

2018 年湖南省长沙市中考真题数学

一、选择题(在下列各题的四个选项中,只有一项是符合要求的,请在答题卡中填涂符合题意的选项,本大题共 12 个小题,每小题 3 分,共 36 分)

1. -2 的相反数是()

A. -2

B. $-\frac{1}{2}$

C. 2

D. $\frac{1}{2}$

解析: 根据只有符号不同的两个数互为相反数, 可得答案.

答案: C.

2. 据统计, 2017 年长沙市地区生产总值约为 10200 亿元, 经济总量迈入“万亿俱乐部”, 数据 10200 用科学记数法表示为()

A. 0.102×10^5

B. 10.2×10^3

C. 1.02×10^4

D. 1.02×10^3

解析: $10200 = 1.02 \times 10^4$.

答案: C.

3. 下列计算正确的是()

A. $a^2 + a^3 = a^5$

B. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 1$

C. $(x^2)^3 = x^5$

D. $m^5 \div m^3 = m^2$

解析: 直接利用合并同类项法则以及幂的乘方运算法则、同底数幂的乘除运算法则分别计算得出答案.

答案: D.

4. 下列长度的三条线段, 能组成三角形的是()

A. 4cm, 5cm, 9cm

B. 8cm, 8cm, 15cm

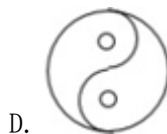
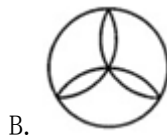
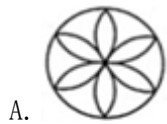
C. 5cm, 5cm, 10cm

D. 6cm, 7cm, 14cm

解析: 结合“三角形中较短的两边之和大于第三边”, 分别套入四个选项中得三边长, 即可得出结论.

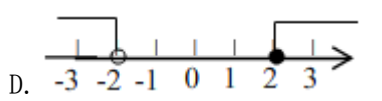
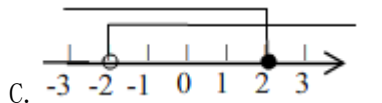
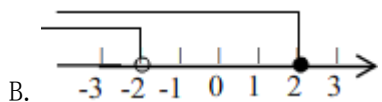
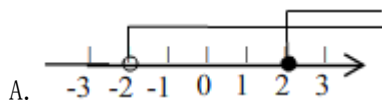
答案: B.

5. 下列四个图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是()

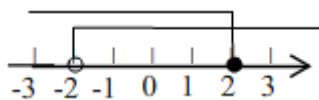


解析：A、是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项正确；
 B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；
 C、不是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；
 D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误。
 答案：A.

6. 不等式组 $\begin{cases} x+2 > 0 \\ 2x-4 \leq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()

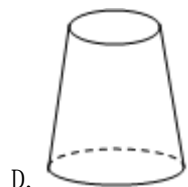
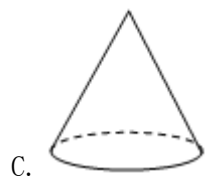
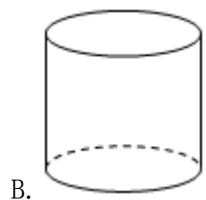
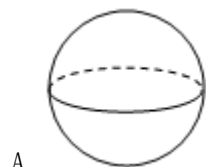


解析：解不等式 $x+2 > 0$ ，得： $x > -2$ ，
 解不等式 $2x-4 \leq 0$ ，得： $x \leq 2$ ，
 则不等式组的解集为 $-2 < x \leq 2$ ，
 将解集表示在数轴上如下：



答案：C.

7. 将下列如图的平面图形绕轴 1 旋转一周，可以得到的立体图形是()



解析：根据面动成体以及圆台的特点进行逐一分析，能求出结果.

答案：D.

8. 下列说法正确的是()

- A. 任意掷一枚质地均匀的硬币 10 次，一定有 5 次正面向上
- B. 天气预报说“明天的降水概率为 40%”，表示明天有 40%的时间都在降雨
- C. “篮球队员在罚球线上投篮一次，投中”为随机事件
- D. “a 是实数， $|a| \geq 0$ ”是不可能事件

解析：直接利用概率的意义以及随机事件的定义分别分析得出答案.

答案：C.

9. 估计 $\sqrt{10} + 1$ 的值是()

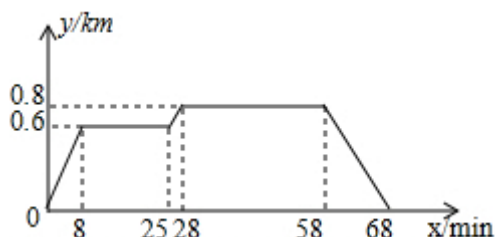
- A. 在 2 和 3 之间
- B. 在 3 和 4 之间

- C. 在 4 和 5 之间
D. 在 5 和 6 之间

解析：应先找到所求的无理数在哪两个和它接近的整数之间，然后判断出所求的无理数的范围。

答案：C.

10. 小明家、食堂、图书馆在同一条直线上，小明从家去食堂吃早餐，接着去图书馆读报，然后回家，如图反映了这个过程中，小明离家的距离 y 与时间 x 之间的对应关系. 根据图象，下列说法正确的是()



- A. 小明吃早餐用了 25min
B. 小明读报用了 30min
C. 食堂到图书馆的距离为 0.8km
D. 小明从图书馆回家的速度为 0.8km/min

解析：小明吃早餐用了 $(25-8)=17$ min，A 错误；

小明读报用了 $(58-28)=30$ min，B 正确；

食堂到图书馆的距离为 $(0.8-0.6)=0.2$ km，C 错误；

小明从图书馆回家的速度为 $0.8 \div 10=0.08$ km/min，D 错误。

答案：B.

11. 我国南宋著名数学家秦九韶的著作《数书九章》里记载有这样一道题：“问有沙田一块，有三斜，其中小斜五里，中斜十二里，大斜十三里，欲知为田几何？”这道题讲的是：有一块三角形沙田，三条边长分别为 5 里，12 里，13 里，问这块沙田面积有多大？题中“里”是我国市制长度单位，1 里=500 米，则该沙田的面积为()

- A. 7.5 平方千米
B. 15 平方千米
C. 75 平方千米
D. 750 平方千米

解析：直接利用勾股定理的逆定理进而结合直角三角形面积求法得出答案。

答案：A.

12. 若对于任意非零实数 a ，抛物线 $y=ax^2+ax-2a$ 总不经过点 $P(x_0-3, x_0^2-16)$ ，则符合条件的点 P ()

- A. 有且只有 1 个
B. 有且只有 2 个
C. 有且只有 3 个
D. 有无穷多个

解析：根据题意可以得到相应的不等式，然后根据对于任意非零实数 a ，抛物线 $y=ax^2+ax-2a$ 总不经过点 $P(x_0-3, x_0^2-16)$ ，即可求得点 P 的坐标，从而可以解答本题。

答案：B.

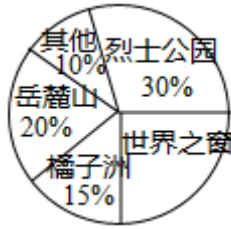
二、填空题(本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)

13. 化简： $\frac{m}{m-1} - \frac{1}{m-1} =$ _____.

解析：原式= $\frac{m-1}{m-1}=1$.

答案：1.

14. 某校九年级准备开展春季研学活动，对全年级学生各自最想去的活动地点进行了调查，把调查结果制成了如下扇形统计图，则“世界之窗”对应扇形的圆心角为_____度.



解析：“世界之窗”对应扇形的圆心角= $360^\circ \times (1-10\%-30\%-20\%-15\%)=90^\circ$.

答案：90.

15. 在平面直角坐标系中，将点 $A'(-2, 3)$ 向右平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，那么平移后对应的点 A' 的坐标是_____.

解析： \because 将点 $A'(-2, 3)$ 向右平移 3 个单位长度，
 \therefore 得到 $(1, 3)$ ，
 \because 再向下平移 2 个单位长度，
 \therefore 平移后对应的点 A' 的坐标是： $(1, 1)$.

答案： $(1, 1)$.

16. 掷一枚质地均匀的正方体骰子，骰子的六个面上分别刻有 1 到 6 的点数，掷得面朝上的点数为偶数的概率是_____.

解析：先统计出偶数点的个数，再根据概率公式解答.

答案：正方体骰子共六个面，点数为 1, 2, 3, 4, 5, 6，偶数为 2, 4, 6，

故点数为偶数的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

17. 已知关于 x 方程 $x^2-3x+a=0$ 有一个根为 1，则方程的另一个根为_____.

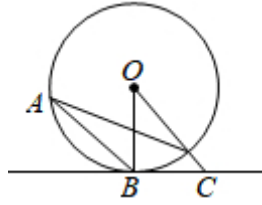
解析：设方程的另一个根为 m ，

根据题意得： $1+m=3$ ，

解得： $m=2$.

答案：2.

18. 如图，点 A, B, D 在 $\odot O$ 上， $\angle A=20^\circ$ ， BC 是 $\odot O$ 的切线， B 为切点， OD 的延长线交 BC 于点 C ，则 $\angle OCB=$ _____度.



解析：∵ $\angle A = 20^\circ$ ，
 ∴ $\angle BOC = 40^\circ$ ，
 ∵ BC 是 $\odot O$ 的切线，B 为切点，
 ∴ $\angle OBC = 90^\circ$ ，
 ∴ $\angle OCB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
 答案：50.

三、解答题(本大题共 8 个小题，第 19、20 题每小题 6 分，第 21、22 题每小题 6 分，第 22、23 题每小题 6 分，第 25、26 题每小题 6 分，共 66 分。解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算： $(-1)^{2018} - \sqrt{8} + (\pi - 3)^0 + 4\cos 45^\circ$.

解析：本题涉及零指数幂、乘方、二次根式化简和特殊角的三角函数值 4 个考点. 在计算时，需要针对每个考点分别进行计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.

答案：原式 $= 1 - 2\sqrt{2} + 1 + 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} = 2$.

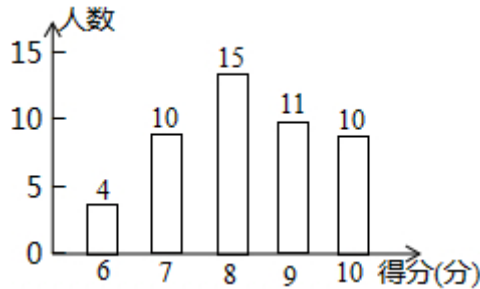
20. 先化简，再求值： $(a+b)^2 + b(a-b) - 4ab$ ，其中 $a=2$ ， $b=-\frac{1}{2}$.

解析：首先计算完全平方，计算单项式乘以多项式，然后再合并同类项，化简后，再代入 a、b 的值，进而可得答案.

答案：原式 $= a^2 + 2ab + b^2 + ab - b^2 - 4ab = a^2 - ab$ ，

当 $a=2$ ， $b=-\frac{1}{2}$ 时，原式 $= 4 + 1 = 5$.

21. 为了了解居民的环保意识，社区工作人员在光明小区随机抽取了若干名居民开展主题为“打赢蓝天保卫战”的环保知识有奖问答活动，并用得到的数据绘制了如图条形统计图(得分为整数，满分为 10 分，最低分为 6 分)



请根据图中信息，解答下列问题：

- (1) 本次调查一共抽取了 _____ 名居民；
- (2) 求本次调查获取的样本数据的平均数、众数和中位数；

(3) 社区决定对该小区 500 名居民开展这项有奖问答活动，得 10 分者设为“一等奖”，请你根据调查结果，帮社区工作人员估计需准备多少份“一等奖”奖品？

解析：(1) 根据总数=个体数量之和计算即可；

(2) 根据平均数、总数、中位数的定义计算即可；

(3) 利用样本估计总体的思想解决问题即可；

答案：(1) 共抽取：4+10+15+11+10=50(人)；

(2) 平均数 = $\frac{1}{50} (4 \times 6 + 10 \times 7 + 15 \times 8 + 11 \times 9 + 10 \times 10) = 8.26$ ；

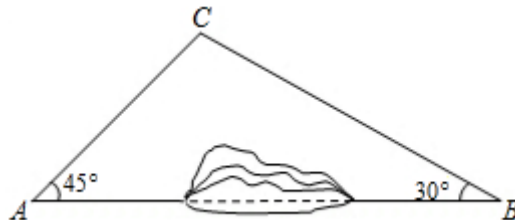
众数：得到 8 分的人最多，故众数为 8。

中位数：由小到大排列，知第 25, 26 平均分为 8 分，故中位数为 8 分；

(3) 得到 10 分占 $10 \div 50 = 20\%$ ，

故 500 人时，需要一等奖奖品 $500 \times 20\% = 100$ (份)。

22. 为加快城乡对接，建设全域美丽乡村，某地区对 A、B 两地间的公路进行改建. 如图，A、B 两地之间有一座山. 汽车原来从 A 地到 B 地需途径 C 地沿折线 ACB 行驶，现开通隧道后，汽车可直接沿直线 AB 行驶. 已知 $BC=80$ 千米， $\angle A=45^\circ$ ， $\angle B=30^\circ$.



(1) 开通隧道前，汽车从 A 地到 B 地大约要走多少千米？

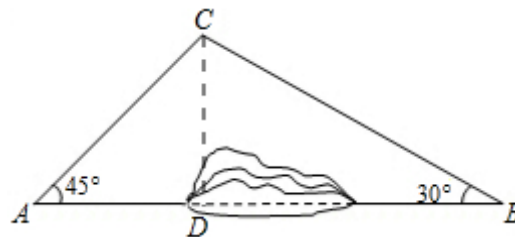
(2) 开通隧道后，汽车从 A 地到 B 地大约可以少走多少千米？(结果精确到 0.1 千米)(参考数

据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)

解析：(1) 过点 C 作 AB 的垂线 CD，垂足为 D，在直角 $\triangle ACD$ 中，解直角三角形求出 CD，进而解答即可；

(2) 在直角 $\triangle CBD$ 中，解直角三角形求出 BD，再求出 AD，进而求出汽车从 A 地到 B 地比原来少走多少路程。

答案：(1) 过点 C 作 AB 的垂线 CD，垂足为 D，



$\because AB \perp CD$ ， $\sin 30^\circ = \frac{CD}{BC}$ ， $BC=80$ 千米，

$\therefore CD = BC \cdot \sin 30^\circ = 80 \times \frac{1}{2} = 40$ (千米)，

$AC = \frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{40}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40\sqrt{2}$ (千米)，

$$AC+BC=80+40\sqrt{2} \approx 40 \times 1.41+80=136.4(\text{千米}),$$

答：开通隧道前，汽车从A地到B地大约要走136.4千米；

$$(2) \because \cos 30^\circ = \frac{BD}{BC}, \quad BC=80(\text{千米}),$$

$$\therefore BD=BC \cdot \cos 30^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}(\text{千米}),$$

$$\because \tan 45^\circ = \frac{CD}{AD}, \quad CD=40(\text{千米}),$$

$$\therefore AD = \frac{CD}{\tan 45^\circ} = \frac{40}{1} = 40(\text{千米}),$$

$$\therefore AB=AD+BD=40+40\sqrt{3} \approx 40+40 \times 1.73=109.2(\text{千米}),$$

$$\therefore \text{汽车从A地到B地比原来少走多少路程为：} AC+BC-AB=136.4-109.2=27.2(\text{千米}).$$

答：汽车从A地到B地比原来少走的路程为27.2千米。

23. 随着中国传统节日“端午节”的临近，东方红商场决定开展“欢度端午，回馈顾客”的让利促销活动，对部分品牌粽子进行打折销售，其中甲品牌粽子打八折，乙品牌粽子打七五折，已知打折前，买6盒甲品牌粽子和3盒乙品牌粽子需600元；打折后，买50盒甲品牌粽子和40盒乙品牌粽子需要5200元。

(1) 打折前甲、乙两种品牌粽子每盒分别为多少元？

(2) 阳光敬老院需购买甲品牌粽子80盒，乙品牌粽子100盒，问打折后购买这批粽子比不打折节省了多少钱？

解析：(1) 设打折前甲品牌粽子每盒 x 元，乙品牌粽子每盒 y 元，根据“打折前，买6盒甲品牌粽子和3盒乙品牌粽子需600元；打折后，买50盒甲品牌粽子和40盒乙品牌粽子需要5200元”，即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 根据节省钱数=原价购买所需钱数-打折后购买所需钱数，即可求出节省的钱数。

答案：(1) 设打折前甲品牌粽子每盒 x 元，乙品牌粽子每盒 y 元，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} 6x + 3y = 600 \\ 50 \times 0.8x + 40 \times 0.75y = 5200 \end{cases},$$

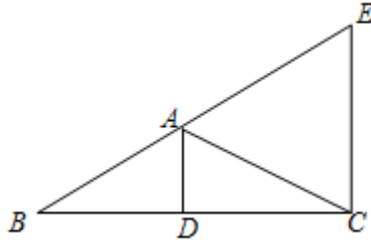
$$\text{解得：} \begin{cases} x = 40 \\ y = 120 \end{cases}.$$

答：打折前甲品牌粽子每盒40元，乙品牌粽子每盒120元。

$$(2) 80 \times 40 + 100 \times 120 - 80 \times 0.8 \times 40 - 100 \times 0.75 \times 120 = 3640(\text{元}).$$

答：打折后购买这批粽子比不打折节省了3640元。

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是边 BC 上的中线， $\angle BAD = \angle CAD$ ， $CE \parallel AD$ ， CE 交 BA 的延长线于点 E ， $BC=8$ ， $AD=3$ 。



- (1) 求 CE 的长;
 (2) 求证: $\triangle ABC$ 为等腰三角形.
 (3) 求 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 P 与内切圆圆心 Q 之间的距离.

解析: (1) 证明 AD 为 $\triangle BCE$ 的中位线得到 $CE=2AD=6$;

(2) 通过证明 $\triangle ABD \cong \triangle CAD$ 得到 $AB=AC$;

(3) 如图, 连接 BP、BQ、CQ, 先利用勾股定理计算出 $AB=5$, 设 $\odot P$ 的半径为 R, $\odot Q$ 的半径为 r, 在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中利用勾股定理得到 $(R-3)^2+4^2=R^2$, 解得 $R=\frac{25}{6}$, 则 $PD=\frac{7}{6}$, 再利用面积法

求出 $r=\frac{4}{3}$, 即 $QD=\frac{4}{3}$, 然后计算 $PD+QD$ 即可.

答案: (1) 解: $\because AD$ 是边 BC 上的中线,

$\therefore BD=CD$,

$\because CE \parallel AD$,

$\therefore AD$ 为 $\triangle BCE$ 的中位线,

$\therefore CE=2AD=6$;

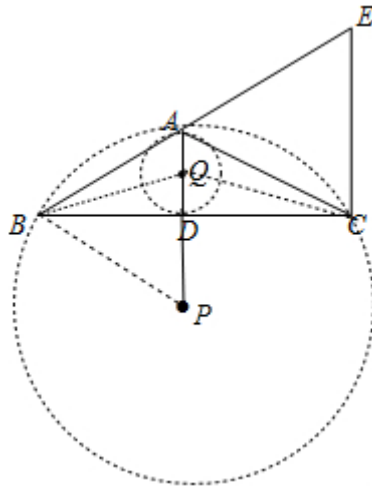
(2) 证明: $\because BD=CD, \angle BAD=\angle CAD, AD=AD$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAD$,

$\therefore AB=AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形.

(3) 如图, 连接 BP、BQ、CQ,



在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

设 $\odot P$ 的半径为 R, $\odot Q$ 的半径为 r,

在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中, $(R-3)^2+4^2=R^2$, 解得 $R=\frac{25}{6}$,

$$\therefore PD=PA-AD=\frac{25}{6}-3=\frac{7}{6},$$

$$\because S_{\triangle ABQ}+S_{\triangle BCQ}+S_{\triangle ACQ}=S_{\triangle ABC},$$

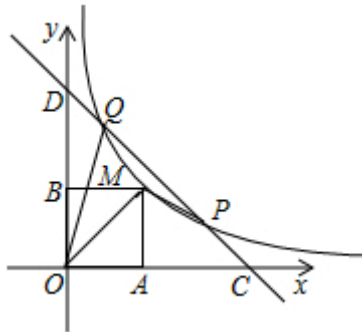
$$\therefore \frac{1}{2} \cdot r \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8, \text{ 解得 } r = \frac{4}{3},$$

$$\text{即 } QD = \frac{4}{3},$$

$$\therefore PQ = PD + QD = \frac{7}{6} + \frac{4}{3} = \frac{5}{2}.$$

答: $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 P 与内切圆圆心 Q 之间的距离为 $\frac{5}{2}$.

25. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数, $m > 1, x > 0$) 的图象经过点 $P(m, 1)$ 和 $Q(1, m)$, 直线 PQ 与 x 轴, y 轴分别交于 C, D 两点, 点 $M(x, y)$ 是该函数图象上的一个动点, 过点 M 分别作 x 轴和 y 轴的垂线, 垂足分别为 A, B .



(1) 求 $\angle OCD$ 的度数;

(2) 当 $m=3, 1 < x < 3$ 时, 存在点 M 使得 $\triangle OPM \sim \triangle OCP$, 求此时点 M 的坐标;

(3) 当 $m=5$ 时, 矩形 $OAMB$ 与 $\triangle OPQ$ 的重叠部分的面积能否等于 4.1 ? 请说明你的理由.

解析: (1) 想办法证明 $OC=OD$ 即可解决问题;

(2) 设 $M(a, \frac{3}{a})$, 由 $\triangle OPM \sim \triangle OCP$, 推出 $\frac{OP}{OC} = \frac{OM}{OP} = \frac{PM}{CP}$, 由此构建方程求出 a , 再分类求解即可解决问题;

(3) 不存在分三种情形说明: ①当 $1 < x < 5$ 时, 如图 1 中; ②当 $x \leq 1$ 时, 如图 2 中; ③当 $x \geq 5$ 时, 如图 3 中;

答案: (1) 设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+b$, 则有
$$\begin{cases} km + b = 1 \\ k + b = m \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -1 \\ b = m + 1 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + m + 1,$$

$$\text{令 } x=0, \text{ 得到 } y=m+1, \therefore D(0, m+1),$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得到 } x=m+1, \therefore C(m+1, 0),$$

$$\therefore OC=OD,$$

$$\because \angle COD=90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCD=45^\circ.$$

$$(2) \text{ 设 } M(a, \frac{3}{a}),$$

$$\because \triangle OPM \sim \triangle OCP,$$

$$\therefore \frac{OP}{OC} = \frac{OM}{OP} = \frac{PM}{CP},$$

$$\therefore OP^2 = OC \cdot OM,$$

$$\text{当 } m=3 \text{ 时, } P(3, 1), C(4, 0),$$

$$OP^2 = 3^2 + 1^2 = 10, OC = 4, OM = \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}},$$

$$\therefore \frac{OP}{OC} = \frac{10}{4},$$

$$\therefore 10 = 4 \sqrt{a^2 + \frac{9}{a^2}},$$

$$\therefore 4a^4 - 25a^2 + 36 = 0,$$

$$(4a^2 - 9)(a^2 - 4) = 0,$$

$$\therefore a = \pm \frac{3}{2}, a = \pm 2,$$

$$\because 1 < a < 3,$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} \text{ 或 } 2,$$

$$\text{当 } a = \frac{3}{2} \text{ 时, } M(\frac{3}{2}, 2), PM = \frac{\sqrt{13}}{2}, CP = \sqrt{2}, \frac{PM}{CP} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}} \neq \frac{\sqrt{10}}{4} \text{ (舍弃)},$$

$$\text{当 } a = 2 \text{ 时, } M(2, \frac{3}{2}), PM = \frac{\sqrt{5}}{2}, CP = \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{PM}{CP} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \text{ 成立,}$$

$$\therefore M(2, \frac{3}{2}).$$

(3) 不存在. 理由如下:

$$\text{当 } m=5 \text{ 时, } P(5, 1), Q(1, 5), \text{ 设 } M(x, \frac{5}{x}),$$

$$OP \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{5}x, OQ \text{ 的解析式为 } y = 5x,$$

① 当 $1 < x < 5$ 时, 如图 1 中,

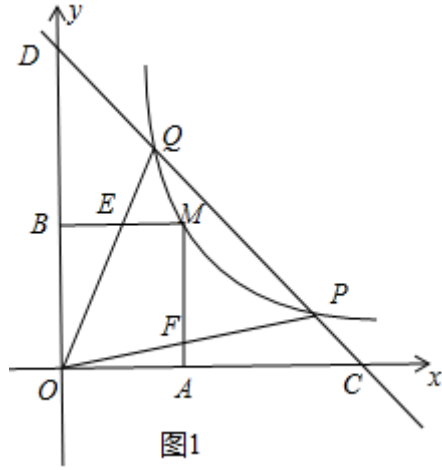


图1

$$\therefore E\left(\frac{1}{x}, \frac{5}{x}\right), F\left(x, \frac{1}{5}x\right),$$

$$S = S_{\text{矩形OAMB}} - S_{\triangle OAF} - S_{\triangle OBE} = 5 - \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{5}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{5}{x} = 4.1,$$

$$\text{化简得到: } x^4 - 9x^2 + 25 = 0,$$

$$\Delta < 0,$$

\therefore 没有实数根.

②当 $x \leq 1$ 时, 如图 2 中,

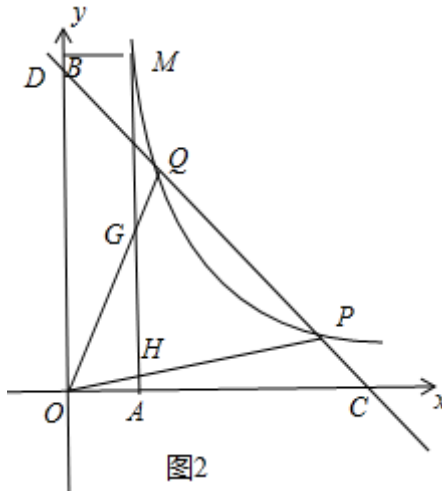


图2

$$S = S_{\triangle OGH} < S_{\triangle OAM} = 2.5,$$

\therefore 不存在,

③当 $x \geq 5$ 时, 如图 3 中,

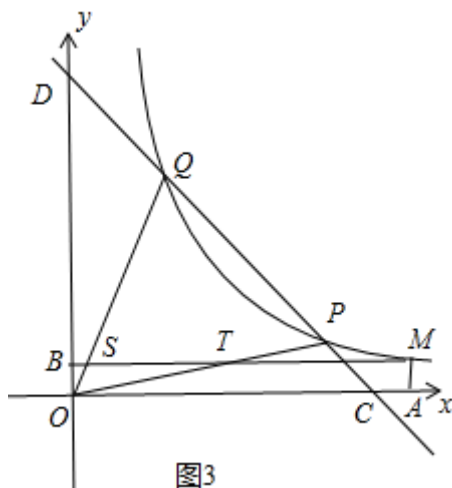


图3

$$S = S_{\triangle OTS} < S_{\triangle OBM} = 2.5,$$

\therefore 不存在,

综上所述, 不存在.

26. 我们不妨约定: 对角线互相垂直的凸四边形叫做“十字形”.

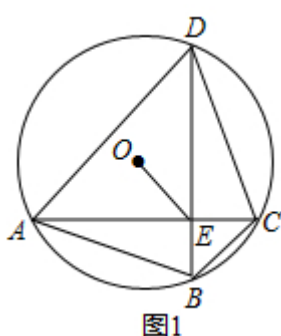


图1

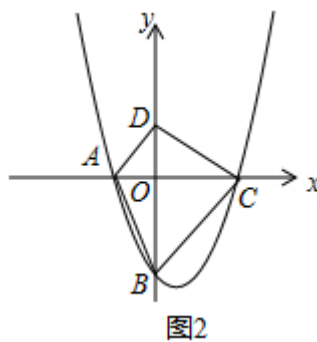


图2

(1) ①在“平行四边形, 矩形, 菱形, 正方形”中, 一定是“十字形”的有_____;

②在凸四边形 ABCD 中, $AB=AD$ 且 $CB \neq CD$, 则该四边形_____“十字形”. (填“是”或“不是”)

(2) 如图 1, A, B, C, D 是半径为 1 的 $\odot O$ 上按逆时针方向排列的四个动点, AC 与 BD 交于点 E, $\angle ADB - \angle CDB = \angle ABD - \angle CBD$, 当 $6 \leq AC^2 + BD^2 \leq 7$ 时, 求 OE 的取值范围;

(3) 如图 2, 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0, c < 0$) 与 x 轴交于 A, C 两点 (点 A 在点 C 的左侧), B 是抛物线与 y 轴的交点, 点 D 的坐标为 $(0, -ac)$, 记“十字形” ABCD 的面积为 S , 记 $\triangle AOB, \triangle COD, \triangle AOD, \triangle BOC$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3, S_4 , 求同时满足下列三个条件的抛物线的解析式;

① $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$; ② $\sqrt{S} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4}$; ③ “十字形” ABCD 的周长为 $12\sqrt{10}$.

解析: (1) 利用“十字形”的定义判断即可;

(2) 先判断出 $\angle ADB + \angle CAD = \angle ABD + \angle CAB$, 进而判断出 $\angle AED = \angle AEB = 90^\circ$, 即: $AC \perp BD$, 再判断出四边形 OMEN 是矩形, 进而得出 $OE^2 = 2 - \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$, 即可得出结论;

(3) 由题意得, $A\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), B(0, c), C\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right), D(0, -ac)$, 求出 $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = -$

$$\frac{1}{2} (ac+c) \times \frac{\sqrt{a}}{a}, S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{c(\sqrt{a}+b)}{4}, S_2 = \frac{1}{2} OC \cdot OD = \frac{c(\sqrt{a}-b)}{4}, S_3 = \frac{1}{2} OA \times OD =$$

$$\frac{c(\sqrt{a}+b)}{4}, S_4 = \frac{1}{2} OB \times OC = \frac{c(\sqrt{a}-b)}{4}, \text{进而建立方程}$$

$$\frac{\sqrt{-c(\sqrt{a}+b)}}{\sqrt{4a}} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{a}-b)}}{2} = \frac{\sqrt{-c(\sqrt{a}+b)}}{2} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{a}-b)}}{\sqrt{4a}}, \text{求出 } a=1, \text{再求出 } b=0,$$

进而判断出四边形 ABCD 是菱形, 求出 $AD=3\sqrt{10}$, 进而求出 $c=-9$, 即可得出结论.

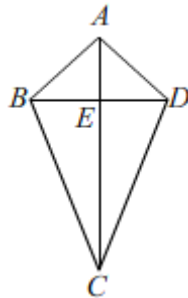
答案: (1) ① ∵ 菱形, 正方形的对角线互相垂直,

∴ 菱形, 正方形是: “十字形”,

∵ 平行四边形, 矩形的对角线不一定垂直,

∴ 平行四边形, 矩形不是 “十字形”;

② 如图,



$$\text{当 } CB=CD \text{ 时, 在 } \triangle ABC \text{ 和 } \triangle ADC \text{ 中, } \begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \\ AC = AC \end{cases},$$

∴ $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS),

∴ $\angle BAC = \angle DAC$,

∴ $AB = AD$,

∴ $AC \perp BD$,

∴ 当 $CB \neq CD$ 时, 四边形 ABCD 不是 “十字形”;

(2) ∵ $\angle ADB + \angle CBD = \angle ABD + \angle CDB$, $\angle CBD = \angle CDB = \angle CAB$,

∴ $\angle ADB + \angle CAD = \angle ABD + \angle CAB$,

∴ $180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle AEB$,

∴ $\angle AED = \angle AEB = 90^\circ$,

∴ $AC \perp BD$,

过点 O 作 $OM \perp AC$ 于 M, $ON \perp BD$ 于 N, 连接 OA, OD,

∴ $OA = OD = 1$, $OM^2 = OA^2 - AM^2$, $ON^2 = OD^2 - DN^2$, $AM = \frac{1}{2} AC$, $DN = \frac{1}{2} BD$, 四边形 OMEN 是矩形,

∴ $ON = ME$, $OE^2 = OM^2 + ME^2$,

∴ $OE^2 = OM^2 + ON^2 = 2 - \frac{1}{4} (AC^2 + BD^2)$,

$$\because 6 \leq AC^2 + BD^2 \leq 7,$$

$$\therefore 2 - \frac{7}{4} \leq OE^2 \leq 2 - \frac{3}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq OE^2 \leq \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq OE \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (OE > 0);$$

$$(3) \text{ 由题意得, } A\left(\frac{-b - \sqrt{b}}{2a}, 0\right), B(0, c), C\left(\frac{-b + \sqrt{b}}{2a}, 0\right), D(0, -ac),$$

$$\because a > 0, c < 0,$$

$$\therefore OA = \frac{\sqrt{b} + b}{2a}, OB = -c, OC = \frac{\sqrt{b} - b}{2a}, OD = -ac, AC = \frac{\sqrt{b}}{a}, BD = -ac - c,$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = -\frac{1}{2} (ac + c) \times \frac{\sqrt{b}}{a}, S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB = -\frac{c(\sqrt{b} + b)}{4}, S_2 = \frac{1}{2} OC \cdot OD = -\frac{c(\sqrt{b} - b)}{4},$$

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \times OD = \frac{c(\sqrt{b} + b)}{4}, S_4 = \frac{1}{2} OB \times OC = \frac{c(\sqrt{b} - b)}{4},$$

$$\because \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}, \sqrt{S} = \sqrt{S_3} + \sqrt{S_4},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{-c(\sqrt{b} + b)}}{\sqrt{4a}} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{b} - b)}}{2} = \frac{\sqrt{-c(\sqrt{b} + b)}}{2} + \frac{\sqrt{-c(\sqrt{b} - b)}}{\sqrt{4a}},$$

$$\therefore \sqrt{4a} = 2,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore S = -c\sqrt{b}, S_1 = -\frac{c(\sqrt{b} + b)}{4}, S_4 = -\frac{c(\sqrt{b} - b)}{4},$$

$$\because \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2},$$

$$\therefore S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2},$$

$$\therefore -c\sqrt{b} = -\frac{c\sqrt{b}}{2} + 2\sqrt{\frac{c^2 \cdot (-4c)}{16}},$$

$$\therefore -\frac{c\sqrt{b}}{2} = -c\sqrt{-c},$$

$$\therefore \sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{-4c},$$

$$\therefore b=0,$$

$$\therefore A(-\sqrt{c}, 0), B(0, c), C(\sqrt{-c}, 0), d(0, -c),$$

\therefore 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore 4AD=12\sqrt{10},$$

$$\therefore AD=3\sqrt{10},$$

即: $AD^2=90,$

$$\therefore AD^2=c^2-c,$$

$$\therefore c^2-c=90,$$

$$\therefore c=-9 \text{ 或 } c=10(\text{舍}),$$

即: $y=x^2-9.$