

## 2018 年湖北省荆州市高考一模试卷数学文

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项正确，每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.

1. 已知集合  $A = \{x \mid \frac{x}{x-1} \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $B = \{y \mid y = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\}$ . 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\emptyset$
- B.  $(1, +\infty)$
- C.  $[1, +\infty)$
- D.  $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

解析：∵ 集合  $A = \{x \mid \frac{x}{x-1} \geq 0, x \in \mathbb{R}\} = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 1\}$ ,  $B = \{y \mid y = 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}\} = \{y \mid y \geq 1\}$ .

∴  $A \cap B = \{x \mid y > 1\} = (1, +\infty)$ .

答案：B

2. 下列函数是奇函数且在定义域内是增函数的是 ( )

- A.  $y = e^x$
- B.  $y = \tan x$
- C.  $y = x^3 - x$
- D.  $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$

解析：函数  $y = e^x$ ，不是奇函数，不满足题意；

函数  $y = \tan x$  是奇函数，但在定义域内图象是不连续的，不是增函数，不满足题意；

函数  $y = x^3 - x$  是奇函数，当  $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  时， $y' = 3x^2 - 1 < 0$  为减函数，不满足题意；

函数  $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$  是奇函数，在定义域  $(-2, 2)$  上内函数  $t = \frac{2+x}{2-x} = -1 - \frac{4}{x-2}$  为增函数，

外函数  $y = \ln t$  也为增函数，故函数  $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$  在定义域内为增函数，满足题意.

答案：D

3. 已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P(-5, -12)$ ，则  $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$  的值等于 ( )

- A.  $-\frac{5}{13}$
- B.  $-\frac{12}{13}$
- C.  $\frac{5}{13}$

D.  $\frac{12}{13}$

解析：∵角 $\alpha$ 的终边经过点 $P(-5, -12)$ ，则 $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha = -\frac{-5}{\sqrt{25+144}} = \frac{5}{13}$ .

答案：C

4. 若 $a=2^{0.5}$ ， $b=\log_{\pi}3$ ， $c=\log_2\sin\frac{2\pi}{5}$ ，则( )

- A.  $a > b > c$
- B.  $b > a > c$
- C.  $c > a > b$
- D.  $b > c > a$

解析： $0 < \sin\frac{2\pi}{5} < 1$ ，由指对函数的图象可知： $a > 1$ ， $0 < b < 1$ ， $c < 0$ .

答案：A

5. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3+a_4+a_5=3$ ， $a_8=8$ ，则 $a_{12}$ 的值是( )

- A. 15
- B. 30
- C. 31
- D. 64

解析：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$ ，∵ $a_3+a_4+a_5=3$ ， $a_8=8$ ，  
∴ $3a_4=3$ ，即 $a_1+3d=1$ ， $a_1+7d=8$ ，

联立解得 $a_1=-\frac{17}{4}$ ， $d=\frac{7}{4}$ ，则 $a_{12}=-\frac{17}{4}+\frac{7}{4}\times 11=15$ .

答案：A

6. 函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2x$ 的零点所在区间是( )

- A. (0, 1)
- B. (1, 2)
- C. (3, 4)
- D. (4, +∞)

解析：∵连续减函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2x$ ，∴ $f(3)=2-\log_23 > 0$ ， $f(4)=\frac{6}{4}-\log_24 < 0$ ，

∴函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2x$ 的零点所在的区间是(3, 4).

答案：C

7. 将函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后，所得图象关于 $y$ 轴对称，则 $\varphi$ 的最小正值是( )

- A.  $\frac{\pi}{2}$   
 B.  $\pi$   
 C.  $\frac{3\pi}{2}$   
 D.  $2\pi$

解析：函数  $y=\sin(2x+\varphi)$  的图象向右平移  $\frac{1}{4}$  个周期后，

得到：  $y=\sin[2(x-\frac{\pi}{4})+\varphi]=\sin(2x-\frac{\pi}{2}+\varphi)$ ，得到的函数的图象关于  $y$  轴对称，

则：  $\varphi-\frac{\pi}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}$  ( $k\in\mathbb{Z}$ )，解得：  $\varphi=k\pi+\pi$  ( $k\in\mathbb{Z}$ )，当  $k=0$  时，  $\varphi=\pi$ 。

答案：B

8. 若  $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$ ， $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，则  $\sin\alpha$  的值为( )

- A.  $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$   
 B.  $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$   
 C.  $\frac{7}{18}$   
 D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解析：  $\because \cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$ ， $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$ ，可得：  $\sin\alpha>0$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ，可得：  $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}+\sin\alpha$ ，

又  $\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ，可得：  $\sin^2\alpha+(\frac{\sqrt{2}}{3}+\sin\alpha)^2=1$ ，整理可得：  $2\sin^2\alpha+\frac{2\sqrt{2}}{3}\sin\alpha-\frac{7}{9}$

$=0$ ， $\therefore$ 解得：  $\sin\alpha=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$ ，或  $-\frac{4+\sqrt{2}}{6}$  (舍去)。

答案：A

9. 已知数列  $\{a_n\}$  是公差不为 0 的等差数列，且  $a_1, a_3, a_7$  为等比数列  $\{b_n\}$  的连续三项，则  $\frac{b_3+b_4}{b_4+b_5}$

的值为( )

A.  $\frac{1}{2}$

B. 4

C. 2

D.  $\sqrt{2}$

解析：数列  $\{a_n\}$  是公差  $d$  不为 0 的等差数列，且  $a_1, a_3, a_7$  为等比数列  $\{b_n\}$  的连续三项，  
 $\therefore a_3^2 = a_1 \cdot a_7$ ，可得  $(a_1+2d)^2 = a_1(a_1+6d)$ ，化为： $a_1 = 2d \neq 0$ .

$\therefore$  公比  $q = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1+2d}{a_1} = \frac{4d}{2d} = 2$ . 则  $\frac{b_3+b_4}{b_4+b_5} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ .

答案：A

10. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $\cos A = \frac{3}{4}$ ,  $\sin B = 2\sin C$ ,  
则  $\triangle ABC$  的面积是( )

A.  $\sqrt{7}$

B.  $\frac{\sqrt{7}}{4}$

C.  $\frac{16}{5}$

D.  $\frac{8}{5}$

解析： $\because a = 2\sqrt{2}$ ,  $\cos A = \frac{3}{4}$ ,  $\sin B = 2\sin C$ ,

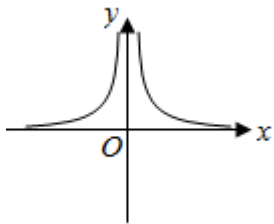
可得： $b = 2c$ .  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ,

$\therefore$  由  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$ ，可得： $8 = 4c^2 + c^2 - 3c^2$ ，解得  $c = 2$ ,  $b = 4$ .

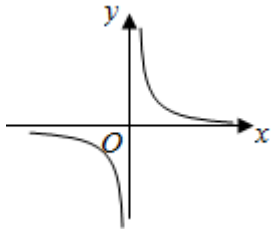
$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \sqrt{7}$ .

答案：A

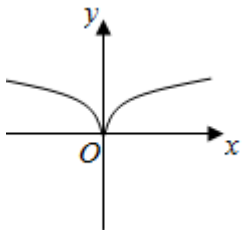
11. 数  $f(x) = \frac{e^x + 1}{x(e^x - 1)}$  (其中  $e$  为自然对数的底数) 的图象大致为( )



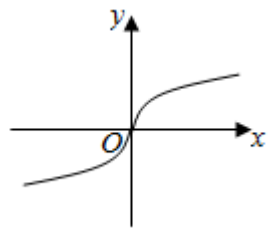
A.



B.



C.



D.

解析:  $f(-x) = \frac{e^{-x} + 1}{-x(e^{-x} - 1)} = \frac{1 + e^x}{-x(1 - e^x)} = \frac{e^x + 1}{x(e^x - 1)} = f(x),$

$\therefore f(x)$  是偶函数, 故  $f(x)$  图形关于  $y$  轴对称, 排除 B, D;

又  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x + 1 \rightarrow 2$ ,  $x(e^x - 1) \rightarrow 0$ ,  $\therefore \frac{e^x + 1}{x(e^x - 1)} \rightarrow +\infty$ , 排除 C.

答案: A

12. 若函数  $f(x) = m \ln x + x^2 - mx$  在区间  $(0, +\infty)$  内单调递增. 则实数  $m$  的取值范围为 ( )

A.  $[0, 8]$

B.  $(0, 8]$

C.  $(-\infty, 0] \cup [8, +\infty)$

D.  $(-\infty, 0) \cup (8, +\infty)$

解析:  $f'(x) = \frac{m}{x} + 2x - m = \frac{2x^2 - mx + m}{x},$

若  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  递增,

则  $2x^2 - mx + m \geq 0$  在  $(0, +\infty)$  恒成立,

即  $m(x-1) \leq 2x^2$  在  $(0, +\infty)$  递增,

① $x \in (0, 1)$ 时, 只需  $m \geq \frac{2x^2}{x-1}$ ,

在 $(0, 1)$ 恒成立, 令  $p(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ ,  $x \in (0, 1)$ ,

$$\text{则 } p'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2} < 0,$$

故  $p(x)$  在 $(0, 1)$ 递减,  $x \rightarrow 0$ 时,  $p(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow 1$ 时,  $p(x) \rightarrow -\infty$ ,  
故  $p(x) < 0$ ,  $m \geq 0$ ;

② $x=1$ 时,  $m \geq 0$ ,

③ $x \in (1, +\infty)$ 时, 只需  $m \leq \frac{2x^2}{x-1}$ ,

在 $(1, +\infty)$ 恒成立,

$$\text{令 } q(x) = \frac{2x^2}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty),$$

$$\text{则 } q'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2},$$

令  $q'(x) > 0$ , 解得:  $x > 2$ , 令  $q'(x) < 0$ , 解得:  $x < 2$ ,

故  $q(x)$  在 $(1, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增,

故  $q(x)$  的最小值是  $q(2)=8$ , 故  $m \leq 8$ ,

综上,  $m \in [0, 8]$ .

答案: A

二、填空题. 每题 5 分, 满分 20 分,

13. 曲线  $C: f(x) = \sin x + e^x + 2$  在  $x=0$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

解析:  $\because f(x) = \sin x + e^x + 2, \therefore f'(x) = \cos x + e^x$ ,

$\therefore$  曲线  $f(x) = \sin x + e^x + 2$  在点  $P(0, 3)$  处的切线的斜率为:  $k = \cos 0 + e^0 = 2$ ,

$\therefore$  曲线  $f(x) = \sin x + e^x + 2$  在点  $P(0, 3)$  处的切线的方程为:  $y = 2x + 3$ .

答案:  $y = 2x + 3$ .

14. 函数  $f(x) = x^3 - x^2 + 2$  在  $(0, +\infty)$  上的最小值为\_\_\_\_\_.

解析: 函数  $f(x) = x^3 - x^2 + 2$  在  $(0, +\infty)$ ,

可得  $f'(x) = 3x^2 - 2x$ , 令  $3x^2 - 2x = 0$ , 可得  $x=0$  或  $x = \frac{2}{3}$ , 当  $x \in (0, \frac{2}{3})$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数

是减函数;  $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数是增函数, 所以  $x = \frac{2}{3}$  是函数的极小值也最小

值, 所以  $f(x)_{\min} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 = \frac{50}{27}$ .

答案:  $\frac{50}{27}$

15. 已知实数  $x, y$  满足  $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0, \\ x \leq 2, \\ x + y - 1 \geq 0, \end{cases}$  则  $z = 2x - 2y - 1$  的最小值是\_\_\_\_\_.

解析: 约束条件  $\begin{cases} x - 2y + 1 \geq 0, \\ x \leq 2, \\ x + y - 1 \geq 0, \end{cases}$  作出可行域如图,

联立  $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$  解得  $A(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,

化目标函数  $z = 2x - 2y - 1$  为  $y = x - \frac{1}{2} - \frac{z}{2}$ ,

由图可知, 当直线  $y = x - \frac{1}{2} - \frac{z}{2}$  过点  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  时  $z$  取得最小值,

把点的坐标代入目标函数得  $z = -\frac{5}{3}$ .

答案:  $-\frac{5}{3}$

16. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比不为  $-1$ , 设  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和,  $S_{12} = 7S_4$ , 则  $\frac{S_8}{S_4}$  = \_\_\_\_\_.

解析: 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ,  $q \neq \pm 1$ ,

$\because S_{12} = 7S_4, \therefore \frac{a_1(1-q^{12})}{1-q} = 7 \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$ , 化为:  $q^8 + q^4 - 6 = 0, q^4 = 2$ . 则  $\frac{S_8}{S_4} = 1 + q^4 = 3$ .

答案: 3

三、解答题: 共 70 分. 解答题应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 已知函数  $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2\sin^2 x$ .

(1) 若  $f(x) = 0, x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 求  $x$  的值;

(2) 将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 再将图象上所有点的横坐标伸长为原来的 2 倍

(纵坐标不变), 得到函数  $g(x)$  的图象, 若曲线  $y=h(x)$  与  $y=g(x)$  的图象关于直线  $x=\frac{\pi}{4}$  对称,

求函数  $h(x)$  在  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  上的值域.

解析: 利用倍角公式降幂, 再由辅助角公式化积.

(1) 由  $f(x)=0$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 求解三角方程可得  $x$  的值;

(2) 由函数图象的平移和伸缩变换可得  $y=g(x)$ , 由对称性得到  $y=h(x)$ , 结合  $x$  的范围求得函数  $h(x)$  在  $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$  上的值域.

答案:  $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x + 1 - \cos 2x = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1.$

(1) 由  $f(x)=0$ , 得  $2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1 = 0$ ,  $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ , 或

$$2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

又  $\because x \in (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $\therefore x = -\frac{\pi}{3}$  或  $0$  或  $\frac{2\pi}{3}$ ;

(2) 将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位, 可得函数图象的解析式为

$$y = 2 \sin[2(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] + 1 = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{2}) + 1 = 2 \cos 2x + 1, \text{ 再将图象上所有点的横坐标}$$

伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到函数  $g(x) = 2\cos x + 1$ ,

又曲线  $y=h(x)$  与  $y=g(x)$  的图象关于直线  $x=\frac{\pi}{4}$  对称,  $\therefore h(x) = g(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin x + 1$ ,

$\because x \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}]$ ,  $\therefore \sin x \in (-\frac{1}{2}, 1]$ .

故函数  $h(x)$  的值域为  $(0, 3]$ .

18. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ,  $b = \sqrt{3}$ .

(1) 若  $C = \frac{5\pi}{6}$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 求  $c$ ;

(2) 若  $B = \frac{\pi}{3}$ , 求  $2c - a$  的取值范围.

解析: (1) 根据面积公式计算  $a$ , 再利用余弦定理计算  $c$ ;

(2) 用正弦定理得出  $2a - c$  关于  $C$  的三角函数, 利用  $C$  的范围得出  $2a - c$  的范围.

答案: (1) 由三角形面积公式,  $\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

因为  $C = \frac{5\pi}{6}$ ,  $b = \sqrt{3}$ , 所以  $a = 2$ .

由余弦定理,  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{13}$ .



$$(2) \text{ 由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2,$$

所以  $a=2\sin A$ ,  $c=2\sin C$ .

$$\text{因为 } B=\frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } a = 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + C\right) = \sqrt{3} \cos C + \sin C.$$

$$\text{于是 } 2c - a = 3 \sin C - \sqrt{3} \cos C = 2\sqrt{3} \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{因为 } C \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \quad C - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

故  $2c-a$  的取值范围为  $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ .

19. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $S_n+n=2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ .

(1) 证明: 数列  $\{a_{n+1}\}$  为等比数列, 并求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n=na_n+n$ , 数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 求满足不等式  $\frac{T_n-2}{n} > 2018$  的  $n$  的最小值.

解析: (1) 当  $n=1$  时, 求得  $a_1=1$ . 当  $n \geq 2$  时,  $S_{n-1}+n-1=2a_{n-1}$ , 与原递推式联立得:  $a_{n+1}=2a_n-2a_{n-1}$ , 即  $a_n=2a_{n-1}+1$ , 可得  $a_{n+1}=2(a_{n-1}+1)$ , 得到数列  $\{a_{n+1}\}$  为以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 由此可得数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2)  $b_n=na_n+n=n(2^n-1)+n=n \cdot 2^n$ , 然后利用错位相减法求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 代入  $\frac{T_n-2}{n}$

$> 2018$ , 可得  $\frac{n-1}{n} \cdot 2^n > 1009$ , 设  $c_n = \frac{n-1}{n} \cdot 2^n$ , 可知数列  $\{c_n\}$  为递增数列, 结合  $c_{10} < 1009$ ,

$c_{11} > 1009$  得答案.

答案: (1) 当  $n=1$  时,  $a_1+1=2a_1$ ,  $\therefore a_1=1$ .

$\therefore S_n+n=2a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ,

$\therefore$  当  $n \geq 2$  时,  $S_{n-1}+n-1=2a_{n-1}$ ,

两式相减得:  $a_n+1=2a_n-2a_{n-1}$ , 即  $a_n=2a_{n-1}+1$ ,  $\therefore a_{n+1}=2(a_{n-1}+1)$ ,

$\therefore$  数列  $\{a_{n+1}\}$  为以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

$\therefore a_n+1=2^n$ , 则  $a_n=2^n-1, n \in \mathbb{N}^*$ ;

(2)  $\therefore b_n=na_n+n=n(2^n-1)+n=n \cdot 2^n$ ,

$\therefore T_n=1 \cdot 2^1+2 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+\dots+n \cdot 2^n$ ,

$\therefore 2T_n=1 \cdot 2^2+2 \cdot 2^3+\dots+(n-1) \cdot 2^n+n \cdot 2^{n+1}$ ,

两式相减得:  $-T_n=2^1+2^2+2^3+\dots+2^n-n \cdot 2^{n+1}$ ,

$\therefore T_n=(n-1) \cdot 2^{n+1}+2$ ,

由  $\frac{T_n-2}{n} > 2018$ , 得  $\frac{n-1}{n} \cdot 2^n > 1009$ ,

设  $c_n = \frac{n-1}{n} \cdot 2^n, \therefore c_{n+1} - c_n = \frac{n^2+1}{n^2+n} \cdot 2^n > 0, \therefore$  数列  $\{c_n\}$  为递增数列,

$$\because c_{10} = \frac{9}{10} \cdot 2^{10} < 1009, \quad c_{11} = \frac{10}{11} \cdot 2^{11} > 1009,$$

$\therefore$  满足不等式  $\frac{T_n - 2}{n} > 2018$  的  $n$  的最小值为 11.

20. 已知函数  $f(x) = -x^2 + ax - \ln x$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 若函数  $f(x)$  是单调递减函数, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若函数  $f(x)$  在区间  $(0, 3)$  上既有极大值又有极小值, 求实数  $a$  的取值范围.

解析: (1) 求出导函数, 通过  $f'(x) \leq 0$  对  $(0, +\infty)$  恒成立, 分离变量推出  $a$ , 利用基本不等式求解函数的最小值, 得到  $a$  的范围.

(2) 通过函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上既有极大值又有极小值. 说明导函数由两个零点, 列出不等式组求解即可.

答案: (1)  $f'(x) = -2x + a - \frac{1}{x} = \frac{-2x^2 + ax - 1}{x}$  ( $x > 0$ ),

$\because$  函数  $f(x)$  是单调递减函数,

$\therefore f'(x) \leq 0$  对  $(0, +\infty)$  恒成立,

$\therefore -2x^2 + ax - 1 \leq 0$  对  $(0, +\infty)$  恒成立, 即  $a \leq 2x + \frac{1}{x}$ ,

对  $(0, +\infty)$  恒成立,

$\because 2x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{1}{x}} = 2\sqrt{2}$  (当且仅当  $2x = \frac{1}{x}$ , 即  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时取等号),  $\therefore a \leq 2\sqrt{2}$ .

(2)  $\because$  函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上既有极大值又有极小值.

$\therefore f'(x) = \frac{-2x^2 + ax - 1}{x} = 0$  在  $(0, 3)$  上有两个相异实根,

即  $2x^2 - ax + 1 = 0$  在  $(0, 3)$  上有两个相异实根,

$$g(x) = 2x^2 - ax + 1, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta > 0, \\ 0 < \frac{a}{4} < 3, \\ g(0) > 0, \\ g(3) > 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a < -2\sqrt{2} \text{ 或 } a > 2\sqrt{2}, \\ 0 < a < 12, \\ a < \frac{19}{3}, \end{cases} \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{19}{3}.$$

21. 已知函数  $f(x) = a \ln x - x^2 + \frac{1}{2}a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ).

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若函数  $f(x)$  在定义域内恒有  $f(x) \leq 0$ , 求实数  $a$  的取值范围.

解析: (1) 求出导函数通过  $a$  与 0 的大小比较, 判断导函数的符号, 然后求解单调性.

(2) 通过  $a$  与 0 的大小, 分类讨论函数的最值, 推出结果即可.

答案: (1)  $f'(x) = \frac{a}{x} - 2x = \frac{a - 2x^2}{x}$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上递减;

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$  (负根舍去).

当  $f'(x) > 0$  得,  $0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 得  $x > \sqrt{\frac{a}{2}}$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$  上递增, 在  $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$  上递减.

(2) 当  $a = 0$  时,  $f(x) = -x^2 < 0$ , 符合题意.

当  $a > 0$  时,  $f(x)_{\max} = f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = a \ln \sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a \ln \sqrt{\frac{a}{2}} \leq 0$ ,

$\because a > 0, \therefore \ln \sqrt{\frac{a}{2}} \leq 0, \therefore 0 < \sqrt{\frac{a}{2}} \leq 1, \therefore 0 < a \leq 2$ .

当  $a < 0$  时,  $f(x) = a \ln x - x^2 + \frac{1}{2}a$  在  $(0, +\infty)$  上递减,

且  $y = a \ln x$  与  $y = x^2 - \frac{1}{2}a$  的图象在  $(0, +\infty)$  上只有一个交点, 设此交点为  $(x_0, y_0)$ ,

则当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f(x) > 0$ , 故当  $a < 0$  时, 不满足  $f(x) \leq 0$ .

综上,  $a$  的取值范围  $[0, 2]$ .

22. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sin \alpha + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数).

(1) 求曲线  $C$  的普通方程;

(2) 在以  $O$  为极点,  $x$  正半轴为极轴的极坐标系中, 直线  $l$  方程为  $\sqrt{2}\rho \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \frac{1}{2} = 0$ ,

已知直线  $l$  与曲线  $C$  相交于  $A, B$  两点, 求  $|AB|$ .

解析: (1) 直接把参数方程转化为直角坐标方程.

(2) 首先把极坐标方程转化为直角坐标方程, 进一步利用点到直线的距离和垂径定理求出结果.

答案: (1) 曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sin \alpha + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha - \cos \alpha \end{cases}$  ( $\alpha$  为参数).

由已知  $\sin \alpha = \frac{x+y}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x-y}{2}$ , 整理得: 普通方程为  $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 1$ , 化简

得  $x^2 + y^2 = 2$ .

(2) 由  $2\rho \sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) + \frac{1}{2} = 0$ ,

知  $\rho(\cos\theta - \sin\theta) + 12 = 0$ , 化为普通方程为  $x - y + \frac{1}{2} = 0$ ,

圆心到直线  $l$  的距离  $h = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

由垂径定理  $|AB| = \frac{\sqrt{30}}{2}$ .

23. 已知函数  $f(x) = |x - a|$ , 不等式  $f(x) \leq 3$  的解集为  $[-6, 0]$ .

(1) 求实数  $a$  的值;

(2) 若  $f(x) + f(x+5) \geq 2m$  对一切实数  $x$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

解析: (1) 去掉绝对值, 求出  $x$  的范围, 根据不等式的解集, 得到对应关系, 求出  $a$  的值即可;

(2) 根据绝对值的性质求出  $f(x) + f(x+5)$  的最小值, 得到关于  $m$  的不等式, 解出即可.

答案: (1) 由  $f(x) \leq 3$ , 得  $|x - a| \leq 3$ ,  $\therefore a - 3 \leq x \leq a + 3$ ,

又  $f(x) \leq 3$  的解集为  $[-6, 0]$ , 解得:  $a = -3$ ;

(2)  $\because f(x) + f(x+5) = |x+3| + |x+8| \geq 5$ .

又  $f(x) + f(x+5) \geq 2m$  对一切实数  $x$  恒成立,  $\therefore 2m \leq 5$ ,  $m \leq \frac{5}{2}$ .