

2014年吉林省长春市中考模拟数学

一、选择题（每小题3分，共24分）

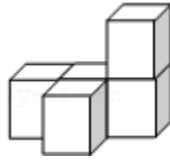
1. 下列各数 0, -1, 4, $-\frac{5}{12}$ 中, 最小的数是 ()

- A. 0
- B. 4
- C. -1
- D. $-\frac{5}{12}$

解析: $-1 < -\frac{5}{12} < 0 < 4$,

答案: C.

2. 如图是由五个完全相同的小正方体组成的立体图形, 这个立体图形的主视图是 ()



- A.
- B.
- C.
- D.

解析: 从正面看易得第一层有 3 个正方形, 第二层最右边有一个正方形.

答案: D.

3. 下列运算中, 正确的是 ()

- A. $a^2 + a^3 = a^5$
- B. $5a - a = 4a$
- C. $a^4 \cdot a^5 = a^{20}$
- D. $a^{12} \div a^3 = a^4$

解析: A、不是同底数幂的乘法, 指数不能相加, 故 A 错误;

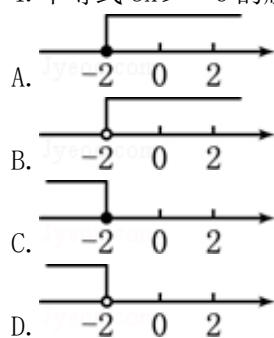
B、系数相加字母部分不变, 故 B 正确;

C、底数不变指数相加, 故 C 错误;

D、底数不变指数相减, 故 D 错误;

答案：B.

4. 不等式 $3x \geq -6$ 的解集在数轴上表示为 ()

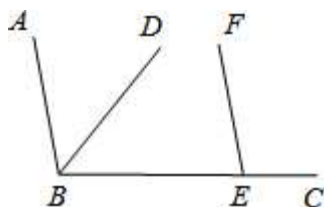


解析： $3x \geq -6$,

$x \geq -2$,

答案：A.

5. 如图，BD 平分 $\angle ABC$ ，点 E 在 BC 上， $EF \parallel AB$. 若 $\angle ABD = 50^\circ$ ，则 $\angle BEF$ 的大小为 ()



A. 100°

B. 90°

C. 80°

D. 70°

解析： \because BD 平分 $\angle ABC$ ， $\angle ABD = 50^\circ$ ，

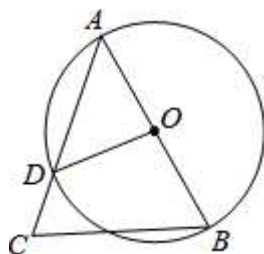
$\therefore \angle ABC = 2\angle ABD = 100^\circ$ ，

$\because EF \parallel AB$ ，

$\therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle ABC = 80^\circ$.

答案：C.

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$. 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D，则 $\angle BOD$ 的大小为 ()



A. 130°

B. 120°

C. 110°

D. 100°

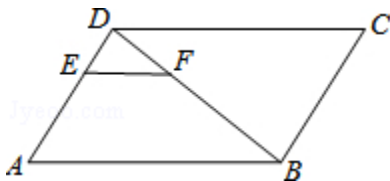
解析： \because 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 2\angle A = 100^\circ.$$

答案: D.

7. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 点 E、F 分别为边 AD、BD 上的点, $EF \parallel AB$. 若 $DE = \frac{1}{2}EA$, $EF = 4$, 则 CD 的长为 ()



- A. 6
- B. 8
- C. 12
- D. 16

解析: 如图, $DE = \frac{1}{2}EA$,

$$\therefore DE = \frac{1}{3}DA.$$

$$\because EF \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{DE}{DA} = \frac{EF}{AB}, \text{ 即 } \frac{1}{3} = \frac{EF}{AB},$$

$$\text{又 } \because EF = 4,$$

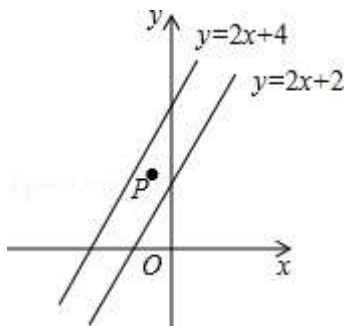
$$\therefore AB = 12.$$

又 \because 四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore CD = AB = 12.$$

答案: C.

8. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 $P(-\frac{1}{2}, a)$ 在直线 $y = 2x + 2$ 与直线 $y = 2x + 4$ 之间, 则 a 的取值范围是 ()



- A. $2 < a < 4$
- B. $1 < a < 3$
- C. $1 < a < 2$

D. $0 < a < 2$

解析： 当 P 在直线 $y=2x+2$ 上时， $a=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = -1 + 2 = 1$ ，

当 P 在直线 $y=2x+4$ 上时， $a=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = -1 + 4 = 3$ ，

则 $1 < a < 3$ ，

答案： B.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

9. 因式分解： $2x^2 - 18 =$ _____.

解析： $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x+3)(x-3)$ ，

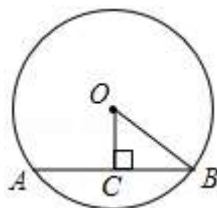
答案： $2(x+3)(x-3)$.

10. 买单价为 3 元的笔记本 m 本，付出 n 元，应找回_____元.（用含有 m 、 n 的代数式表示）

解析： 应找回 $(n - 3m)$ 元.

答案： $(n - 3m)$.

11. 如图，在 $\odot O$ 中， $OC \perp$ 弦 AB 于点 C ， $AB=4$ ， $OC=1$ ，则 OB 的长是_____.



解析： $\because OC \perp$ 弦 AB 于点 C ，

$$\therefore BC = AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

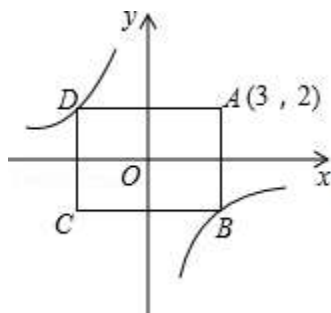
在 $Rt\triangle OBC$ 中， $OC=1$ ， $BC=2$ ，

$$\therefore OB = \sqrt{OC^2 + BC^2} = \sqrt{5}.$$

答案： $\sqrt{5}$

12. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对称轴与坐标轴重合，顶点 A 的坐标为

$(3, 2)$. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 B ，则 k 的值为_____.

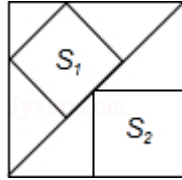


解析： \because 矩形 $ABCD$ 的对称轴与坐标轴重合，

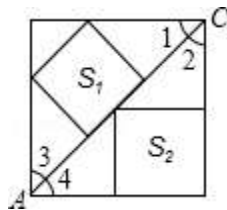
\therefore 点 D 和点 A 关于 y 轴对称，

而 A 点坐标为 (3, 2),
 \therefore D 点坐标为 (-3, 2),
 $\therefore k = -3 \times 2 = -6$.
 答案: -6.

13. 如图, 边长为 6 的大正方形中有两个小正方形, 小正方形的各顶点均在大正方形的边或对角线上. 若两个小正方形的面积分别为 S_1 、 S_2 , 则 S_1 与 S_2 的和为_____.

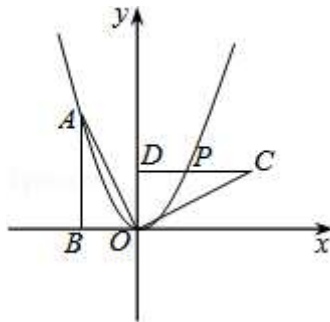


解析: 如图,



由正方形的性质, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 45^\circ$,
 所以, 四个角所在的三角形都是等腰直角三角形,
 \therefore 正方形的边长为 6,
 $\therefore AC = 6\sqrt{2}$,
 \therefore 两个小正方形的边长分别为 $\frac{1}{3} \times 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,
 $\frac{1}{2} \times 6 = 3$,
 $\therefore S_1$ 与 S_2 的和为 $(2\sqrt{2})^2 + 3^2 = 8 + 9 = 17$.
 答案: 17.

14. 如图, 在平面直角坐标系中, $Rt\triangle OAB$ 的顶点 A (-2, 4) 在抛物线 $y = ax^2$ 上, 直角顶点 B 在 x 轴上. 将 $Rt\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle OCD$, 边 CD 与该抛物线交于点 P. 则 DP 的长为_____.



解析: 把 A (-2, 4) 代入 $y = ax^2$ 得 $4a = 4$, 解得 $a = 1$,
 \therefore 抛物线的解析式为 $y = x^2$,
 $\therefore Rt\triangle OAB$ 的顶点 A 的坐标为 (-2, 4), $AB \perp x$ 轴,

$\therefore AB=4, OB=2,$
 $\therefore \text{Rt}\triangle OAB$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle OCD,$
 $\therefore OD=OB=2, \angle ODC=\angle OBA=90^\circ,$
 $\therefore D$ 点坐标为 $(0, 2), CD \perp y$ 轴,
 $\therefore P$ 点的纵坐标为 $2,$
 把 $y=2$ 代入 $y=x^2$ 得 $x^2=2,$ 解得 $x=\pm\sqrt{2}$ (负值舍去),
 $\therefore P$ 点坐标为 $(\sqrt{2}, 2),$
 $\therefore PD=\sqrt{2}.$
 答案: $\sqrt{2}.$

三、解答题 (本大题共 10 小题, 共 78 分)

15. 先化简, 再求值: $\left(\frac{3x+4}{x^2-1} - \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x+2}{x^2-2x+1},$ 其中 $x=\sqrt{2}.$

解析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 x 的值代入进行计算即可.

答案: 原式 = $\left(\frac{3x+4-2x-2}{(x+1)(x-1)}\right) \div \frac{x+2}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x+2}{(x+1)(x-1)} \times \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

$$= \frac{x-1}{x+1},$$

当 $x=\sqrt{2}$ 时, 原式 = $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}.$

16. 把大小和形状完全相同的 6 张卡片分成两组, 每组 3 张, 卡片上分别标有数字 1, 2, 3, 将这两组卡片分别放入两个盒子中搅匀, 再从每个盒中各随机抽取 1 张. 用画树状图 (或列表) 的方法求抽出的 2 张卡片上数字之和为奇数的概率.

解析: 首先根据题意列出表格, 然后由表格即可求得所有等可能的结果与抽出的 2 张卡片上数字之和为奇数的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

答案: 列表得:

	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

\therefore 共有 9 种等可能的结果, 抽出的 2 张卡片上数字之和为奇数的有 4 种情况,

\therefore 抽出的 2 张卡片上数字之和为奇数的概率为: $\frac{4}{9}.$

17. 春城服装店用 4 500 元购进一批某款式 T 恤衫, 由于深受顾客喜爱, 很快售完, 又用 4 950 元购进第二批该款式 T 恤衫, 所购数量与第一批相同, 但每件进价比第一批多了 9 元, 求第二批该款式 T 恤衫每件进价.

解析: 设第二批 T 恤衫每件进价 x 元. 则第二批每件进价是 $(x+9)$ 元, 再根据等量关系: 第二批进的件数=第一批进的件数可得方程.

答案: 设第二批 T 恤衫每件进价 x 元.

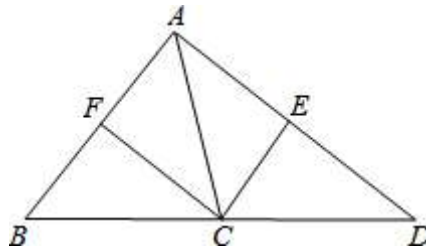
依题意, 得 $\frac{4500}{x-9} = \frac{4950}{x}$.

解得 $x=99$.

经检验, $x=99$ 是原方程的解, 且符合题意.

答: 第二批 T 恤衫每件进价是 99 元.

18. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 延长线上一点, 且 $CD=CA$, E 是 AD 的中点, CF 平分 $\angle ACB$ 交 AB 于点 F. 求证: $CE \perp CF$.



解析: 根据三线合一证明 CF 平分 $\angle ACB$, 然后根据 CF 平分 $\angle ACB$, 根据邻补角的定义即可证得.

答案: $\because CD=CA$, E 是 AD 的中点,

$$\therefore \angle ACE = \angle DCE.$$

\because CF 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle ACF = \angle BCF.$$

$$\because \angle ACE + \angle DCE + \angle ACF + \angle BCF = 180^\circ,$$

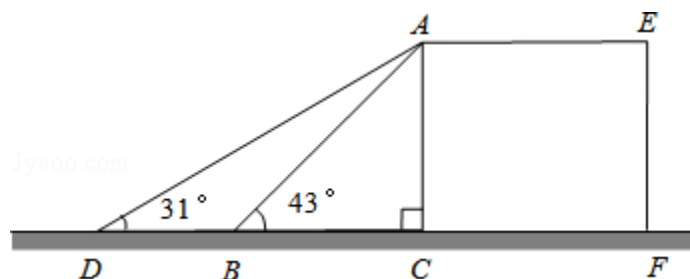
$$\therefore \angle ACE + \angle ACF = 90^\circ.$$

即 $\angle ECF = 90^\circ$.

$$\therefore CE \perp CF.$$

19. 某超市利用一个带斜坡的平台装卸货物, 其纵断面 ACFE 如图所示. AE 为台面, AC 垂直于地面, AB 表示平台前方的斜坡. 斜坡的坡角 $\angle ABC$ 为 43° , 坡长 AB 为 2m. 为保障安全, 又便于装卸货物, 决定减小斜坡 AB 的坡角, AD 是改造后的斜坡 (D 在直线 BC 上), 坡角 $\angle ADC$ 为 31° . 求斜坡 AD 底端 D 与平台 AC 的距离 CD. (结果精确到 0.01m)

[参考数据: $\sin 43^\circ = 0.682$, $\cos 43^\circ = 0.731$, $\tan 43^\circ = 0.933$; $\sin 31^\circ = 0.515$, $\cos 31^\circ = 0.857$, $\tan 31^\circ = 0.601$].



解析： 首先根据 $\angle ABC=43^\circ$, $AB=2m$, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, 求出 AC 的长度, 然后根据 $\angle ADC=31^\circ$, 利用三角函数的知识在 $Rt\triangle ACD$ 中求出 CD 的长度.

答案： 在 $Rt\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle ABC=43^\circ, AB=2m,$$

$$\therefore AC=AB \cdot \sin 43^\circ = 2 \times 0.682 = 1.364 \text{ (m)}$$

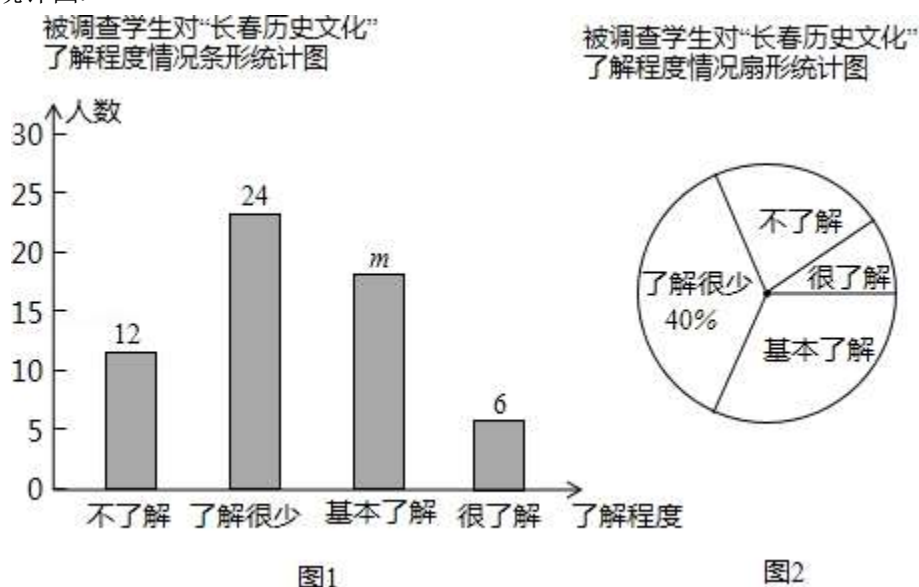
在 $Rt\triangle ADC$ 中,

$$\because \angle ADC=31^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{AC}{\tan 31^\circ} = \frac{1.364}{0.601} \approx 2.27 \text{ (m)}.$$

即斜坡 AD 底端 D 与平台 AC 的距离 CD 为 $2.27m$.

20. 某校就同学们对“长春历史文化”的了解程度进行随机抽样调查, 将调查结果绘制成如下两幅统计图.



- (1) 本次共调查____名学生.
- (2) 求条形统计图中 m 的值.
- (3) 若该校共有学生 1 000 名, 按上述统计结果, 估计该校不了解“长春历史文化”的学生人数.

解析： (1) 根据了解很少的有 24 人, 占 40%, 即可求得总人数;

(2) 利用调查的总人数减去其它各项的人数即可求得;

(3) 利用 1000 乘以不了解“长春历史文化”的人所占的比例即可求解.

答案： (1) 调查的总人数是: $24 \div 40\% = 60$ (人),

故答案是: 60;

$$(2) m = 60 - 12 - 24 - 6 = 18,$$

答: m 的值为 18;

(3) 60 人中有 12 人不了解长春历史文化, 估计全校 1000 人中不了解长春历史文化的占 20%, $1000 \times 20\% = 200$.

估计全校 1 000 人中不了解长春历史文化的人约为 200 人.

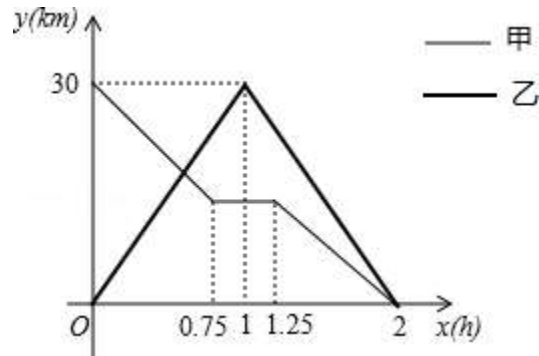
21. 在一条笔直的公路上有 A、B 两地. 甲、乙两人同时出发, 甲骑电动车从 A 地到 B 地, 中途出现故障后停车维修, 修好车后以原速继续行驶到 B 地; 乙骑摩托车从 B 地到 A 地, 到达

A地后立即按原路原速返回，结果两人同时到B地.如图是甲、乙两人与B地的距离 y (km) 与乙行驶时间 x (h) 之间的函数图象.

(1) 求甲修车前的速度.

(2) 求甲、乙第一次相遇的时间.

(3) 若两人之间的距离不超过 10km 时，能够用无线对讲机保持联系，请直接写出乙在行进中能用无线对讲机与甲保持联系的 x 取值范围.



解析： (1) 由函数图象可以求出甲行驶的时间，就可以由路程 \div 时间求出甲行驶的速度；

(2) 由相遇问题的数量关系直接求出结论；

(3) 设甲在修车前 y 与 x 之间的函数关系式为 $y_{甲1}=kx+b$ ，甲在修车后 y 与 x 之间的函数关系式为 $y_{甲2}=k_3x+b_3$ ，乙前往 A 地的距离 y (km) 与乙行驶时间 x (h) 之间的关系式为 $y_{乙1}=k_1x$ ，设乙返回 B 地距离 B 地的距离 y (km) 与乙行驶时间 x (h) 之间的关系式为 $y_{乙2}=k_2x+b_2$ ，由待定系数法求出解析式建立不等式组求出其解即可.

答案： (1) 由题意，得

$$30 \div \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 20 \text{ (km/h)} .$$

\therefore 甲修车前的速度为 20km/h；

(2) 由函数图象，得

$$(30+20)x=30,$$

解得 $x=0.6$.

\therefore 甲、乙第一次相遇是在出发后 0.6 小时；

(3) 设甲在修车前 y 与 x 之间的函数关系式为 $y_{甲1}=kx+b$ ，由题意，得

$$\begin{cases} 30=b \\ 15=0.75k+b \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k=-20 \\ b=30 \end{cases},$

$$y_{甲1} = -20x+30,$$

设甲在修车后 y 与 x 之间的函数关系式为 $y_{甲2}=k_3x+b_3$ ，由题意，得

$$\begin{cases} 15=1.25k_3+b_3 \\ 0=2k_3+b_3 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} k_3=-20 \\ b_3=40 \end{cases},$

$$\therefore y_{甲2} = -20x+40,$$

设乙前往 A 地的距离 y (km) 与乙行驶时间 x (h) 之间的关系式为 $y_{乙1}=k_1x$ ，由题意，得

$$30=k_1,$$

$$\therefore y_{z1}=30x;$$

设乙返回 B 地距离 B 地的距离 y (km) 与乙行驶时间 x (h) 之间的关系式为 $y_{z2}=k_2x+b_2$, 由题意, 得

$$\begin{cases} 30=k_2+b_2 \\ 0=2k_2+b_2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_2=-30 \\ b_2=60 \end{cases},$$

$$\therefore y=-30x+60.$$

$$\text{当 } \begin{cases} -2x+30-30x \leq 10 \\ 30x-15 \leq 10 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$\therefore \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{6};$$

$$\begin{cases} -30x+60-15 \leq 10 \\ x \leq 2 \end{cases},$$

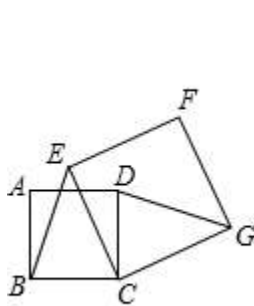
$$\text{解得: } \frac{7}{6} \leq x \leq 2.$$

$$\therefore \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{5}{6}, \frac{7}{6} \leq x \leq 2.$$

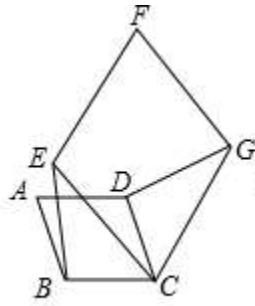
22. 【感知】如图①, 四边形 ABCD、CEFG 均为正方形. 可知 $BE=DG$.

【拓展】如图②, 四边形 ABCD、CEFG 均为菱形, 且 $\angle A = \angle F$. 求证: $BE=DG$.

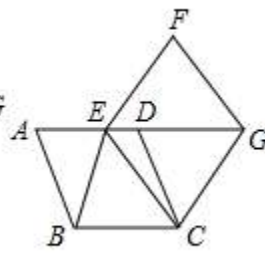
【应用】如图③, 四边形 ABCD、CEFG 均为菱形, 点 E 在边 AD 上, 点 G 在 AD 延长线上. 若 $AE=2ED$, $\angle A = \angle F$, $\triangle EBC$ 的面积为 8, 则菱形 CEFG 的面积为_____.



图①



图②



图③

解析: 拓展: 由四边形 ABCD、四边形 CEFG 均为菱形, 利用 SAS 易证得 $\triangle BCE \cong \triangle DCG$, 则可得 $BE=DG$;

应用: 由 $AD \parallel BC$, $BE=DG$, 可得 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BEC} = S_{\triangle DCG} = 8$, 又由 $AE=2ED$, 可求得 $\triangle CDE$ 的面积, 继而求得答案.

答案: 拓展: \because 四边形 ABCD、四边形 CEFG 均为菱形,

$$\therefore BC=CD, CE=CG, \angle BCD = \angle A, \angle ECG = \angle F.$$

$$\therefore \angle A = \angle F,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ECG.$$

$$\therefore \angle BCD - \angle ECD = \angle ECG - \angle ECD,$$

即 $\angle BCE = \angle DCG$.

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCG$ 中,

$$\begin{cases} BC=CD \\ \angle BCE=\angle DCG, \\ CE=CG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG$ (SAS),

$\therefore BE=DG$.

应用: \because 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore BE=DG$,

$\therefore S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} = S_{\triangle BEC} = S_{\triangle CDG} = 8$,

$\therefore AE=2ED$,

$$\therefore S_{\triangle CDE} = \frac{1}{3} \times 8 = \frac{8}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BCG} = S_{\triangle CDE} + S_{\triangle CDG} = \frac{32}{3},$$

$$\therefore S_{\text{菱形CEFG}} = 2S_{\triangle BCG} = \frac{64}{3}.$$

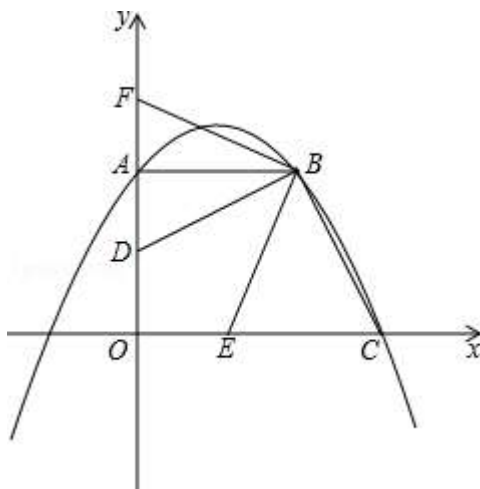
故答案为: $\frac{64}{3}$.

23. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 在 y 轴的正半轴上, 点 B 在第一象限, 点 C 的坐标为 $(3, 0)$. $AB \parallel x$ 轴, 且 $OA=AB$, 抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 经过点 A, B, C . 连结 BC , 过点 B 作 $BD \perp BC$, 交 OA 于点 D . 将 $\angle CBD$ 绕点 B 按顺时针方向旋转得到 $\angle EBF$, 角的两边分别交 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴于 E, F .

(1) 求 a, b 的值.

(2) 当直线 BF 经过抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 的顶点时, 求 CE 的长.

(3) 连结 EF . 设 $\triangle BEF$ 与 $\triangle BEC$ 的面积之差为 S . 当 CE 为何值时 S 最小, 求出这个最小值.



解析: (1) 把点 B, C 的坐标分别代入抛物线解析式, 列出关于 a, b 的方程组, 通过解方程组来求它们的值;

(2)如图,过点G作GH⊥AB于点H,过点B作BM⊥OC于点M.构建全等三角形:△EBM≌△FBA

(AAS). 则EM=AF. $\tan \angle ABF = \frac{AF}{AB} = \frac{HG}{HB}$, 易求 $AF = \frac{4}{3}$. 故

$$CE = CM + EM = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3};$$

(3)设CE=m, 则EM=m-1或1-m. 在直角△BEM中, 利用勾股定理得到 $BE^2 = EM^2 + BM^2 = m^2 - 2m + 5$.

又由(2)中的全等三角形的对应边相等推知: BF=BE. 易求 $S = \frac{1}{2} (m-2)^2 + \frac{1}{2}$. 根据抛物线

的性质知: 当m=2时, $S_{\text{最小}} = \frac{1}{2}$.

答案: 解: (1) 根据题意, B(2, 2), C(3, 0), 则

$$\begin{cases} 4a+2b+2=2 \\ 9a+3b+2=0. \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3}. \end{cases};$$

(2) 由(1)知, 经过A、B、C的抛物线为 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$.

故顶点G的坐标为 $(1, \frac{8}{3})$.

如图, 过点G作GH⊥AB于点H, 则AH=BH=1, $GH = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

过点B作BM⊥OC于点M. 则四边形ABMO为正方形.

∴BA=BM.

∴∠ABM=∠EBF=90°,

∴∠EBM=∠FBA.

∴∠BME=∠BAF=90°,

∴在△EBM与△FBA中, $\begin{cases} \angle EBM = \angle FBA \\ \angle BME = \angle BAF = 90^\circ \\ BM = BA \end{cases},$

∴△EBM≌△FBA (AAS).

∴EM=AF.

∴ $\tan \angle ABF = \frac{AF}{AB} = \frac{HG}{HB}$,

∴ $AF = \frac{4}{3}$.

∴ $EM = AF = \frac{4}{3}$.

又∵C(3, 0), B(2, 2),

∴CM=1.

∴ $CE = CM + EM = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}$;

(3) 如图, 连接 EF.

设 $CE=m$, 则 $EM=m-1$ 或 $1-m$,

$$\therefore BE^2 = EM^2 + BM^2 = (m-1)^2 + 2^2 = m^2 - 2m + 5.$$

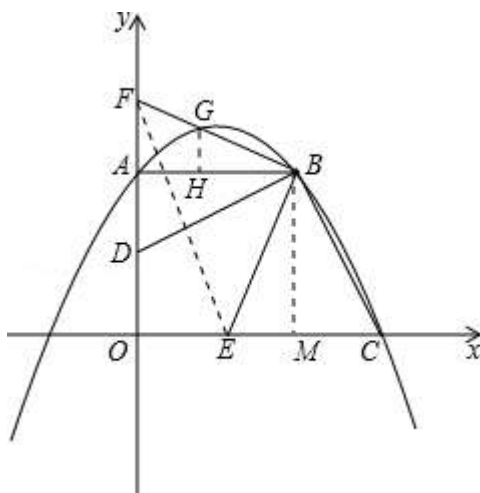
又 $\because \triangle FBA \cong \triangle EBM$,

$$\therefore BF = BE.$$

$$\therefore S = S_{\triangle BEF} - S_{\triangle BEC}.$$

$$\text{即 } S = \frac{1}{2} (m-2)^2 + \frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } m=2 \text{ 时, } S_{\text{最小}} = \frac{1}{2}.$$



24. 将 $Rt\triangle ABC$ 和 $Rt\triangle DEF$ 按如图①摆放 (点 C 与点 E 重合), 点 B、C (E)、F 在同一条直线上. $\triangle ABC$ 沿 EF 所在直线以每秒 1 个单位的速度向右匀速运动, AC 边与折线 ED - DF 的交点为 P, 如图②. 当 $\triangle ABC$ 的边 AB 经过点 D 时, 停止运动. 已知 $\angle ACB = \angle EDF = 90^\circ$, $\angle DEF = 45^\circ$, $AC=4$, $BC=3$, $EF=6$. 设运动时间为 t (秒).

(1) 当点 P 在 ED 边上时, AP 的长为_____ (用含 t 的代数式表示).

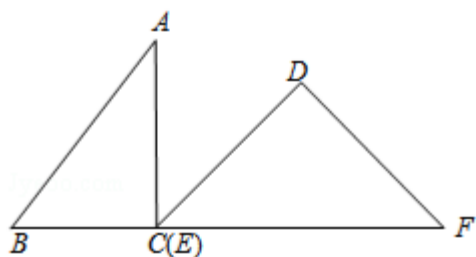
(2) 当边 AB 经过点 D 时, 求 t 的值.

(3) 设 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的重叠部分的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系.

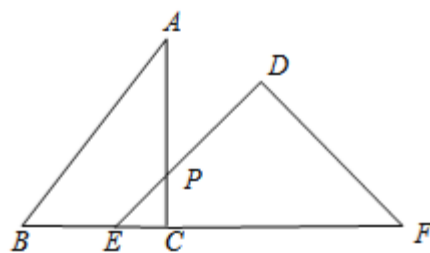
(4) 在 $\triangle ABC$ 运动的同时, 点 Q 从 $\triangle ABC$ 的顶点 B 出发, 沿 B - A - B 以每秒 2 个单位的速度匀速运动, 当 $\triangle ABC$ 停止运动时, 点 Q 也随之停止.

①当 $PQ \perp AB$ 时, 求 t 的值.

②当以 A、P、Q 为顶点的四边形 APGQ 为菱形时, 直接写出菱形 APGQ 的周长.



图①



图②

解析：（1）判断出 $\triangle PCE$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得 $PC=EC$ ，然后根据 $AP=AC-PC$ 答案；

（2）过点D作 $DM \perp EF$ 于M，根据等腰直角三角形的性质求出 $ME=3$ ，再表示出BM，然后根据 $\triangle DBM$ 和 $\triangle ABC$ 相似，利用相似三角形对应边成比例列式求解得到 $t=\frac{15}{4}$ ；

（3）分① $0 \leq t \leq 3$ 时，重叠部分为 $\triangle PCE$ ，然后根据三角形的面积公式列式整理即可；② $3 < t \leq \frac{15}{4}$ 时，设AB、DE相交于点G，过点G作 $GH \perp EF$ 于H，表示出BE，再利用 $\angle ABC$ 的正切用GH表示出BH，然后根据 $EB+BH=GH$ 整理得到GH的表达式，再表示出PC、CF，然后根据重叠部分的面积 $=S_{\triangle DEF} - S_{\triangle BEG} - S_{\triangle PCF}$ 列式整理即可得解；

（4）①根据两组角对应相等的两个三角形相似判断出 $\triangle AQP \sim \triangle ACB$ ，再根据相似三角形对应边成比例分点P在DE上，点Q从B到A和从A到B两种情况列式求即可，点P在DF上，表示出AP，再根据相似三角形对应边成比例列式求解即可；

②根据①三种情况，利用菱形的邻边相等列出方程求解即可。

答案：（1） $\because \angle DEF=45^\circ$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ，

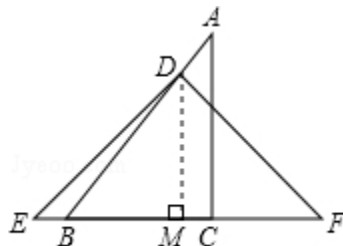
$\therefore \triangle PCE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore PC=EC=t$ ，

$\therefore AP=AC-PC=4-t$ ；

故答案为： $4-t$ 。

（2）如图，过点D作 $DM \perp EF$ 于点M，



(2) 题图

$\because \angle EDF=90^\circ$ ， $\angle DEF=45^\circ$ ，

$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形，

$\therefore EF=6$ ，

$\therefore DM=EM=MF=3$ ，

$\therefore EC=t$ ，

$\therefore EB=t-3$ ，

$\therefore BM=3-(t-3)=6-t$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $DM \perp EF$ ，

$\therefore DM \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle DBM \sim \triangle ABC$ ，

$\therefore \frac{DM}{AC} = \frac{BM}{BC}$ ，

即 $\frac{3}{4} = \frac{6-t}{3}$ ，

解得 $t=\frac{15}{4}$ ；

(3) 由(2)知, 当 $t=3$ 时 AB 经过点 D ,

所以, 当 $0 \leq t \leq 3$ 时, 重叠部分为 $\triangle PCE$, $S = \frac{1}{2}PC \cdot EC = \frac{1}{2}t^2$,

当 $3 \leq t \leq \frac{15}{4}$ 时, 设 AB 、 DE 相交于点 G , 过点 G 作 $GH \perp EF$ 于 H ,

则 $BE = t - 3$,

$$\because \tan \angle ABC = \frac{GH}{BH} = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore \frac{GH}{BH} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore BH = \frac{3}{4}GH,$$

$$\because \angle DEF = 45^\circ,$$

$$\therefore EH = GH,$$

$$\text{即 } t - 3 + \frac{3}{4}GH = GH,$$

$$\therefore GH = 4t - 12,$$

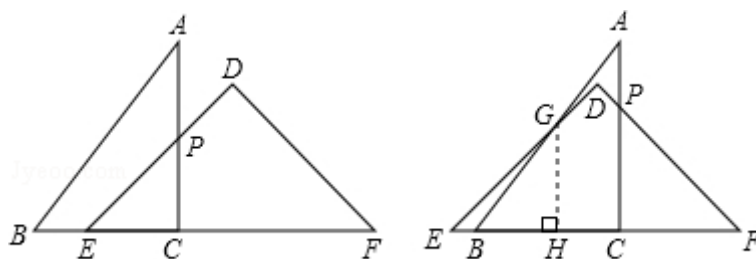
$$\text{又 } \because PC = CF = 6 - t,$$

$$\therefore \text{重叠部分的面积} = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle BEG} - S_{\triangle PCF},$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3 - \frac{1}{2} \times (t - 3) \times (4t - 12) - \frac{1}{2} \times (6 - t)(6 - t),$$

$$= 9 - 2t^2 + 12t - 18 - \frac{1}{2}t^2 + 6t - 18,$$

$$= -\frac{5}{2}t^2 + 18t - 27;$$



(3) 题图

(4) ①当 $PQ \perp AB$ 时,

$$\because \angle A = \angle A, \angle ACB = \angle AQP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AQP \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB},$$

\because 点 Q 以每秒 2 个单位的速度匀速运动,

\therefore 点 P 在 DE 上时, 若点 Q 从 B 到 A , 则 $AQ = 5 - 2t$, 若点 Q 从 A 到 B , 则 $AQ = 2t - 5$,

$$\therefore \frac{5 - 2t}{4} = \frac{4 - t}{5} \text{ 或 } \frac{2t - 5}{4} = \frac{4 - t}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{3}{2}, t = \frac{41}{14},$$

点 P 在 DF 上时, $PC=CF=6-t$,

$$AP=4-(6-t)=t-2,$$

$$\therefore \frac{2t-5}{4} = \frac{t-2}{5},$$

$$\text{解得 } t = \frac{17}{6},$$

$$\therefore \frac{17}{6} < 3,$$

$\therefore t = \frac{17}{6}$ 时, 点 P 在 DE 上, 不在 DF 上, 不符合题意舍去,

综上所述, $PQ \perp AB$ 时, t 的值为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{41}{14}$ 秒;

②若四边形 APGQ 为菱形, 则 $AQ=AP$,

$$\therefore 5-2t=4-t \text{ 或 } 2t-5=4-t \text{ 或 } 2t-5=t-2,$$

解得 $t=1$ 或 $t=3$ 或 $t=3$,

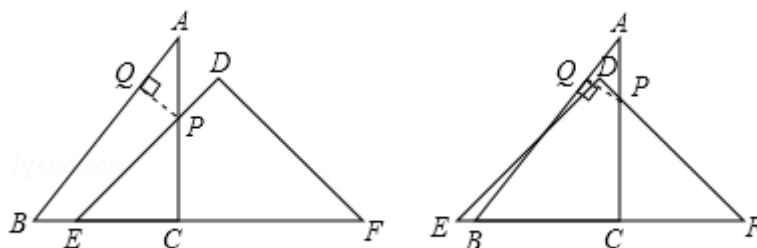
当 $t=1$ 时, $AP=4-1=3$,

菱形的周长 $=4 \times 3=12$,

当 $t=3$ 时, $AP=4-3=1$,

菱形的周长 $=4 \times 1=4$,

所以, 菱形的周长为 12 或 4.



(4) 题图