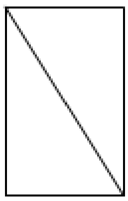
2016年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)数学文

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

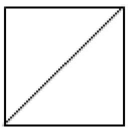
1.已知集合 A={1，2，3}，B={y|y=2x-1，x∈A}，则 A∩B=(　　)
A.{1，3}
B.{1，2}
C.{2，3}
D.{1，2，3}
解析：根据题意，集合 A={1，2，3}，而 B={y|y=2x-1，x∈A}，
则 B={1，3，5}，则 A∩B={1，3}.
答案：A.

2.甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是$\frac{1}{2}$，甲获胜的概率是$\frac{1}{3}$，则甲不输的概率为(　　)
A. $\frac{5}{6}$
B. $\frac{2}{5}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{1}{3}$
解析：∵甲不输与甲、乙两人下成和棋是互斥事件.
∴根据互斥事件的概率计算公式可知：甲不输的概率 P=$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$.
答案：A

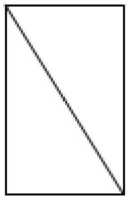
3.将一个长方体沿相邻三个面的对角线截去一个棱锥，得到的几何体的正视图与俯视图如图所示，则该几何体的侧(左)视图为(　　)

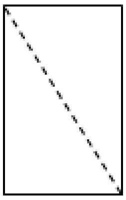


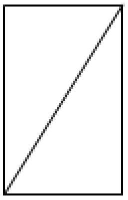
正视图

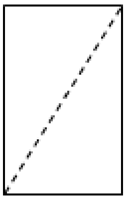


俯视图

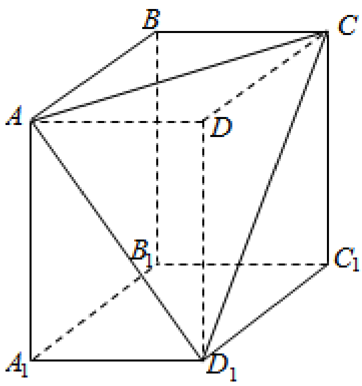
A. 

B. 

C. 

D. 

解析：由主视图和俯视图可知切去的棱锥为 $D-AD_1C$，



棱 CD_1 在左侧面的投影为 BA_1.
答案：B

4.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0,b＞0)的焦距为 $2\sqrt{5}$，且双曲线的一条渐近线与直线 2x+y=0 垂直，则双曲线的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-y^2=1$

B. $x^2-\frac{y^2}{4}$=1

C. $\frac{3x^2}{20}-\frac{3y^2}{5}$=1

D. $\frac{3x^2}{5}-\frac{3y^2}{20}$=1

解析：∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1(a＞0，b＞0)的焦距为2$\sqrt{5}$，∴c=$\sqrt{5}$，

∵双曲线的一条渐近线与直线2x+y=0垂直，∴$\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$，∴a=2b，

∵$c^2=a^2+b^2$，∴a=2，b=1，∴双曲线的方程为$x^2-\frac{y^2}{4}$=1.

答案：A.

5.设x＞0，y∈R，则“x＞y”是“x＞|y|”的（　　）
A.充要条件
B.充分不必要条件
C.必要而不充分条件
D.既不充分也不必要条件
解析：设x＞0，y∈R，当x=0，y=-1时，满足x＞y但不满足x＞|y|，故由x＞0，y∈R，则“x＞y”推不出“x＞|y|”，而“x＞|y|”⇒“x＞y”，
故“x＞y”是“x＞|y|”的必要不充分条件.
答案：C.

6.已知f(x)是定义在R上的偶函数，且在区间(-∞，0)上单调递增，若实数a满足f($2^{|a-1|}$)＞f(-$\sqrt{2}$)，则a的取值范围是(　　)

A.(-∞，$\frac{1}{2}$)

B.(-∞，$\frac{1}{2}$)∪($\frac{3}{2}$，+∞)

C.($\frac{1}{2}$，$\frac{3}{2}$)

D.($\frac{3}{2}$，+∞)
解析：∵f(x)是定义在R上的偶函数，且在区间(-∞，0)上单调递增，
∴f(x)在(0，+∞)上单调递减.

∵$2^{|a-1|}$＞0，f(-$\sqrt{2}$)=f($\sqrt{2}$)，∴$2^{|a-1|}$＜$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$.∴|a-1|＜$\frac{1}{2}$，解得$\frac{1}{2}$＜a＜$\frac{3}{2}$.

答案：C

7.已知△ABC 是边长为 1 的等边三角形，点 D、E 分别是边 AB、BC 的中点，连接 DE 并延长到点 F，使得 DE=2EF，则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为(　　)

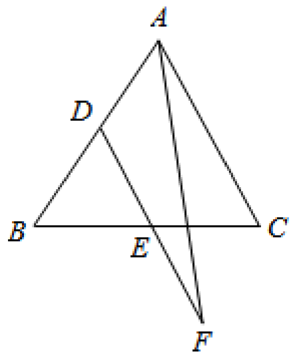
A. $-\frac{5}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{11}{8}$

解析：如图，



∵D、E 分别是边 AB、BC 的中点，且 DE=2EF，

$$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

$$=-\frac{5}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 60^\circ+\frac{3}{4}\times 1^2$$

$$=-\frac{5}{4}\times 1\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

答案：B.

8.已知函数 $f(x)=\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}$（$\omega>0$），$x\in R$，若 $f(x)$ 在区间$(\pi，2\pi)$内没有零点，则 ω 的取值范围是(　　)

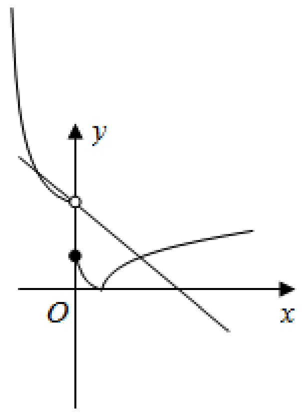
A. $(0，\frac{1}{8}]$

B.(0，$\frac{1}{4}$]∪[$\frac{5}{8}$，1)

C.(0，$\frac{5}{8}$]

D.(0，$\frac{1}{8}$]∪[$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{8}$]

解析：函数 f(x)=$\sin^2\frac{\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{1-\cos\omega x}{2}+\frac{1}{2}\sin\omega x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})$，



由 f(x)=0，可得 $\sin(\omega x-\frac{\pi}{4})=0$，解得 x=$\frac{k\pi+\frac{\pi}{4}}{\omega}\notin(\pi，2\pi)$，

∴$\omega\notin(\frac{1}{8}，\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8}，\frac{5}{4})\cup(\frac{9}{8}，\frac{9}{4})\cup\cdots=(\frac{1}{8}，\frac{1}{4})\cup(\frac{5}{8}，+\infty)$，

∵f(x)在区间(π，2π)内没有零点，∴$\omega\in(0，\frac{1}{8}]\cup[\frac{1}{4}，\frac{5}{8}]$.

答案：D

二、填空题本大题 6 小题，每题 5 分，共 30 分

9. i 是虚数单位，复数 z 满足(1+i)z=2，则 z 的实部为____________.

解析：由(1+i)z=2，得 z=$\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2(1-i)}{2}$=1-i，∴z 的实部为 1.

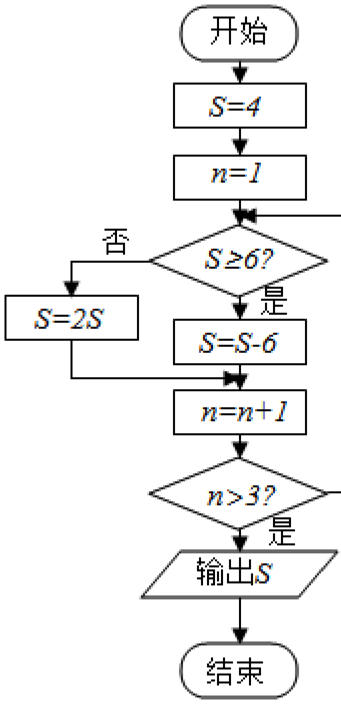
答案：1.

10. 已知函数 f(x)=(2x+1)e^x，f′(x)为 f(x)的导函数，则 f′(0)的值为____________.

解析：∵f(x)=(2x+1)e^x，∴f′(x)=2e^x+(2x+1)e^x，∴f′(0)=2e^0+(2×0+1)e^0=2+1=3.

答案：3.

11. 阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，则输出 S 的值为____________.



解析：第一次循环：S=8，n=2；

第二次循环：S=2，n=3；

第三次循环：S=4，n=4，

结束循环，输出 S=4.

答案：4.

12.已知圆C的圆心在x轴正半轴上，点(0，$\sqrt{5}$)圆C上，且圆心到直线2x-y=0的距离为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，则圆C的方程为____________.

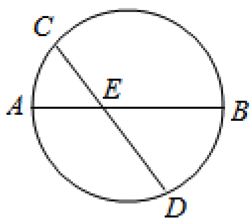
解析：由题意设圆的方程为$(x-a)^2+y^2=r^2(a>0)$，

由点M(0，$\sqrt{5}$)在圆上，且圆心到直线2x-y=0的距离为$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，

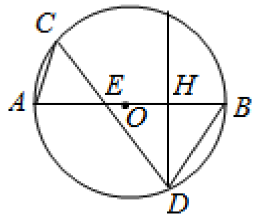
得$\begin{cases} a^2+5=r^2, \\ \dfrac{|2a|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}, \end{cases}$解得a=2，r=3. ∴圆C的方程为：$(x-2)^2+y^2=9$.

答案：$(x-2)^2+y^2=9$.

13.如图，AB是圆的直径，弦CD与AB相交于点E，BE=2AE=2，BD=ED，则线段CE的长为____________.



解析：如图，过 D 作 DH⊥AB 于 H，



∵BE=2AE=2，BD=ED，∴BH=HE=1，则 AH=2，BH=1，∴DH2=AH-BH=2，则 DH=$\sqrt{2}$，

在 Rt△DHE 中，则 DE=DH^2+HE^2=2+1=3，

由相交弦定理可得：CE·DE=AE·EB，∴CE=$\frac{AE\cdot EB}{DE}=\frac{1\times 2}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{3\sqrt{3}}{3}$

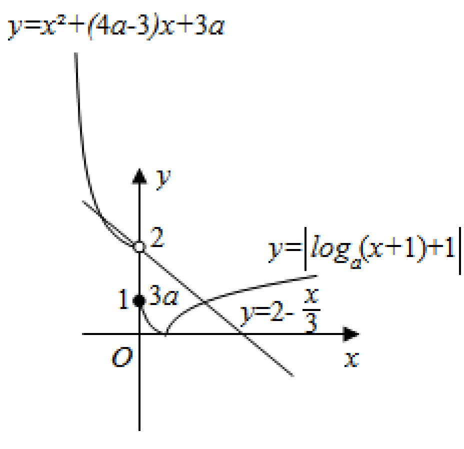
14. 已知函数$\begin{cases} f(x)=x^2+(4a-3)x+3a, & x<0, \\ \log a(x+1)+1, & x\geq 0, \end{cases}$ (a＞0，且 a≠1)在 R 上单调递减，且关于 x 的方程|f(x)|=2-$\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是____________.

解析：∵f(x)是 R 上的单调递减函数，

∴y=x^2+(4a-3)x+3a 在(-∞.，0)上单调递减，y=loga(x+1)+1 在(0，+∞)上单调递减，

且 f(x)在(-∞，0)上的最小值大于或等于 f(0).

∴$\begin{cases} \frac{3-4a}{2}\geq 0, \\ 0<a<1, \\ 3a\geq 1, \end{cases}$ 解得$\frac{1}{3}$≤a≤$\frac{3}{4}$. 作出 y=|f(x)|和 y=2-$\frac{x}{3}$的函数草图如图所示：



∵|f(x)|=2-$\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，∴3a＜2，即 a＜$\frac{2}{3}$. 综上，$\frac{1}{3}$≤a＜$\frac{2}{3}$.

答案：[$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$).

三、解答题：本大题共 6 小题，80 分

15.在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 asin2B=$\sqrt{3}$bsinA.

(1)求 B;

(2)已知 cosA=$\frac{1}{3}$，求 sinC 的值.

解析：(1)利用正弦定理将边化角即可得出 cosB;

(2)求出 sinA，利用两角和的正弦函数公式计算.

答案：(1)∵asin2B=$\sqrt{3}$bsinA，∴2sinAsinBcosB=$\sqrt{3}$sinBsinA，∴cosB=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴B=$\frac{\pi}{6}$.

(2)∵cosA=$\frac{1}{3}$，∴sinA=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

∴sinC=sin(A+B)=sinAcosB+cosAsinB=$\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$.

16. 某化工厂生产甲、乙两种混合肥料，需要 A，B，C 三种主要原料，生产 1 扯皮甲种肥料和生产 1 车皮乙种肥料所需三种原料的吨数如表所示：

原料 肥料	A	B	C
甲	4	8	3
乙	5	5	10

现有 A 种原料 200 吨，B 种原料 360 吨，C 种原料 300 吨，在此基础上生产甲、乙两种肥料.已知生产 1 车皮甲种肥料，产生的利润为 2 万元；生产 1 车品乙种肥料，产生的利润为 3 万元、分别用 x，y 表示计划生产甲、乙两种肥料的车皮数.

(1)用 x，y 列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域;

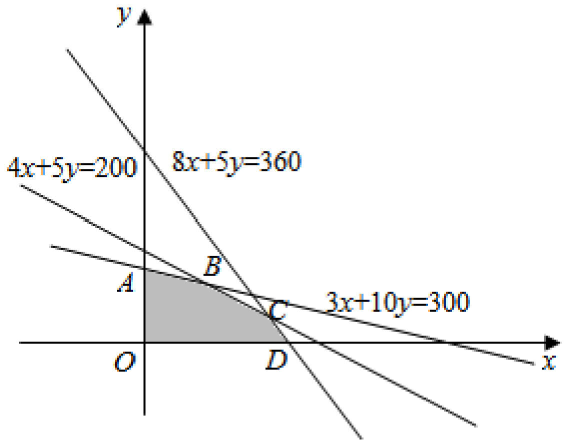
(2)问分别生产甲、乙两种肥料，求出此最大利润.

解析：(1)根据原料的吨数列出不等式组，作出平面区域;

(2)令利润 z=2x+3y，则 y=$-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$，结合可行域找出最优解的位置，列方程组解出最优解.

答案：(1)x，y 满足的条件关系式为：$\begin{cases}4x+5y\le 200,\\8x+5y\le 360,\\3x+10y\le 300,\\x\ge 0,\\y\ge 0.\end{cases}$

作出平面区域如图所示：



(2)设利润为 z 万元，则 z=2x+3y.

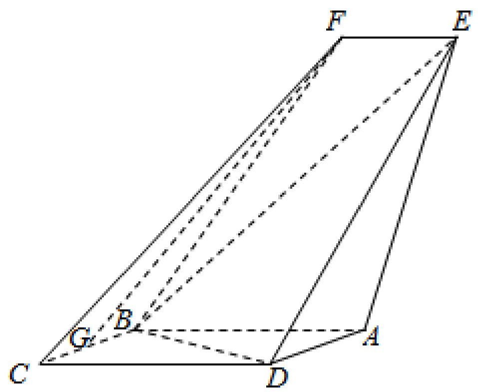
∴y=$-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$.

∴当直线 y=$-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$经过点 B 时，截距$\frac{z}{3}$最大，即 z 最大.

解方程组$\begin{cases}4x+5y=200,\\3x+10y=300\end{cases}$得 B(20，24). ∴z 的最大值为 2×20+3×24=112.

答：当生产甲种肥料 20 吨，乙种肥料 24 吨时，利润最大，最大利润为 112 万元.

17. 如图，四边形 ABCD 是平行四边形，平面 AED⊥平面 ABNCD，EF∥AB，AB=2，BC=EF=1，AE=$\sqrt{6}$，∠BAD=60°，G 为 BC 的中点.



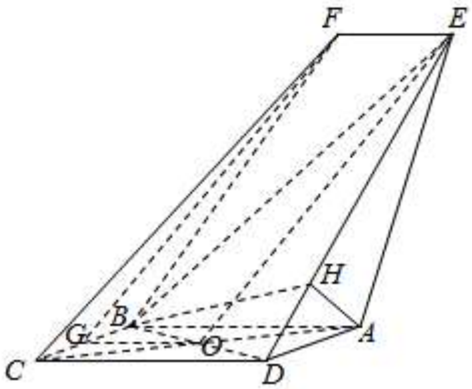
(1)求证：FG∥平面 BED；
(2)求证：平面 BED⊥平面 AED；
(3)求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值.

解析：(1)利用中位线定理，和平行公理得到四边形 OGEF 是平行四边形，再根据线面平行的判定定理即可证明；

(2)根据余弦定理求出 BD=$\sqrt{3}$，继而得到 BD⊥AD，再根据面面垂直的判定定理即可证明；

(3)先判断出直线 EF 与平面 BED 所成的角即为直线 AB 与平面 BED 所形成的角，再根据余弦定理和解直角三角形即可求出答案.

答案：(1)BD 的中点为 O，连接 OE，OG，在△BCD 中，



∵G 是 BC 的中点，∴OG∥DC，且 OG=$\frac{1}{2}$DC=1，

又∵EF∥AB，AB∥DC，∴EF∥OG，且 EF=OG，

即四边形 OGEF 是平行四边形，∴FG∥OE，

∵FG⊄平面 BED，OE⊂平面 BED，∴FG∥平面 BED；

(2)在△ABD 中，AD=1，AB=2，∠BAD=60°，

由余弦定理可得 BD=$\sqrt{3}$，仅而∠ADB=90°，即 BD⊥AD，

又∵平面 AED⊥平面 ABCD，BD⊂平面 ABCD，平面 AED∩平面 ABCD=AD，∴BD⊥平面 AED，

∵BD⊂平面 BED，∴平面 BED⊥平面 AED.

(III)∵EF∥AB，∴直线 EF 与平面 BED 所成的角即为直线 AB 与平面 BED 所形成的角，

过点 A 作 AH⊥DH 于点 H，连接 BH，

又平面 BED∩平面 AED=ED，

由(2)知 AH⊥平面 BED，∴直线 AB 与平面 BED 所成的为∠ABH，

在△ADE,AD=1,DE=3,AE=$\sqrt{6}$,由余弦定理得 cos∠ADE=$\frac{2}{3}$,∴sin∠ADE=$\frac{\sqrt{5}}{3}$,∴AH=AD$\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$,

在 Rt△AHB 中，sin∠ABH=$\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{6}$，∴直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值$\frac{\sqrt{5}}{6}$.

18.已知{a_n}是等比数列，前 n 项和为 S_n(n∈N*)，且$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，$S_6$=63.

(1)求{a_n}的通项公式；

(2)若对任意的 n∈N^*，b_n是 $\log_2 a_n$和 $\log_2 a_{n+1}$的等差中项，求数列{$(-1)^n b_n^2$}的前 2n 项和.

解析：(1)根据等比数列的通项公式列方程解出公比 q，利用求和公式解出 a_1，得出通项公式；
(2)利用对数的运算性质求出 bn，使用分项求和法和平方差公式计算.

答案：(1)设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1q}=\frac{2}{a_1q^2}$，即$1-\frac{1}{q}=\frac{2}{q^2}$，解得 q=2 或 q=-1.

若 q=-1，则 $S_6=0$，与 $S_6=63$ 矛盾，不符和题意.∴q=2，∴$S_6=\frac{a_1\left(1-2^6\right)}{1-2}=63$，∴$a_1=1$.∴$a_n=2^{n-1}$.

(2)∵b_n是 $\log_2a_n$ 和 $\log_2a_{n+1}$ 的等差中项，

∴$b_n=\frac{1}{2}(\log_2a_n+\log_2a_{n+1})=\frac{1}{2}(\log_22^{n-1}+\log_22^n)=n-\frac{1}{2}$.∴$b_{n+1}-b_n=1$.

∴$\{b_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，以 1 为公差的等差数列.

设$\{(-1)^nb_n^2\}$的前 n 项和为 T_n，则

$T_n=(-b_1^2+b_2^2)+(-b_3^2+b_4^2)+\cdots+(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2)$

$=b_1+b_2+b_3+b_4\cdots+b_{2n-1}+b_{2n}$

$=\frac{b_1+b_{2n}}{2}\cdot 2n=\frac{\frac{1}{2}+2n-\frac{1}{2}}{2}\cdot 2n$

$=2n^2$.

19.设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$(a＞$\sqrt{3}$)的右焦点为 F，右顶点为 A，已知$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，其中 O 为原点，e 为椭圆的离心率.

(1)求椭圆的方程；

(2)设过点 A 的直线 l 与椭圆交于 B(B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴交于点 H，若 BF⊥HF，且∠MOA=∠MAO，求直线 l 的斜率.

解析：(1)由题意画出图形，把|OF|、|OA|、|FA|代入$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，转化为关于 a 的方程，解方程求得 a 值，则椭圆方程可求；

(2)由已知设直线 l 的方程为 y=k(x-2)，(k≠0)，联立直线方程和椭圆方程，化为关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系求得 B 的坐标，再写出 MH 所在直线方程，求出 H 的坐标，由 BF⊥HF，得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1,-y_1)\cdot(1,-y_H)=0$，整理得到 M 的坐标与 k 的关系，由∠MOA=∠MAO，得到 x0=1，转化为关于 k 的等式求得 k 的值.

答案：(1)由$\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，得$\frac{1}{a^2-3}+\frac{1}{a}=\frac{\frac{3\cdot\sqrt{a^2-3}}{a}}{a-\sqrt{a^2-3}}$，

即$\dfrac{a+\sqrt{a^2-3}}{a\cdot\sqrt{a^2-3}}=\dfrac{3\sqrt{a^2-3}}{a\left(a-\sqrt{a^2-3}\right)}$，

∴$a[a^2-(a^2-3)]=3a(a^2-3)$，解得 a=2. ∴椭圆方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)由已知设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，($k\neq0$)，
设 $B(x_1，y_1)$，$M(x_0，k(x_0-2))$，
∵∠MOA=∠MAO，∴$x_0=1$，再设 $H(0，y_H)$，

联立$\begin{cases} y=k\left(x-2\right), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$得$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

$\triangle=(-16k^2)^2-4(3+4k^2)(16k^2-12)=144>0$.

由根与系数的关系得 $2x_1=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，

∴$x_1=\dfrac{8k^2-6}{3+4k^2}$，$y_1=k(x_1-2)=\dfrac{-12k}{3+4k^2}$，

MH 所在直线方程为 $y-k(x_0-2)=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$，

令 x=0，得 $y_H=(k+\dfrac{1}{k})x_0-2k$，

∵BF⊥HF，∴$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1，-y_1)\cdot(1，-y_H)=0$，

即 $1-x_1+y_1y_H=1-\dfrac{8k^2-6}{3+4k^2}-\dfrac{12k}{3+4k^2}[(k+\dfrac{1}{k})x_0-2k]=0$，

整理得：$x_0=\dfrac{9+20k^2}{12\left(k^2+1\right)}=1$，即 $8k^2=3$. ∴$k=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$或 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

20.设函数 $f(x)=x^3-ax-b$，$x\in R$，其中 a，$b\in R$.
(1)求 f(x)的单调区间；
(2)若 f(x)存在极值点 x_0，且 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=0$；
(3)设 a>0，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：g(x)在区间[-1，1]上的最大值不小于$\dfrac{1}{4}$.
解析：(1)求出 f(x)的导数，讨论 a≤0 时 $f'(x)\geq0$，f(x)在 R 上递增；当 a>0 时，由导数大于 0，可得增区间；导数小于 0，可得减区间；
(2)由条件判断出 a>0,且 $x_0\neq0$,由 $f'(x_0)=0$ 求出 x_0,分别代入解析式化简 $f(x_0)$,$f(-2x_0)$,化简整理后可得证；
(3)设 g(x)在区间[-1，1]上的最大值 M，根据极值点与区间的关系对 a 分三种情况讨论，运用 f(x)单调性和前两问的结论，求出 g(x)在区间上的取值范围，利用 a 的范围化简整理后

求出M，再利用不等式的性质证明结论成立.
答案：(1)若 $f(x)=x^3-ax-b$，则 $f'(x)=3x^2-a$，
分两种情况讨论：
①当 $a\leqslant 0$ 时，有 $f'(x)=3x^2-a\geqslant 0$ 恒成立，
此时 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty，+\infty)$，

②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=3x^2-a=0$，解得 $x=-\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x=\frac{\sqrt{3a}}{3}$，

当 $x>\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时，$f'(x)=3x^2-a>0$，$f(x)$ 为增函数，

当 $-\frac{\sqrt{3a}}{3}<x<\frac{\sqrt{3a}}{3}$ 时，$f'(x)=3x^2-a<0$，$f(x)$ 为减函数，

故 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty，-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$(\frac{\sqrt{3a}}{3}，+\infty)$，减区间为 $(-\frac{\sqrt{3a}}{3}，\frac{\sqrt{3a}}{3})$；
(2)若 $f(x)$ 存在极值点 x_0，则必有 $a>0$，且 $x_0\neq 0$，
由题意可得，$f'(x)=3x^2-a$，则 $x_0^2=\frac{a}{3}$，
进而 $f(x_0)=x_0^3-ax_0-b=-\frac{2a}{3}x_0-b$，
又 $f(-2x_0)=-8x_0^3+2ax_0-b=-\frac{8}{3}x_0+2ax_0-b=f(x_0)$，
由题意及(Ⅰ)可得：存在唯一的实数 x_1，满足 $f(x_1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，
则有 $x_1=-2x_0$，故有 $x_1+2x_0=0$；
(III)设 $g(x)$ 在区间 $[-1，1]$ 上的最大值 M，$\max\{x，y\}$ 表示 x、y 两个数的最大值，
下面分三种情况讨论：

①当 $a\geqslant 3$ 时，$-\frac{\sqrt{3a}}{3}\leqslant -1<1\leqslant\frac{\sqrt{3a}}{3}$，

由(I)知 $f(x)$ 在区间 $[-1，1]$ 上单调递减，
所以 $f(x)$ 在区间 $[-1，1]$ 上的取值范围是 $[f(1)，f(-1)]$，
因此 $M=\max\{|f(1)|，|f(-1)|\}=\max\{|1-a-b|，|-1+a-b|\}$

$=\max\{|a-1+b|，|a-1-b|\}=\begin{cases}a-1+b, & b\geq 0,\\ a-1-b, & b<0,\end{cases}$

所以 $M=a-1+|b|\geqslant 2$，

②当 $\frac{3}{4}\leqslant a<3$ 时，$-\frac{2\sqrt{3a}}{3}\leq -1<-\frac{\sqrt{3a}}{3}<\frac{\sqrt{3a}}{3}<1\leq\frac{2\sqrt{3a}}{3}$，

由(Ⅰ)、(Ⅱ)知，$f(-1)\geqslant f(-\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(\frac{\sqrt{3a}}{3})$，$f(1)\leqslant f(\frac{2\sqrt{3a}}{3})=f(-\frac{\sqrt{3a}}{3})$，

所以 f(x)在区间[-1，1]上的取值范围是[f($\frac{\sqrt{3a}}{3}$)，f(-$\frac{\sqrt{3a}}{3}$)]，

因此 M=max{|f($\frac{\sqrt{3a}}{3}$)|，|f(-$\frac{\sqrt{3a}}{3}$)|}=max{|-$\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b$|，|$\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b$|}

=max{|$\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+b$ |，|$\frac{2a}{9}\sqrt{3a}-b$|}=$\frac{2a}{9}\sqrt{3a}+|b|\geqslant\frac{2}{9}\times\frac{3}{4}\times\sqrt{3\times\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}$，

③当 0＜a＜$\frac{3}{4}$时，-1＜-$\frac{2\sqrt{3a}}{3}<\frac{2\sqrt{3a}}{3}$＜1，

由(Ⅰ)、(Ⅱ)知，f(-1)＜f(-$\frac{2\sqrt{3a}}{3}$)=f($\frac{\sqrt{3a}}{3}$)，f(1)＞f($\frac{2\sqrt{3a}}{3}$)=f(-$\frac{\sqrt{3a}}{3}$)，

所以 f(x)在区间[-1，1]上的取值范围是[f(-1)，f(1)]，

因此 M=max{|f(-1)|，|f(1)|}=max{|-1+a-b|，|1-a-b|}

=max{|1-a+b|，|1-a-b|}=1-a+|b|＞$\frac{1}{4}$，

综上所述，当 a＞0 时，g(x)在区间[-1，1]上的最大值不小于$\frac{1}{4}$.