0 的值.

19.（本小题满分 12 分）

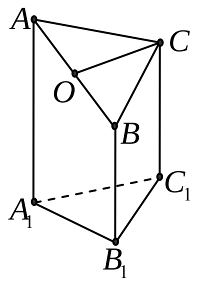
栽培甲、乙两种果树，先要培育成苗，然后再进行移栽．已知甲、乙两种果树成苗的概率分别为 0.6，0.5，移栽后成活的概率分别为 0.7，0.9.

（1）求甲、乙两种果树至少有一种果树成苗的概率；

（2）求恰好有一种果树能培育成苗且移栽成活的概率.

20.（本小题满分 12 分）

右图是一个直三棱柱（以 $A_1B_1C_1$ 为底面）被一平面所截得到的几何体，截面为 ABC．已知 $A_1B_1=B_1C_1=1$，$\angle A_1B_1C_1=90^\circ$，$AA_1=4$，$BB_1=2$，$CC_1=3$.



（1）设点 O 是 AB 的中点，证明：$OC\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$；

（2）求 AB 与平面 AA_1C_1C 所成的角的大小；

（3）求此几何体的体积.

21.（本小题满分 12 分）

设 $\{a_n\}$ 为等比数列，$a_1=1$，$a_2=3$.

（1）求最小的自然数 n，使 $a_n\geqslant 2007$；

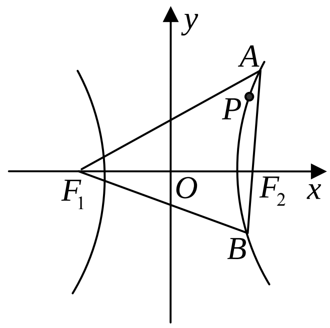
（2）求和：$T_{2n}=\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}-\cdots-\dfrac{2n}{a_{2n}}$.

22．（本小题满分 14 分）

设动点 P 到点 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 的距离分别为 d_1 和 d_2，$\angle F_1PF_2=2\theta$，且存在常数 $\lambda(0<\lambda<1)$，使得 $d_1d_2\sin^2\theta=\lambda$．

（1）证明：动点 P 的轨迹 C 为双曲线，并求出 C 的方程；

（2）如图，过点 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点．问：是否存在 λ，使 $\triangle F_1AB$ 是以点 B 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由．



2007 年普通高等学校招生全国统一考试（江西文）参考答案

一、选择题

1．B　2．B　3．A　4．D　5．A　6．D　7．B　8．B　9．C　10．C　11．A　12．C

二、填空题

13．1　14．7　15．$(1,4)$　16．A，B，C

三、解答题

17．解：（1）因为 $0<c<1$，所以 $c^2<c$；

由 $f(c^2)=\dfrac{9}{8}$，即 $c^3+1=\dfrac{9}{8}$，$c=\dfrac{1}{2}$．

（2）由（1）得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+1,\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2^{-4x}+1,\left(\dfrac{1}{2}\leqslant x<1\right)\end{cases}$

由 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$ 得，

当 $0<x<\dfrac{1}{2}$ 时，解得 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}<x<\dfrac{1}{2}$，

当 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<1$ 时，解得 $\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{5}{8}$，

所以 $f(x)>\dfrac{\sqrt{2}}{8}+1$ 的解集为 $\left\{x\left|\dfrac{\sqrt{2}}{4}<x<\dfrac{5}{8}\right.\right\}$．

18．解：（1）将 $x=0$， $y=\sqrt{3}$ 代入函数 $y=2\cos(\omega x+\theta)$ 中得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

由已知 $T=\pi$，且 $\omega>0$，得 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

（2）因为点 $A\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$， $Q(x_0,\ y_0)$ 是 PA 的中点， $y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

所以点 P 的坐标为 $\left(2x_0-\dfrac{\pi}{2},\sqrt{3}\right)$.

又因为点 P 在 $y=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的图象上，且 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_0\leqslant\pi$，所以 $\cos\left(4x_0-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\dfrac{7\pi}{6}\leqslant 4x_0-\dfrac{5\pi}{6}\leqslant\dfrac{19\pi}{6}$，从而得 $4x_0-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{11\pi}{6}$ 或 $4x_0-\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{13\pi}{6}$，

即 $x_0=\dfrac{2\pi}{3}$ 或 $x_0=\dfrac{3\pi}{4}$.

19．解：分别记甲、乙两种果树成苗为事件 A_1， A_2；分别记甲、乙两种果树苗移栽成活为事件 B_1， B_2， $P(A_1)=0.6$， $P(A_2)=0.5$， $P(B_1)=0.7$， $P(B_2)=0.9$.

（1）甲、乙两种果树至少有一种成苗的概率为

$P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A_1}\bullet\overline{A_2})=1-0.4\times0.5=0.8$；

（2）解法一：分别记两种果树培育成苗且移栽成活为事件 $A,\ B$，

则 $P(A)=P(A_1B_1)=0.42$， $P(B)=P(A_2B_2)=0.45$.

恰好有一种果树培育成苗且移栽成活的概率为

$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=0.42\times0.55+0.58\times0.45=0.492$.

解法二：恰好有一种果树栽培成活的概率为

$P(A_1B_1\overline{A_2}+A_1B_1A_2\overline{B_2}+\overline{A_1}A_2B_2+A_1A_2\overline{B_1}B_2)=0.492$.

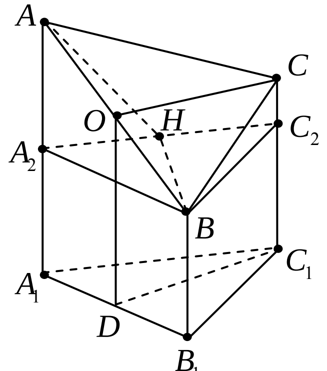
20．

解法一：

（1）证明：作 $OD\parallel AA_1$ 交 A_1B_1 于 D，连 C_1D .

则 $OD\parallel BB_1\parallel CC_1$，

因为 O 是 AB 的中点，



所以$OD=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)=3=CC_1$.

则ODC_1C是平行四边形，因此有$OC\parallel C_1D$，

$C_1D\subset$平面$C_1B_1A_1$，且$OC\not\subset$平面$C_1B_1A_1$

则$OC\parallel$面$A_1B_1C_1$.

（2）解：如图，过B作截面$BA_2C_2\parallel$面$A_1B_1C_1$，分别交AA_1，CC_1于A_2，C_2，

作$BH\perp A_2C_2$于H，

因为平面$A_2BC_2\perp$平面AA_1C_1C，则$BH\perp$面AA_1C_1C.

连结AH，则$\angle BAH$就是AB与面AA_1C_1C所成的角.

因为$BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AB=\sqrt{5}$，所以$\sin\angle BAH=\frac{BH}{AB}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

AB与面AA_1C_1C所成的角为$\angle BAH=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

（3）因为$BH=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$V_{B-AA_2C_2C}=\frac{1}{3}S_{AA_2C_2C}\bullet BH$.

$=\frac{1}{3}\bullet\frac{1}{2}(1+2)\sqrt{2}\bullet\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$.

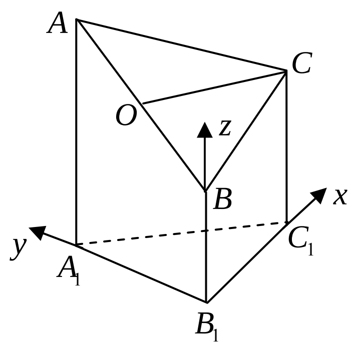
$V_{A_1B_1C_1-A_2BC_2}=S_{\triangle A_1B_1C_1}\bullet BB_1=\frac{1}{2}\bullet 2=1$.

所求几何体的体积为$V=V_{B-AA_2C_2C}+V_{A_1B_1C_1-A_2BC_2}=\frac{3}{2}$.

解法二：

（1）证明：如图，以B_1为原点建立空间直角坐标系，则$A(0,1,4)$，$B(0,0,2)$，$C(1,0,3)$，

因为O是AB的中点，所以$O\left(0,\frac{1}{2},3\right)$，



$\overrightarrow{OC}=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$，

易知，$\vec{n}=(0,0,1)$是平面$A_1B_1C_1$的一个法向量.

由$\overrightarrow{OC}\bullet\vec{n}=0$且$OC\not\subset$平面$A_1B_1C_1$知$OC\parallel$平面$A_1B_1C_1$.

（2）设 AB 与面 AA_1C_1C 所成的角为 θ．

求得 $\overrightarrow{A_1A}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(1,-1,0)$．

设 $\vec{m}=(x,\ y,\ z)$ 是平面 AA_1C_1C 的一个法向量，则由 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1A}\bullet\vec{m}=0\\ \overrightarrow{A_1C_1}\bullet\vec{m}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=0\\ x-y=0\end{cases}$，

取 $x=y=1$ 得：$\vec{m}=(1,1,0)$．

又因为 $\overrightarrow{AB}=(0,-1,-2)$

所以，$\cos<\vec{m},\ \overrightarrow{AB}>=\dfrac{\vec{m}\bullet\overrightarrow{AB}}{\left|\vec{m}\right|\bullet\left|\overrightarrow{AB}\right|}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

所以 AB 与面 AA_1C_1C 所成的角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{10}}{10}$．

（3）同解法一

21．解：（1）由已知条件得 $a_n=1\bullet\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^{n-1}=3^{n-1}$，

因为 $3^6<2007<3^7$，所以，使 $a_n\geqslant 2007$ 成立的最小自然数 $n=8$．

（2）因为 $T_{2n}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{3^2}-\dfrac{4}{3^3}+\cdots-\dfrac{2n}{3^{2n-1}}$，…………①

$\dfrac{1}{3}T_{2n}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}-\dfrac{4}{3^4}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^{2n-1}}-\dfrac{2n}{3^{2n}}$，…………②

①＋②得：$\dfrac{4}{3}T_{2n}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{3^3}+\cdots-\dfrac{1}{3^{2n-1}}-\dfrac{2n}{3^{2n}}$

$=\dfrac{1-\dfrac{1}{3^{2n}}}{1+\dfrac{1}{3}}-\dfrac{2n}{3^{2n}}$

$=\dfrac{3\bullet 3^{2n}-3-8n}{4\bullet 3^{2n}}$

所以 $T_{2n}=\dfrac{3^{2n+2}-9-24n}{16\bullet 3^{2n}}$．

22．解：（1）在 $\triangle PF_1F_2$ 中，$\left|F_1F_2\right|=2$

$4=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos 2\theta=(d_1-d_2)^2+4d_1d_2\sin^2\theta$

$(d_1-d_2)^2=4-4\lambda$

$\left|d_1-d_2\right|=2\sqrt{1-\lambda}$（小于 2 的常数）

故动点 P 的轨迹 C 是以 F_1， F_2 为焦点，实轴长 $2a=2\sqrt{1-\lambda}$ 的双曲线.

方程为 $\dfrac{x^2}{1-\lambda}-\dfrac{y^2}{\lambda}=1$.

（2）方法一：在 $\triangle AF_1B$ 中，设 $\left|AF_1\right|=d_1$， $\left|AF_2\right|=d_2$， $\left|BF_1\right|=d_3$， $\left|BF_2\right|=d_4$.

假设 $\triangle AF_1B$ 为等腰直角三角形，则

$$\begin{cases} d_1-d_2=2a\cdots① \\ d_3-d_4=2a\cdots② \\ d_3=d_4+d_2\cdots③ \\ d_1=\sqrt{2}d_3\cdots④ \\ d_3d_4\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\lambda\cdots⑤ \end{cases}$$

由②与③得 $d_2=2a$，

则 $\begin{cases} d_1=4a \\ d_3=2\sqrt{2}a \\ d_4=d_3-2a=2(\sqrt{2}-1)a \end{cases}$

由⑤得 $d_3d_4=2\lambda$，

$4\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)a^2=2\lambda$

$(8-4\sqrt{2})(1-\lambda)=2\lambda$，

$\lambda=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}\in(0,1)$

故存在 $\lambda=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}$ 满足题设条件.

方法二：（1）设 $\triangle AF_1B$ 为等腰直角三角形，依题设可得

$$\begin{cases}|AF_1|\bullet|AF_2|\bullet\sin^2\dfrac{\pi}{8}=\lambda\\|BF_1|\bullet|BF_2|\bullet\sin^2\dfrac{\pi}{4}=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|AF_1|\bullet|AF_2|=\dfrac{2\lambda}{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{2}-1},\\|BF_1|\bullet|BF_2|=2\lambda\end{cases}$$

所以$S_{\triangle AF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|AF_1|\bullet|AF_2|\sin\dfrac{\pi}{4}=(\sqrt{2}+1)\lambda$，$S_{\triangle BF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|BF_1|\bullet|BF_2|=\lambda$.

则$S_{\triangle AF_1B}=(2+\sqrt{2})\lambda$. ①

由$\dfrac{S_{\triangle AF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}=\dfrac{|AF_2|}{|BF_2|}=\sqrt{2}+1$，可设$|BF_2|=d$，

则$|AF_2|=(\sqrt{2}+1)d$，$|BF_1|=|AB|=(2+\sqrt{2})d$.

则$S_{\triangle AF_1B}=\dfrac{1}{2}|AB|^2=\dfrac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2d^2$. ②

由①②得$(2+\sqrt{2})d^2=2\lambda$. ③

根据双曲线定义$|BF_1|-|BF_2|=2a=2\sqrt{1-\lambda}$可得，$(\sqrt{2}+1)d=2\sqrt{1-\lambda}$.

平方得：$(\sqrt{2}+1)^2d^2=4(1-\lambda)$. ④

由③④消去d可解得，$\lambda=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}\in(0,1)$

故存在$\lambda=\dfrac{12-2\sqrt{2}}{17}$满足题设条件.