

2006 年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

数学试卷(理工农医类)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题纸上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号, 答在试题卷上无效。
3. 考试结束后, 监考人员将本试题卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分。在每个小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $y = \sqrt{\log_2 x - 2}$ 的定义域是
A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$ C. $(4, +\infty)$ D. $[4, +\infty)$
2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = \frac{1}{3}$, 且对任意正整数 m, n 都有 $a_{m+n} = a_m \cdot a_n$, 则
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2
3. 过平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线, 其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有
A. 4 条 B. 6 条 C. 8 条 D. 12 条
4. “ $a = 1$ ” 是 “函数 $f(x) = |x - a|$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上为增函数” 的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}| \neq 0$, 且关于 x 的方程 $x^2 + |\vec{a}|x + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 有实根, 则 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角的取值范围是
A. $[0, \frac{\pi}{6}]$ B. $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ C. $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ D. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
6. 某外商计划在 4 个候选城市投资 3 个不同的项目, 且在同一个城市投资的项目不超过 2 个, 则该外商不同的投资方案有
A. 16 种 B. 36 种 C. 42 种 D. 60 种

7. 过双曲线 $M: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左顶点 A 作斜率为 1 的直线 l , 若 l 与双曲线 M 的两条

渐近线分别相交于点 B, C , 且 $|AB| = |BC|$, 则双曲线 M 的离心率是

- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

8. 设函数 $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, 集合 $M = \{x \mid f(x) < 0\}$, $P = \{x \mid f'(x) > 0\}$, 若 $M \subset P$,

则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(0, 1)$ C. $(1, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

9. 棱长为 2 的正四面体的四个顶点都在同一个球面上, 若过该球球心的一个截面如图 1,

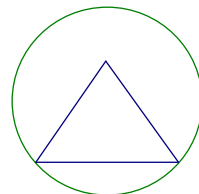


图 1

则图中三角形(正四面体的截面)的面积是

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$

10. 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的

距离为 $2\sqrt{2}$, 则直线 l 的倾斜角的取值范围是

- A. $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ D. $[0, \frac{\pi}{2}]$

注意事项:

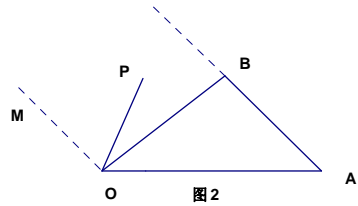
请用 0.5 毫米黑色的签字笔直接答在答题卡上。答在试题卷上无效。

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分(第 15 小题每空 2 分), 共 20 分。
把答案填在答题卡中对应题号后的横线上。

11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是 -80 , 则实数 a 的值是_____。

12. 已知 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x - y + 1 \leq 0 \\ 2x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是_____。

13. 曲线 $y = \frac{1}{x}$ 和 $y = x^2$ 在它们的交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是 _____.
14. 若 $f(x) = a \sin(x + \frac{\pi}{4}) + b \sin(x - \frac{\pi}{4})$ ($ab \neq 0$) 是偶函数, 则有序实数对 (a, b) 可以是 _____. (注: 写出你认为正确的一组数字即可)
15. 如图 2, $OM \parallel AB$, 点 P 在由射线 OM , 线段 OB 及 AB 的延长线围成的区域内 (不含边界) 运动, 且 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$, 则 x 的取值范围是 _____; 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, y 的取值范围是 _____.

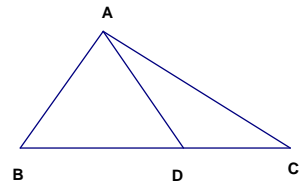


三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤。

16. (本小题满分 12 分)

如图 3, D 是直角 $\triangle ABC$ 斜边 BC 上一点, $AB = AD$, 记 $\angle CAD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

- (I) 证明: $\sin \alpha + \cos 2\beta = 0$; (II) 若 $AC = \sqrt{3}DC$, 求 β 的值.



17. (本小题满分 12 分)

某安全生产监督部门对 5 家小型煤矿进行安全检查(简称安检), 若安检不合格, 则必须整改. 若整改后经复查仍不合格, 则强制关闭. 设每家煤矿安检是否合格是相互独立的, 且每家煤矿整改前合格的概率是 0.5, 整改后安检合格的概率是 0.8, 计算(结果精确到 0.01):

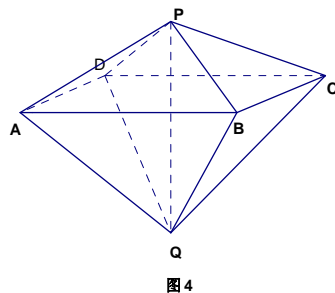
- (I) 恰好有两家煤矿必须整改的概率;
- (II) 平均有多少家煤矿必须整改;
- (III) 至少关闭一家煤矿的概率.

18. (本小题满分 14 分)

如图 4, 已知两个正四棱锥 $P-ABCD$ 与 $Q-ABCD$ 的高分别为 1 和 2, $AB = 4$

(I) 证明: $PQ \perp$ 平面 $ABCD$; (II) 求异面直线 AQ 与 PQ 所成的角;

(III) 求点 P 到平面 QAD 的距离.



19. (本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x) = x - \sin x$, 数列 $\{a_n\}$ 满足: $0 < a_1 < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$

证明 (I) $0 < a_{n+1} < a_n < 1$; (II) $a_{n+1} < \frac{1}{6}a_n^3$.

20. (本小题满分 14 分)

对 1 个单位质量的含污物体进行清洗, 清洗前其清洁度(含污物体的清洁度定义为:

$1 - \frac{\text{污物质量}}{\text{物体质量 (含污物)}}$) 为 0.8, 要求清洗完后的清洁度为 0.99. 有两种方案可供选

择, 方案甲: 一次清洗; 方案乙: 分两次清洗. 该物体初次清洗后受残留水等因素影响, 其质量变为 a ($1 \leq a \leq 3$). 设用 x 单位质量的水初次清洗后的清洁度是

$\frac{x+0.8}{x+1}$ ($x > a-1$), 用 y 单位质量的水第二次清洗后的清洁度是 $\frac{y+ac}{y+a}$,

其中 c ($0.8 < c < 0.99$) 是该物体初次清洗后的清洁度.

(I) 分别求出方案甲以及 $c = 0.95$ 时方案乙的用水量, 并比较哪一种方案用水量较少;

(II) 若采用方案乙, 当 a 为某固定值时, 如何安排初次与第二次清洗的用水量, 使总用水量最小? 并讨论 a 取不同数值时对最少总用水量多少的影响.

21. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 抛物线 $C_2: (y-m)^2 = 2px (p > 0)$, 且 C_1, C_2 的公共弦

AB 过椭圆 C_1 的右焦点 .

(I) 当 $AB \perp x$ 轴时, 求 m, p 的值, 并判断抛物线 C_2 的焦点是否在直线 AB 上;

(II) 是否存在 m, p 的值, 使抛物线 C_2 的焦点恰在直线 AB 上? 若存在, 求出符合条件的 m, p 的值; 若不存在, 请说明理由 .