

2018年普通高等学校招生全国统一考试(新课标II)数学理

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $\frac{1+2i}{1-2i} = (\quad)$

A. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

C. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

D. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

解析：利用复数的除法的运算法则化简求解即可。

$$\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i.$$

答案：D

2. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$ ，则A中元素的个数为()

A. 9

B. 8

C. 5

D. 4

解析：分别令 $x = -1, 0, 1$ ，进行求解即可。

当 $x = -1$ 时， $y^2 \leq 2$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ；

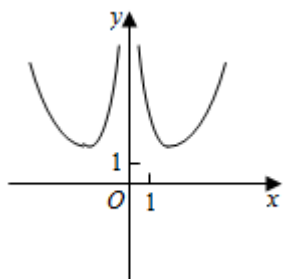
当 $x = 0$ 时， $y^2 \leq 3$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ；

当 $x = 1$ 时， $y^2 \leq 2$ ，得 $y = -1, 0, 1$ ；

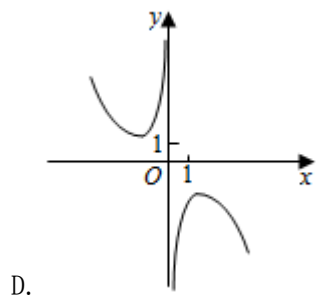
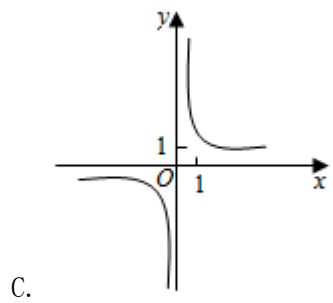
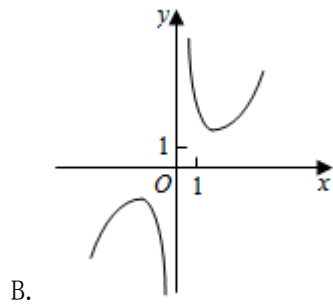
即集合A中元素有9个。

答案：A

3. 函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为()



A.



解析：判断函数的奇偶性，利用函数的定点的符号的特点分别进行判断即可.

$$\text{函数 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = -f(x),$$

则函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 A；

当 $x=1$ 时， $f(1) = e - \frac{1}{e} > 0$ ，排除 D；

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，排除 C.

答案：B

4. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = (\quad)$

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 0

解析：根据向量的数量积公式计算即可.

$$\text{向量 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 满足 } |\vec{a}|=1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \text{ 则 } \vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 = 3.$$

答案：B

5. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为()

A. $y = \pm\sqrt{2}x$

B. $y = \pm\sqrt{3}x$

C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

D. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

解析: 根据双曲线离心率的定义求出 a, c 的关系, 结合双曲线 a, b, c 的关系进行求解即可.

\because 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$,

则 $\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$,

即双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\sqrt{2}x$.

答案: A

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1, AC=5$, 则 $AB=()$

A. $4\sqrt{2}$

B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$

D. $2\sqrt{5}$

解析: 利用二倍角公式求出 C 的余弦函数值, 利用余弦定理转化求解即可.

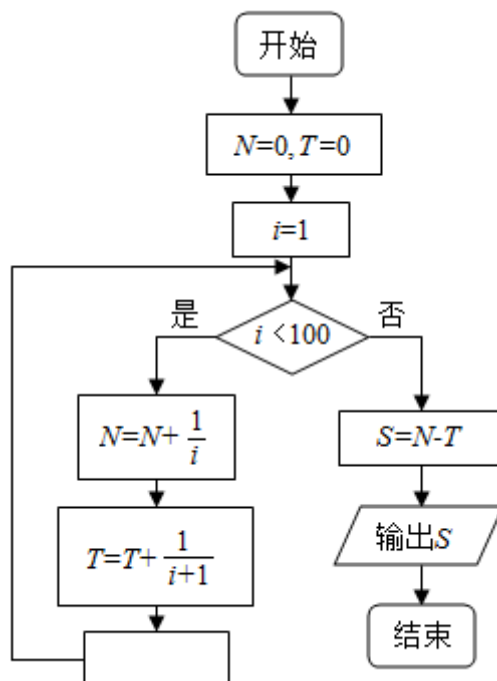
在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos C = 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{3}{5}$,

$BC=1, AC=5$,

则 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C} = \sqrt{1 + 25 + 2 \times 1 \times 5 \times \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

答案：A

7. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ ，设计了如图的程序框图，则在空白框中应填入 ()



- A. $i=i+1$
- B. $i=i+2$
- C. $i=i+3$
- D. $i=i+4$

解析：模拟程序框图的运行过程知，该程序运行后输出的是

$$S = N - T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right),$$

累加步长是 2，则在空白处应填入 $i=i+2$ 。

答案：B

8. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数的和”，如 $30=7+23$. 在不超过 30 的素数中，随机选取两个不同的数，其和等于 30 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{12}$
- B. $\frac{1}{14}$
- C. $\frac{1}{15}$

D. $\frac{1}{18}$

解析：利用列举法先求出不超过 30 的所有素数，利用古典概型的概率公式进行计算即可。
在不超过 30 的素数中有，2，3，5，7，11，13，17，19，23，29 共 10 个，

从中选 2 个不同的数有 $C_{10}^2=45$ 种，

和等于 30 的有 (7, 23)，(11, 19)，(13, 17)，共 3 种，

则对应的概率 $P = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ 。

答案：C

9. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=1$ ， $AA_1=\sqrt{3}$ ，则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 ()

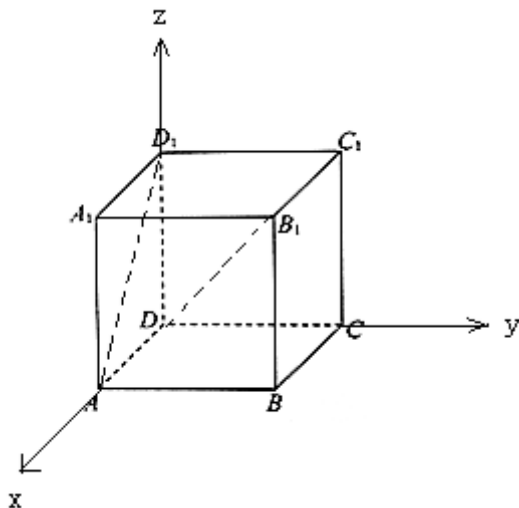
A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：以 D 为原点，DA 为 x 轴，DC 为 y 轴， DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



\because 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=BC=1$ ，

$AA_1=\sqrt{3}$ ，

$\therefore A(1, 0, 0)$ ， $D_1(0, 0, \sqrt{3})$ ， $D(0, 0, 0)$ ， $B_1(1, 1, \sqrt{3})$ ，

$\overrightarrow{AD_1}=(-1, 0, \sqrt{3})$ ， $\overrightarrow{DB_1}=(1, 1, \sqrt{3})$ ，

设异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\vec{AD_1} \cdot \vec{DB_1}|}{|\vec{AD_1}| |\vec{DB_1}|} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

\therefore 异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

答案: C

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[-a, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$
- B. $\frac{\pi}{2}$
- C. $\frac{3\pi}{4}$
- D. π

解析: $f(x) = \cos x - \sin x = -(\sin x - \cos x) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

得 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

取 $k=0$, 得 $f(x)$ 的一个减区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

由 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 是减函数,

$$\text{得 } \begin{cases} -a \geq -\frac{\pi}{4} \\ a \leq \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \therefore a \leq \frac{\pi}{4}.$$

则 a 的最大值是 $\frac{\pi}{4}$.

答案: A

11. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = ()$

- A. -50
- B. 0
- C. 2
- D. 50

解析: 根据函数奇偶性和对称性的关系求出函数的周期是 4, 结合函数的周期性和奇偶性进

行转化求解即可.

$\because f(x)$ 是奇函数, 且 $f(1-x)=f(1+x)$,

$\therefore f(1-x)=f(1+x)=-f(x-1)$, $f(0)=0$,

则 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,

即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$\because f(1)=2$,

$\therefore f(2)=f(0)=0$, $f(3)=f(1-2)=f(-1)=-f(1)=-2$,

$f(4)=f(0)=0$,

则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+0-2+0=0$,

则 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(50)=12[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]+f(49)+f(50)$

$=f(1)+f(2)=2+0=2$.

答案: C

12. 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, A 是 C 的左顶点, 点 P 在过

A 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 的直线上, $\triangle PF_1F_2$ 为等腰三角形, $\angle F_1F_2P=120^\circ$, 则 C 的离心率为 ()

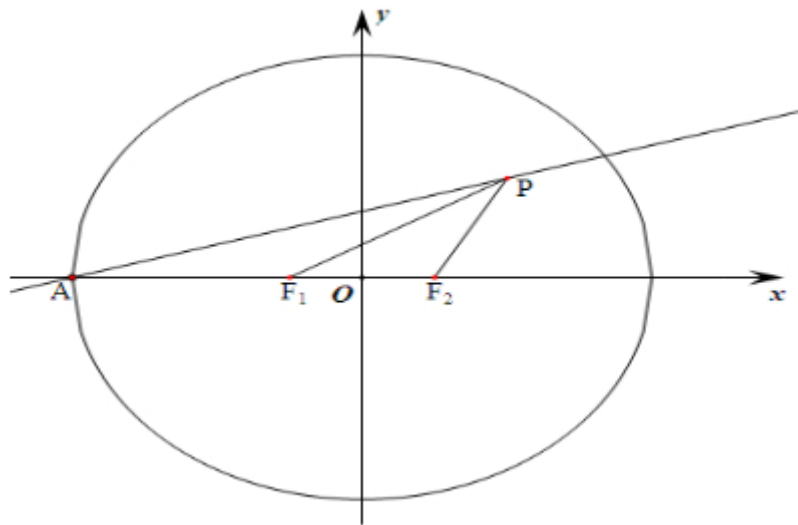
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{4}$

解析: 求得直线 AP 的方程: 根据题意求得 P 点坐标, 代入直线方程, 即可求得椭圆的离心率.



由题意可知: $A(-a, 0)$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$,

直线 AP 的方程为: $y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x+a)$,

由 $\angle F_1F_2P = 120^\circ$, $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$, 则 $P(2c, \sqrt{3}c)$,

代入直线 AP: $\sqrt{3}c = \frac{\sqrt{3}}{6}(2c - a)$, 整理得: $a = 4c$,

\therefore 题意的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}$.

答案: D

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y = 2\ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

解析: 欲求出切线方程, 只须求出其斜率即可, 故先利用导数求出在 $x=0$ 处的导函数值, 再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率. 从而问题解决.

$\because y = 2\ln(x+1)$,

$\therefore y' = \frac{2}{x+1}$,

当 $x=0$ 时, $y' = 2$,

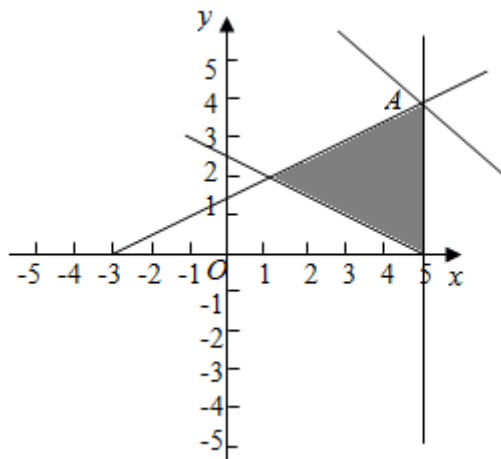
\therefore 曲线 $y = 2\ln(x+1)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = 2x$.

答案: $y = 2x$

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为_____.

解析: 由约束条件作出可行域, 数形结合得到最优解, 求出最优解的坐标, 代入目标函数得答案.

由 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$ 作出可行域如图,



化目标函数 $z=x+y$ 为 $y=-x+z$,

由图可知, 当直线 $y=-x+z$ 过 A 时, z 取得最大值,

$$\text{由 } \begin{cases} x = 5 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ 即 } A(5, 4),$$

目标函数有最大值, 为 $z=9$.

答案: 9

15. 已知 $\sin\alpha + \cos\beta = 1$, $\cos\alpha + \sin\beta = 0$, 则 $\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 把已知等式两边平方化简可得 $2+2(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) = 1$, 再利用两角和的正弦公式化简为 $2\sin(\alpha + \beta) = -1$, 可得结果.

$$\sin\alpha + \cos\beta = 1,$$

$$\text{两边平方可得: } \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cos\beta + \cos^2\beta = 1, \text{ ①}$$

$$\cos\alpha + \sin\beta = 0,$$

$$\text{两边平方可得: } \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \sin\beta + \sin^2\beta = 0, \text{ ②}$$

$$\text{由①+②得: } 2+2(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta) = 1, \text{ 即 } 2+2\sin(\alpha + \beta) = 1,$$

$$\therefore 2\sin(\alpha + \beta) = -1.$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}.$$

答案: $-\frac{1}{2}$

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$, SA 与圆锥底面所成角为 45° ,

若 $\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$, 则该圆锥的侧面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 利用已知条件求出圆锥的母线长, 利用直线与平面所成角求解底面半径, 然后求解圆锥的侧面积.

$$\text{圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 所成角的余弦值为 } \frac{7}{8}, \text{ 可得 } \sin \angle ASB = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$\triangle SAB$ 的面积为 $5\sqrt{15}$,

可得 $\frac{1}{2}SA^2 \sin \angle AMB = 5\sqrt{15}$, 即 $\frac{1}{2}SA^2 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 5\sqrt{15}$, 即 $SA=4\sqrt{5}$.

SA 与圆锥底面所成角为 45° , 可得圆锥的底面半径为: $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{10}$.

则该圆锥的侧面积: $\frac{1}{2} \times 4\sqrt{10}\pi \times 4\sqrt{5} = 40\sqrt{2}\pi$.

答案: $40\sqrt{2}\pi$

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一)必考题: 共 60 分.

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1=-7$, $S_3=-15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析: (1) 根据 $a_1=-7$, $S_3=-15$, 可得 $a_1=-7$, $3a_1+3d=-15$, 求出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差, 然后求出 a_n 即可.

答案: (1) \because 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=-7$, $S_3=-15$,

$\therefore a_1=-7$, $3a_1+3d=-15$, 解得 $a_1=-7$, $d=2$,

$\therefore a_n=-7+2(n-1)=2n-9$.

(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

解析: (2) 由 $a_1=-7$, $d=2$, $a_n=2n-9$, 得 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{1}{2}(2n^2-16n)=n^2-8n=(n-4)^2-16$, 由此可

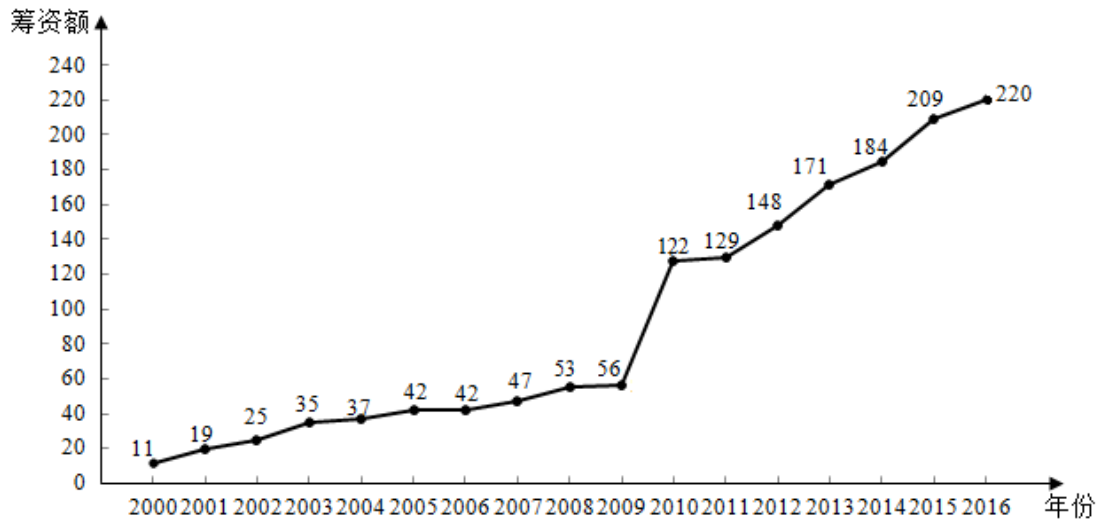
求出 S_n 以及 S_n 的最小值.

答案: (2) $\because a_1=-7$, $d=2$, $a_n=2n-9$,

$\therefore S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{1}{2}(2n^2-16n)=n^2-8n=(n-4)^2-16$,

\therefore 当 $n=4$ 时, 前 n 项的和 S_n 取得最小值为 -16 .

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图.



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额，建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 17) 建立模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 7) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值.

解析: (1) 根据模型①计算 $t=19$ 时 \hat{y} 的值，根据模型②计算 $t=9$ 时 \hat{y} 的值即可.

答案: (1) 根据模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$,

计算 $t=19$ 时, $\hat{y} = -30.4 + 13.5 \times 19 = 226.1$;

利用这个模型，求出该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值是 226.1 亿元;

根据模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$,

计算 $t=9$ 时, $\hat{y} = 99 + 17.5 \times 9 = 256.5$;

利用这个模型，求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值是 256.5 亿元.

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.

解析: (2) 从总体数据和 2000 年到 2009 年间递增幅度以及 2010 年到 2016 年间递增的幅度比较,

即可得出模型②的预测值更可靠些.

答案: (2) 模型②得到的预测值更可靠;

因为从总体数据看，该地区从 2000 年到 2016 年的环境基础设施投资额是逐年上升的，

而从 2000 年到 2009 年间递增的幅度较小些，

从 2010 年到 2016 年间递增的幅度较大些，

所以，利用模型②的预测值更可靠些.

19. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(1) 求 l 的方程.

解析: (1) 方法一: 设直线 AB 的方程, 代入抛物线方程, 根据抛物线的焦点弦公式即可求得 k 的值, 即可求得直线 l 的方程.

方法二: 根据抛物线的焦点弦公式 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$, 求得直线 AB 的倾斜角, 即可求得直线 l 的斜率, 求得直线 l 的方程.

答案: (1) 方法一: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 当直线的斜率不存在时, $|AB|=4$, 不满足;

设直线 AB 的方程为: $y=k(x-1)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{整理得: } k^2 x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0, \text{ 则 } x_1+x_2 = \frac{2(k^2+2)}{k^2}, x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{由 } |AB| = x_1+x_2+p = \frac{2(k^2+2)}{k^2} + 2 = 8, \text{ 解得: } k^2=1, \text{ 则 } k=1,$$

\therefore 直线 l 的方程 $y=x-1$.

方法二: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 由抛物线的弦长公

$$\text{式 } |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} = 8, \text{ 解得: } \sin^2 \theta = \frac{1}{2},$$

$$\because k>0, \text{ 故 } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ 则直线的斜率 } k=1,$$

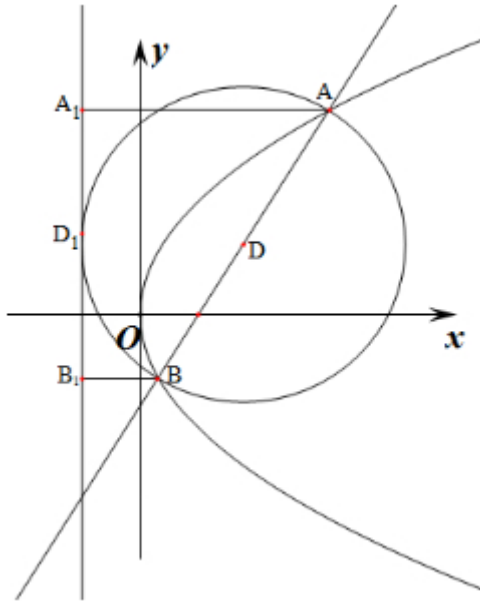
\therefore 直线 l 的方程 $y=x-1$.

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解析: (2) 根据过 A, B 分别向准线 l 作垂线, 根据抛物线的定义即可求得半径, 根据中点坐标公式, 即可求得圆心, 求得圆的方程.

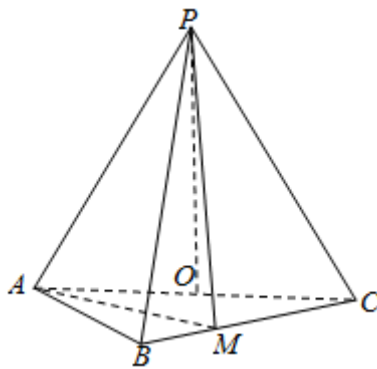
答案: (2) 过 A, B 分别向准线 $x=-1$ 作垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 设 AB 的中点为 D , 过 D 作

$$DD_1 \perp \text{准线 } l, \text{ 垂足为 } D, \text{ 则 } |DD_1| = \frac{1}{2} (|AA_1| + |BB_1|),$$



由抛物线的定义可知： $|AA_1|=|AF|$ ， $|BB_1|=|BF|$ ，则 $r=|DD_1|=4$ ，
 以 AB 为直径的圆与 $x=-1$ 相切，且该圆的圆心为 AB 的中点 D ，
 由(1)可知： $x_1+x_2=6$ ， $y_1+y_2=x_1+x_2-2=4$ ，
 则 $D(3, 2)$ ，
 过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 。

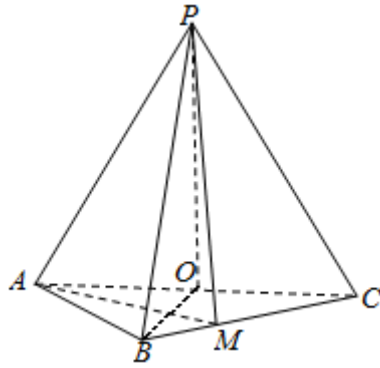
20. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $AB=BC=2\sqrt{2}$ ， $PA=PB=PC=AC=4$ ， O 为 AC 的中点。



(1) 证明： $PO \perp$ 平面 ABC 。

解析：(1) 利用线面垂直的判定定理证明 $PO \perp AC$ ， $PO \perp OB$ 即可。

答案：(1) 证明：连接 BO ，



$\because AB=BC=2\sqrt{2}$ ，O 是 AC 的中点，

$\therefore BO \perp AC$ ，且 $BO=2$ ，

又 $PA=PC=PB=AC=2$ ，

$\therefore PO \perp AC$ ， $PO=2\sqrt{3}$ ，

则 $PB^2=PO^2+BO^2$ ，

则 $PO \perp OB$ ，

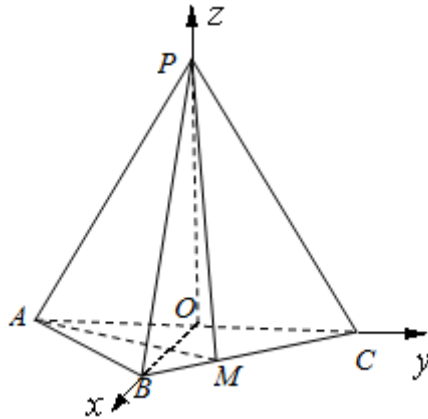
$\because OB \cap AC=O$ ，

$\therefore PO \perp$ 平面 ABC.

(2) 若点 M 在棱 BC 上，且二面角 M-PA-C 为 30° ，求 PC 与平面 PAM 所成角的正弦值.

解析：(2) 根据二面角的大小求出平面 PAM 的法向量，利用向量法即可得到结论.

答案：(2) 建立以 O 坐标原点，OB，OC，OP 分别为 x，y，z 轴的空间直角坐标系如图：



$A(0, -2, 0)$ ， $P(0, 0, 2\sqrt{3})$ ， $C(0, 2, 0)$ ， $B(2, 0, 0)$ ，

$\overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0)$ ，

设 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC} = (-2\lambda, 2\lambda, 0)$ ， $0 < \lambda < 1$ ，

则 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = (-2\lambda, 2\lambda, 0) - (-2, -2, 0) = (2-2\lambda, 2\lambda+2, 0)$ ，

则平面 PAC 的法向量为 $\overrightarrow{m} = (1, 0, 0)$ ，

设平面 MPA 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\vec{PA} = (0, -2, -2\sqrt{3}),$$

$$\vec{n} \cdot \vec{PA} = -2y - 2\sqrt{3}z = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{AM} = (2 - 2\lambda)x + (2\lambda + 2)y = 0,$$

$$\text{令 } z=1, \text{ 则 } y = -\sqrt{3}, \quad x = \frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda},$$

$$\text{即 } \vec{n} = \left(\frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda}, -\sqrt{3}, 1 \right),$$

\because 二面角 M-PA-C 为 30° ,

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda}}{\sqrt{\left(\frac{(\lambda + 1)\sqrt{3}}{1 - \lambda} \right)^2 + 1 + 3 \times 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } \lambda = \frac{1}{3} \text{ 或 } \lambda = 3 \text{ (舍)},$$

则平面 MPA 的法向量为 $\vec{n} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$,

$$\vec{PC} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$$

$$\text{PC 与平面 PAM 所成角的正弦值 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{PC}, \vec{n} \rangle| = \left| \frac{-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{16} \times \sqrt{16}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

21. 已知函数 $f(x) = e^x - ax^2$.

(1) 若 $a=1$, 证明: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$.

解析: (1) 通过两次求导, 利用导数研究函数的单调性极值与最值即可证明.

答案: (1) 证明: 当 $a=1$ 时, 函数 $f(x) = e^x - x^2$.

$$\text{则 } f'(x) = e^x - 2x,$$

$$\text{令 } g(x) = e^x - 2x, \text{ 则 } g'(x) = e^x - 2,$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 得 } x = \ln 2.$$

当 $x \in (0, \ln 2)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

$$\therefore g(x) \geq g(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2 \cdot \ln 2 = 2 - 2\ln 2 > 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 单调递增, } \therefore f(x) \geq f(0) = 1.$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点, 求 a .

解析: (2) 分离参数可得 $a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根, 即函数 $y=a$ 与 $G(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 的图象在 $(0,$

$+\infty)$ 只有一个交点. 结合图象即可求得 a .

答案: (2) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点 \Leftrightarrow 方程 $ex - ax^2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根,

$\Leftrightarrow a = \frac{e^x}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个根,

即函数 $y=a$ 与 $G(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 只有一个交点.

$$G'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3},$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $G'(x) < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$,

$\therefore G(x)$ 在 $(0, 2)$ 递减, 在 $(2, +\infty)$ 递增,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $G(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $G(x) \rightarrow +\infty$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = G(2) = \frac{e^2}{4}$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程]

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$, (θ 为参数), 直线 l 的参数

方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程.

解析: (1) 直接利用转换关系, 把参数方程与直角坐标方程进行转化.

答案: (1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数),

转换为直角坐标方程为: $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1$.

直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数).

转换为直角坐标方程为: $\sin \alpha x - \cos \alpha y + 2 \cos \alpha - \sin \alpha = 0$.

(2)若曲线C截直线l所得线段的中点坐标为(1, 2), 求l的斜率.

解析: (2)利用直线和曲线的位置关系, 在利用中点坐标求出结果.

答案: (2)把直线的参数方程代入椭圆的方程得到: $\frac{(2+t\sin\alpha)^2}{16} + \frac{(1+t\cos\alpha)^2}{4} = 1,$

整理得: $(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)t^2 + (8\cos\alpha + 4\sin\alpha)t - 8 = 0,$

则: $t_1 + t_2 = -\frac{8\cos\alpha + 4\sin\alpha}{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha},$

由于(1, 2)为中点坐标,

$\therefore \frac{t_1 + t_2}{2} = 0,$

则: $8\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0,$

解得: $\tan\alpha = -2,$

即: 直线l的斜率为-2.

[选修4-5: 不等式选讲]

23. 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|.$

(1)当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集.

解析: (1)去绝对值, 化为分段函数, 求出不等式的解集即可.

答案: (1)当 $a=1$ 时, $f(x) = 5 - |x+1| - |x-2| = \begin{cases} 2x+4, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x < 2 \\ -2x+6, & x \geq 2 \end{cases}.$

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 2x+4 \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq -1$,

当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = 2 \geq 0$ 恒成立, 即 $-1 < x < 2$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = -2x+6 \geq 0$, 解得 $2 \leq x \leq 3$,

综上所述不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, 3]$.

(2)若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

解析: (2)由题意可得 $|x+a| + |x-2| \geq 4$, 根据绝对值的几何意义即可求出

答案: (2) $\because f(x) \leq 1,$

$\therefore 5 - |x+a| - |x-2| \leq 1,$

$\therefore |x+a| + |x-2| \geq 4,$

$\therefore |x+a| + |x-2| = |x+a| + |2-x| \geq |x+a+2-x| = |a+2|,$

$\therefore |a+2| \geq 4,$

解得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 2$,

故 a 的取值范围 $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$.