2018年福建省厦门市高考一模数学理

一、选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合S={x|(x-2)(x+3)＞0}，T={x|y=$\sqrt{3-x}$}，则S∩T=(　)

A.(-∞，-3)∪(2，+∞)
B.(-∞，-3)∪(2，3]
C.(-∞，-2)∪[3，+∞)
D.(2，3]
解析：S=(-∞，-3)∪(2，+∞)，T=(-∞，3]，
∴S∩T=(-∞，-3)∪(2，3].
答案：B

2.复数z满足(2+i)z=5，则|z+i|=(　)

A.$\sqrt{2}$

B.2

C.$\sqrt{5}$

D.2$\sqrt{2}$

解析：把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算得答案.
由(2+i)z=5，

得$z=\frac{5}{2+i}=\frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=2-i$，

则|z+i|=|2-i+i|=2.
答案：B

3.等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=1$，$a_1+a_7+a1_0=a_4+a_6$，则S_{10}=(　)

A.$-\frac{2}{3}$

B.$\frac{8}{3}$

C.5

D.$\frac{25}{3}$

解析：利用等差数列通项公式列出方程组，求出首项和公差，由此能求出S_{10}.
∵等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=1$，$a_1+a_7+a_{10}=a_4+a_6$，

$\therefore \begin{cases} a_1+4d=1 \\ a_1+a_1+6d+a_1+9d=a_1+3d+a_1+5d \end{cases}$，解得$\begin{cases} a_1=\dfrac{7}{3} \\ d=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$，

$\therefore S_{10}=10\times\frac{7}{3}+\frac{10\times9}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{3}$.

答案：D

4.袋中装有 2 个红球，3 个黄球，有放回地抽取 3 次，每次抽取 1 球，则 3 次中恰有 2 次抽到黄球的概率是(　)

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{18}{125}$

D. $\frac{54}{125}$

解析：袋中装有 2 个红球，3 个黄球，有放回地抽取 3 次，每次抽取 1 球，

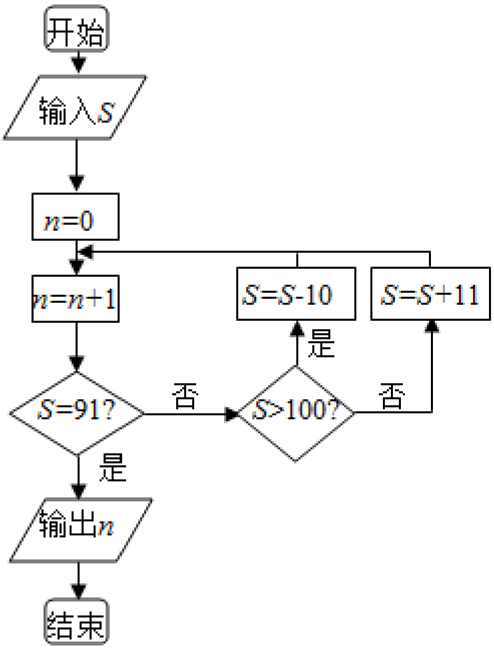
每次取到黄球的概率 $p_1=\frac{3}{5}$，

根据 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率计算公式能求出 3 次中恰有 2 次抽到黄球的概率是：

$$p=C_3^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{54}{125}.$$

答案：D

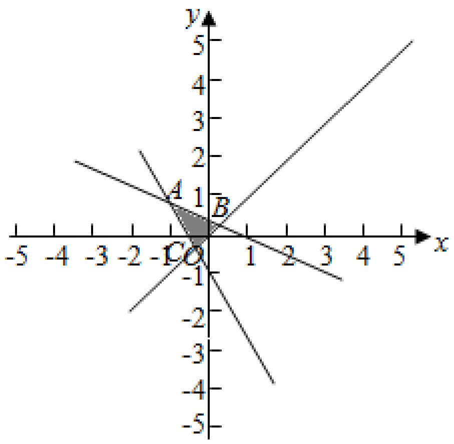
5.计算机科学的创始人麦卡锡先生发明的“91”函数具有一种独特的情趣，给人的心智活动提供了一种愉悦的体验.执行如图所示的程序框图，输入 S=100，则输出 n=(　)



A. 3
B. 4
C. 5
D. 6
解析：由已知中的程序语句可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 S，n 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.
模拟程序的运行，可得
S=100，n=0
n=1
不满足条件 S=91，不满足条件 S＞100，S=111，n=2；
不满足条件 S=91，满足条件 S＞100，S=101，n=3；
不满足条件 S=91，满足条件 S＞100，S=91，n=4；
满足条件 S=91，退出循环，输出 n 的值为 4.
答案：B

6. 设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+2y\le 1\\2x+y\ge -1\\x-y\le 0\end{cases}$，则 z=|x+3y|的最大值是(　)
A. $\frac{1}{3}$
B. 1
C. $\frac{4}{3}$
D. 2

解析：画出 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+2y\le 1\\2x+y\ge -1\\x-y\le 0\end{cases}$表示的平面区域：



由$\begin{cases}x-y=0\\x+2y=1\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$，即$B\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，

由$\begin{cases}x+2y=1\\2x+y=-1\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$，即$A(-1,1)$，

由$\begin{cases}x-y=0\\2x+y=-1\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$，即$C\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$，

设目标函数为 z′=x+3y，作出目标函数对应的直线，

直线过 C$\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$时，直线的纵截距最小，z′ 最小，最小值为$-\dfrac{4}{3}$；

当直线过 A(-1，1)时，直线的纵截距最大，z′ 最大，最大值为 2；

∴目标函数 z=|x+3y|的取值范围是[0，2]，最大值为 2.

答案：D

7. 双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0，b＞0)的左焦点为 F_1，过右顶点作 x 轴的垂线分别交两渐近线于 A，B 两点，若△ABF_1为等边三角形，则 C 的离心率是(   )

A. $\sqrt{2}$

B. $\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{5}$

解析：求出 AB，利用三角形 ABF_1 为等边三角形，列出方程，即可求解 C 的离心率.

双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞0，b＞0)的左焦点为 F_1，

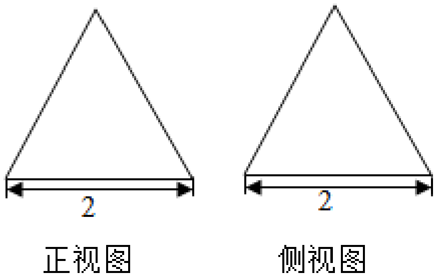
过右顶点作 x 轴的垂线分别交两渐近线于 A，B 两点，

可得|AB|=2b，若△ABF_1 为等边三角形，可得 a+c=$\sqrt{3}$ b，

所以$(a+c)^2=3c^2-3a^2$，可得 $e^2-e-2=0$，解得 e=2. e=-1 舍去.

答案：C

8. 如图，某棱锥的正视图和侧视图都是等边三角形，该棱锥的体积为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，则该棱锥内切球的表面积是(　)



A. $\frac{\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{3}$

C. $\frac{4\pi}{3}$

D. $\frac{8\pi}{3}$

解析：利用三视图的数据，求出底面多边形的边数，求出全面积，然后求解内切球的半径.

某棱锥的正视图和侧视图都是等边三角形，该棱锥的体积为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

可得棱锥的高为：$\sqrt{3}$，

底面面积为 S，所以$\frac{1}{3}S\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 S=4，所以底面是正方形，边长为 2，

正四棱锥的全面积为：$4+4\times\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3+1}=12$.

内切球的半径为：$\frac{1}{3}\times 12\times r=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

外接球的表面积为：$4\pi g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4\pi}{3}$.

答案：C

9. 函数 $y=(x+1)^3+\frac{x}{x+1}$ 与 y=-x+b 的图象交点的横坐标之和为-2，则 b=(　)

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

解析：根据函数的对称性得出直线过曲线的对称中心，从而得出 b 的值.

∴函数 $y=(x+1)^3+\frac{x}{x+1}$ 的图象关于点(-1，1)对称，

∵函数 $y=(x+1)^3+\frac{x}{x+1}$ 与 y=-x+b 的图象交点的横坐标之和为-2，

∴直线 y=-x+b 经过点(-1.1)，

∴b=0.

答案：B

10. 圆台的高为 2，上底面直径 AB=2，下底面直径 CD=4，AB 与 CD 不平行，则三棱锥 A-BCD 体积的最大值是(　)

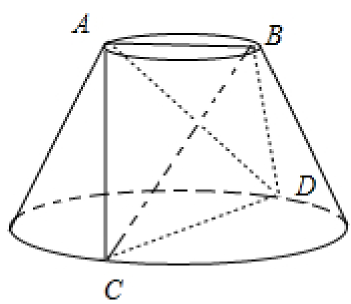
A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{32}{3}$

解析：∵圆台的高为 2，上底面直径 AB=2，下底面直径 CD=4，AB 与 CD 不平行，



∴$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$，

点 A 到平面 BCD 的距离的最大值为：
d_{max}=AB=2，

∴三棱锥 A-BCD 体积的最大值：$(V_{A-BCD})_{max}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times d_{max}=\frac{1}{3}\times 4\times 2=\frac{8}{3}$.

答案：B

11.定义在(0，+∞)上的函数 f(x)满足 f(x)+xf′(x)=$\frac{1}{x}$，f(1)=0，若关于 x 的方程|f(x)|-a=0 有 3 个实根，则 a 的取值范围是(　)

A.(0，$\frac{1}{e}$)

B.(0，1)

C.($\frac{1}{e}$，1)

D.(1，+∞)

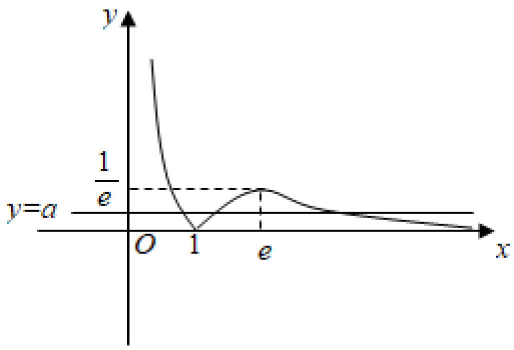
解析：令 g(x)=xf(x)，则 g′(x)=f(x)+xf′(x)=$\frac{1}{x}$，

∴g(x)=lnx+c，即 xf(x)=lnx+c，
又 f(1)=0，∴c=0，

可得 f(x)=$\frac{\ln x}{x}$.

则 f′(x)=$\frac{1-\ln x}{x^2}$，可知当 x∈(0，e)时，f′(x)>0，当 x∈(e，+∞)时，f′(x)<0，

则 f(x)在(0，e)上为增函数，在(e，+∞)上为减函数，
要使方程|f(x)|-a=0 有 3 个实根，即函数 y=|f(x)|与 y=a 的图象有 3 个不同交点，
如图：



由图可知，a 的取值范围是(0，$\frac{1}{e}$).

答案：A

12.函数 y=sin(ωx+φ)与 y=cos(ωx+φ)(其中φ>0，|φ|<$\frac{\pi}{2}$)在 x∈[0，$\frac{5\sqrt{2}}{2}$]的图象恰有三个不同的交点 P，M，N，△PMN 为直角三角形，则φ的取值范围是(　)

A. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

B. $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$

C. $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$

D. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

解析：图象恰有三个不同的交点 P，M，N，△PMN 为直角三角形，可知直角三角形△PMN 的高为$\sqrt{2}$，且是等腰直角三角形，可得斜边长为 2$\sqrt{2}$，即周期 T=2$\sqrt{2}$.

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=2\sqrt{2}$，那么$\omega=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$，

Q $x\in\left[0,\frac{5\sqrt{2}}{2}\right]$上，$\therefore \omega x+\varphi\in\left[\varphi,\frac{5\pi}{2}+\varphi\right]$上，

根据正余弦函数的图象性质，可得：$-\frac{3\pi}{4}<\varphi\le\frac{\pi}{4}$，且$\frac{9\pi}{4}\le\frac{5\pi}{2}+\varphi<\frac{13\pi}{4}$.

又 Q$|\varphi|<\frac{\pi}{2},\therefore -\frac{\pi}{4}<\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

答案：A

二、填空题(每题 5 分，满分 20 分，将答案填在答题纸上)

13.在$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$的展开式中，常数项为_____(用数字作答)

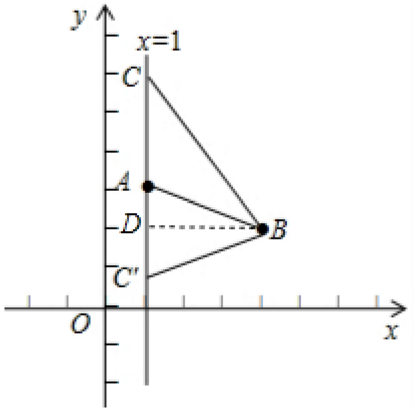
解析：先求出二项式展开式的通项公式，再令 x 的幂指数等于 0，求得 r 的值，即可求得展开式中的常数项的值.

$\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r gx^{6-3r}$，

令 6-3r=0，求得 r=2，可得常数项为C_6^2=15.

答案：15

14.已知三点 A(1，3)，B(4，2)，C(1，m)，若∠ACB 为锐角，则 m 的取值范围是_____.
解析：根据题意画出图形，结合图形知∠ACB 为锐角时 m 的取值范围.
根据题意画出图形，如图所示；



点 A(1，3)，B(4，2)，C(1，m)，
若∠ACB 为锐角，则点 C 在射线 AC 或 DC′ 上，
∴m 的取值范围是 m＞3 或 m＜2.
答案：m＞3 或 m＜2

15.等比数列{a_n}的首项为 2，数列{b_n}满足 $2^{b_n}=a_1a_2\ldots a_n$，$b_4=b_3+4$，则 b_n=_____.

解析：利用等比数列的性质求出 b_n，求出数列的公比，即可得到结果.

等比数列{a_n}的首项为 2，数列{b_n}满足 $2^{b_n}=a_1a_2\ldots a_n=2^n gq^{1+2+3+\ldots+(n-1)}=2ngq\dfrac{n(n-1)}{2}$，

可得 $b_n=n+log_2q^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

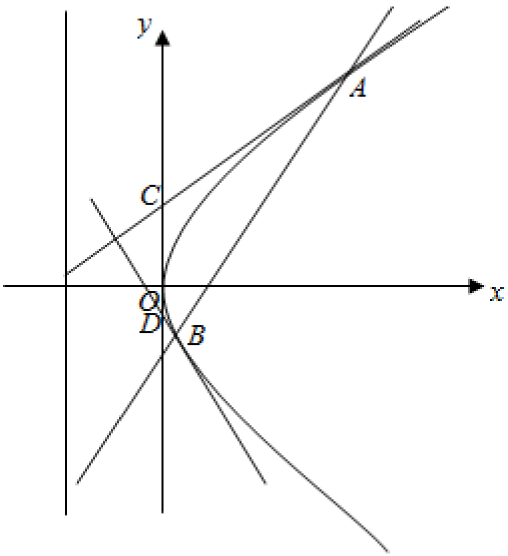
$b_4=b_3+4$，所以：$4+\log_2q^6=3+\log_2q^3+4$，解得 q=2，

$b_n=n+log_2q^{\frac{n(n-1)}{2}}=n+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

答案：$\dfrac{n(n+1)}{2}$

16.过抛物线 E&：$y^2=4x$ 焦点的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，E 在点 A，B 处的切线分别与 y 轴交于 C，D 两点，则 $4\sqrt{2}$ |CD|-|AB|的最大值是_____.

解析：求导，根据函数的几何意义，求得切线方程，令 x=0，求得 C 和 D 点坐标，求得|CD|，设直线 AB 的方程，代入抛物线方程，利用抛物线的焦点弦公式，基本不等式及二次函数的单调性即可求得答案.



由 $y^2=4x$，$y=2\sqrt{x}$，求导，$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，设 $A(x_1，y_1)$，

$B(x_2，y_2)$，则过 A 点的切线的斜率 $k=\frac{1}{x_1}$，

则切线方程 $y-y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}(x-x_1)$，

令 x=0，解得：$y=\sqrt{x_1}$，则 $C\left(0,\sqrt{x_1}\right)$，

同理可得 $D\left(0,-\sqrt{x_2}\right)$，则 $\left|CD\right|=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$，

设直线 AB 的方程：$y=k(x-1)$，联立 $\begin{cases} y=k\left(x-1\right) \\ y^2=4x \end{cases}$，

整理得：$k^2x^2-2(k^2+2)x+k^2=0$，则 $x_1x_2=1$，

∴$|AB|=x_1+x_2+2=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})^2$，

则 $4\sqrt{2}\left|CD\right|-\left|AB\right|=4\sqrt{2}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)-\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2$，

设 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=t$，$t\geq 2$，设 $f\left(t\right)=4\sqrt{2}t-t^2=-\left(t-2\sqrt{2}\right)^2+8$，$t\geq 2$，

∴当 $t=2\sqrt{2}$ 时，$f(t)$ 取最大值，最大值为 8，

∴$4\sqrt{2}\ |CD|-|AB|$ 的最大值为 8.

答案：8

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分.第 17~21 题为必考题，每小题 12 分，共 60 分；第

22、23 题为选考题，有 10 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.△ABC 的内角的对边分别是 a，b，c，满足 $a^2+2b^2=c^2$.

(1)若 A=$\frac{\pi}{3}$，b=1，求△ABC 的面积.

解析：(1)根据余弦定理和三角的面积公式计算即可.

答案：(1)由余弦定理，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$ 得 $bc=b^2+c^2-a^2$，

又 $a^2+2b^2=c^2$，得 $bc=3b^2$，因为 b=1，所以 c=3，

由三角形面积公式，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

(2)求 $\frac{\tan C}{\tan A}$.

解析：(2)法一：根据余弦定理和正弦定理，以及两角和的正弦公式即可求出.

法二：结合余弦定理即可得到 $\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}$，代值计算即可.

答案：(2)法一：由 $a^2+2b^2=c^2$，得 $a^2+b^2-c^2=-b^2$

结合余弦定理 $2ab\cos C=a^2+b^2-c^2$，得 $2ab\cos C=-b^2$

因为 b＞0，则 2acosC=-b

结合正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 2sinAcosC=-sinB

因为 A+B+C=π，得 2sinAcosC=-sin(A+C)

整理得：3sinAcosC=-sinCcosA

因为 A，C∈(0，π)，cosAcosC≠0，

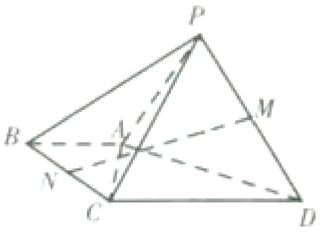
所以 3tanA=-tanC，即 $\frac{\tan C}{\tan A}=-3$.

法二：$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{\sin C}{\cos C}g\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{c}{a}g\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$，$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}$，

由 $a^2+2b^2=c^2$，得 $c^2-a^2=2b^2$，

整理得：$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{b^2+2b^2}{b^2-2b^2}=-3$.

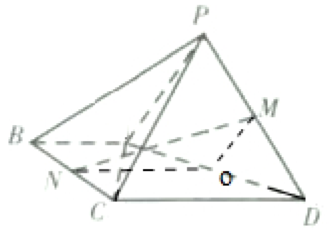
18.如图，四棱锥 P-ABCD 中，△PAD 是等边三角形，AB∥CD，AB⊥BC，CD=2AB=2BC=$2\sqrt{2}$，M，N 分别为 PD，BC 的中点.



(1)证明：MN∥平面 PAB.

解析：(1)取 PC 中点 Q，可证面 NQM∥面 PAB，得 MN∥面 PAB.

答案：(1)取 AD 的中点 O，连接 MO，NO，



∵M 为 PD 的中点，∴OM∥PA，

又∵OM$\not\subset$平面 PAB

∵ON∥AB，同理 ON∥平面 PAB，

又 OM∩ON=O，∴平面 MNO∥平面 PAB，

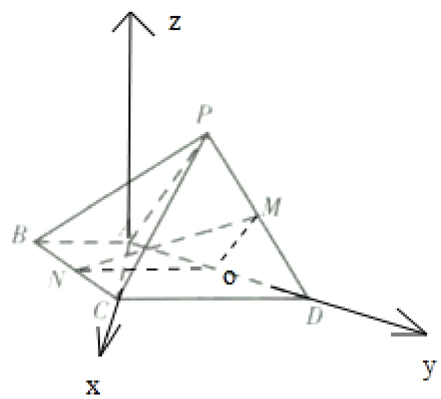
∵MN$\subset$平面 OMN，∴MN∥平面 PAB.

(2)若 AC⊥平面 PAD，求直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值.

解析：(2)建立合适的坐标系，求出$\overrightarrow{MN}$和平面 PBC 的法向量，由此利用直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值.

答案：(2)(法一)∵AC⊥平面 PAD，∴AC⊥AD，

以 A 为坐标原点，以$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$分别为 x，y 轴的正方向，过 A 垂直于平面 ACD 的直线为 z 轴，如图建立空间直角坐标系：



在 Rt△ACD 中，AC=2，CD=2$\sqrt{2}$，∴AD=2，

$\therefore P\left(0,1,\sqrt{3}\right)$，$D\left(0,2,0\right)$，$M\left(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(1,-1,0\right)$，$C\left(2,0,0\right)$，$N\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{3}{2},-2,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 PBC 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x-2y-\sqrt{3}z=0\\ x+y=0\end{cases}$，

取$x=1$，则$y=-1$，$z=\sqrt{3}$，即$\vec{n}=\left(1,-1,\sqrt{3}\right)$，

设直线 MN 与平面 PBC 所成角为θ，

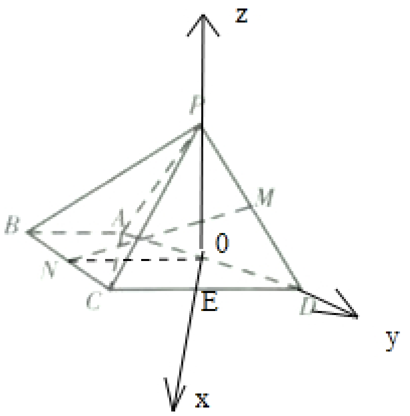
$\therefore \sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{35}}{35}$.

∴直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{35}}{35}$.

(法二)连接 OP，OE，∴OP⊥OD，E 为 CD 的中点，O 为 AD 的中点，

∴OE∥AC∵AC⊥平面 PAD，∴OE⊥平面 PAD，∴OE，OP，OD 两两互相垂直，

∴以 O 为坐标原点，以$\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OP}$分别为 x，y，z 轴的正方向，如图建立空间直角坐标系：



∵AB∥CD，AB⊥BC，CD=2AB=2BC=2$\sqrt{2}$ 可得 AE=ED=$\sqrt{2}$，∴AD=2，

$\therefore P\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$D\left(0,1,0\right)$，$M\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B\left(1,-2,0\right)$，$C\left(2,-1,0\right)$，$N\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{3}{2},-2,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设平面 PBC 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，

$$\therefore \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \end{cases}，即\begin{cases} x-2y-\sqrt{3}z=0 \\ x+y=0 \end{cases}，$$

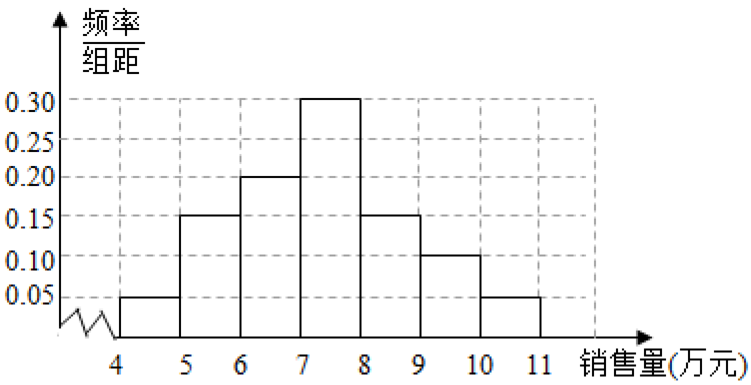
取$x=1$，则$y=-1$，$z=\sqrt{3}$，即$\vec{n}=\left(1,-1,\sqrt{3}\right)$，

设直线 MN 与平面 PBC 所成角为θ，

$$\therefore \sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{MN},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{35}}{35}.$$

∴直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{35}}{35}$.

19. 2018 年 2 月 4 日，中央一号文件《中共中央国务院关于实施乡村振兴战略的意见》发布，对农村电商发展提出新的指导性意见，使得农村电商成为精准扶贫、乡村振兴的新引擎. 某电商 2018 年计划与所在地区的樱桃果园合作进行樱桃销售，为了解该地区果园的樱桃销售量情况，现从中随机抽取 60 个樱桃果园，统计各果园 2017 年的销售量(单位：万斤). 得到下面的频率分布直方图.



(1)从样本中销售量不低于 9 万斤的果园随机选取 3 个，求销售量不低于 10 万斤的果园个数 X 的分布列及其数学期望.

解析：(1)X 的可能取值为 0，1，2，3，分别求出相应的概率，由此能求出 X 的分布列和 E(X).

答案：(1)由频率分布直方图可得样本中 2017 年销将量不低于 9 万斤的果园有(0.1+0.05)×60=9 个，销售量不低于 10 万斤的果园有 0.05×60=3 个.

随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3.

$$P\left(X=1\right)=\frac{C_6^2\cdot C_3^1}{C_9^3}=\frac{15}{28}，P\left(X=2\right)=\frac{C_6^1\cdot C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}，P\left(X=3\right)=\frac{C_3^3}{C_9^3}=\frac{1}{84}，$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

∴数学期望$E\left(X\right)=0\times\frac{5}{21}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{14}+3\times\frac{1}{84}=1$.

(2)该电商经过6天的试运营，得到销售量(单位：万斤)情况统计表如下：

运营第n天	1	2	3	4	5	6
第n天电商销售量y_n	1.21	1.31	1.45	1.71	2.02	2.54

根据相关性分析，前n天累计总销售量T_n与n之间具有较强的线性相关关系，由最小二乘法得回归直线方程

$\hat{T}=1.78n+\hat{a}$.用样本估计总体的思想，预测该电商至少运营多少天可使总销量不低于该地区各果园2017年平均销售量的两倍.

注：1.前n天累计总销售量$T_n=\sum_{i=1}^{n}y_i$；

2.在频率分布直方图中，同一组数据用该区间的中点值作代表.

解析：(2)根据回归方程，可得$\hat{T}=1.78n-1.01$，代值计算即可.

答案：(2)由运营期间销售量情况统计表可得前n天累计总销售量T_n如下：

运营第n天	1	2	3	4	5	6
前n天累计总销售	1.21	2.52	3.97	5.68	7.7	10.24

∴$\overline{n}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=3.5,\overline{T}=\frac{1.21+2.52+3.97+5.68+7.7+10.24}{6}=5.22$，

将样本中心点(3.5，5.22)代入回归直线方程$\hat{T}=1.78n+\hat{a}$，得$\hat{a}=-1.01$，

∴$\hat{T}=1.78n-1.01$，

下面用直方图中各区间中点值作为代表，估计该地区2017年平均销售量：4.5×0.05+5.5×0.15+6.5×0.2+7.5×0.3+8.5×0.15+9.5×0.1+10.5×0.05=7.35

由题意得：1.78n-1.01≥14.7，解得n≥8.83.

∵n∈N*，

∴该电商至少运营9天可使总销量不低于该地区各果园2017年平均销售量的两倍.

20.在平面直角坐标系xOy中，点A(-2，0)，B(6，0)，点C在直线x=6上，过AB中点D作

DP⊥OC，交 AC 于点 P，设 P 的轨迹为曲线Γ .

(1)求Γ 的轨迹方程.

解析：(1)法一：设 P(x，y)，C(6，n)，通过 A，P，C 三点共线知，$k_{PA}=k_{CA}$，即 $y=\frac{n}{8}(x+2)$ ①结合向量的数量积，求解曲线的轨迹方程.

法二:设 P(m,n),则直线 AP 的方程为 $y=\frac{n}{m+2}(x+2)$,推出 $\overrightarrow{DP}=(m-2,n)$,利用 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DP}=0$.求解曲线Γ 的轨迹方程.

答案：(1)法一：设 P(x，y)，C(6，n)，因为 D 为 AB 中点，
故点 D 的坐标为(2，0)；
当 n=0 时，点 P 的坐标为(2，0)；当 n≠0 时，
由 A，P，C 三点共线知，kPA=kCA，即 $y=\frac{n}{8}(x+2)$①，OC⊥PD$\Leftrightarrow \overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，
即 $y=-\frac{6}{n}(x-2)$②；①×②得 $4y^2=-3(x^2-4)$，

化简得曲线Γ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (x≠-2).

法二：设 P(m，n)，则直线 AP 的方程为 $y=\frac{n}{m+2}(x+2)$，

令 x=6，得点 C 的坐标为$\left(6，\frac{8n}{m+2}\right)$，即 $\overrightarrow{OC}=\left(6,\frac{8n}{m+2}\right)$，

又 $\overrightarrow{DP}=(m-2，n)$及 $OC\perp DP$,$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，即 $6(m-2)+\frac{8n^2}{m+2}=0$，

化简得 $3m^2+4n^2=12$，即 $\frac{m^2}{4}+\frac{n^2}{3}=1$，

故曲线Γ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (x≠-2).

(2)过点 Q(2，$\sqrt{3}$)的直线 l 与Γ 交于 E，F 两点，直线 $x=x_0$ 分别与直线 DE，DF 交于 S，T 两点.线段 ST 的中点 M 是否在定直线上，若是，求出该直线方程；若不是，说明理由.

解析:(2)法一:设直线 l 的方程为 $x=ty+(2-\sqrt{3}t)$,则 $t\in\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.设 E($x_1$，$y_1$)，F($x_2$，$y_2$)，M($x_0$，$y_0$)，直线 DE 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，联立$\begin{cases}x=ty+\left(2-\sqrt{3}t\right)\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$，利用韦达定理，转化求解点 M 都在定直线上.

法二：设 E(x_1，y_1)，F(x_2，y_2)，M(x_0，y_0)，设直线 DE，DF 的方程分别为 $x=t_1y+2$，$x=t_2y+2$($t_1t_2\neq0$)，设直线 DE，DF 方程的统一形式为 $x=ty+2(t\neq0)$，联立$\begin{cases}x=ty+2\\x=n\left(y-\sqrt{3}\right)+2\end{cases}$，得点 E，F 的统-形式为$\left(\frac{\sqrt{3}nt}{n-t}+2,\frac{\sqrt{3}n}{n-t}\right)$，又 E，F 均在椭圆 $3x^2+4y^2-12=0$ 上，韦达定理得$\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}=-3$，然后证明点 M 都在定直线上.

答案：(2)法一：由题意知，直线 l 的斜率恒大于 0，且直线 l 不过点 A，其中 $k_{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

设直线 l 的方程为 $x=ty+(2-\sqrt{3}t)$，则$t\in\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$.

设 E(x_1，y_1)，F(x_2，y_2)，M(x_0，y_0)，

直线 DE 的方程为$y=\frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$，故$y_S=\frac{y_1}{x_1-2}(x_0-2)$，

同理$y_T=\frac{y_2}{x_2-2}(x_0-2)$；

所以$2y_0=y_S+y_T=\frac{y_1}{x_1-2}(x_0-2)+\frac{y_2}{x_2-2}(x_0-2)$，

即$\frac{2y_0}{x_0-2}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1}{t\left(y_1-\sqrt{3}\right)}+\frac{y_2}{t\left(y_2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2y_1y_2-\sqrt{3}(y_1+y_2)}{t\left[y_1y_2-\sqrt{3}(y_1+y_2)+3\right]}$③

联立$\begin{cases}x=ty+\left(2-\sqrt{3}t\right)\\3x^2+4y^2-12=0\end{cases}$，化简得$\left(3t^2+4\right)y^2+\left(12t-6\sqrt{3}t^2\right)y+9t^2-12\sqrt{3}t=0$，

所以$y_1+y_2=\frac{6\sqrt{3}t^2-12t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=\frac{9t^2-12\sqrt{3}t}{3t^2+4}$，

代入③得

$$\frac{2y_0}{x_0-2}=\frac{2\times\frac{9t^2-12\sqrt{3}t}{3t^2+4}-\sqrt{3}\times\frac{6\sqrt{3}t^2-12t}{3t^2+4}}{t\left[\frac{9t^2-12\sqrt{3}t}{3t^2+4}-\sqrt{3}\times\frac{6\sqrt{3}t^2-12t}{3t^2+4}+3\right]}=\frac{-12\sqrt{3}t}{12t}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{3}x_0+2y_0-2\sqrt{3}=0$$

，

所以点 M 都在定直线$\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0,\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1\right)$上.

法二：设 E(x_1，y_1)，F(x_2，y_2)，M(x_0，y_0)，

设直线DE，DF的方程分别为$x=t_1y+2$，$x=t_2y+2(t_1t_2\neq 0)$，

则 $y_S=\dfrac{x_0-2}{t_1}$，$y_T=\dfrac{x_0-2}{t_2}$，

故 $2y_0=y_S+y_T=\dfrac{x_0-2}{t_1}+\dfrac{x_0-2}{t_2}\Rightarrow \dfrac{2y_0}{x_0-2}=\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}$，

设直线DE，DF方程的统一形式为$x=ty+2(t\neq 0)$，

直线EF的方程为 $x=n\left(y-\sqrt{3}\right)+2$，

联立 $\begin{cases}x=ty+2\\ x=n\left(y-\sqrt{3}\right)+2\end{cases}$，得点E，F的统-形式为 $\left(\dfrac{\sqrt{3}nt}{n-t}+2,\dfrac{\sqrt{3}n}{n-t}\right)$，

又E，F均在椭圆$3x^2+4y^2-12=0$上，故其坐标满足椭圆的方程，

即 $3\left(\dfrac{\sqrt{3}nt}{n-t}+2\right)^2+4\left(\dfrac{\sqrt{3}n}{n-t}\right)^2-12=0$，得 $\left(9n^2-12\sqrt{3}n\right)t^2+12\sqrt{3}n^2t+12n^2=0$，

即 $4n\left(\dfrac{1}{t}\right)^2+4\sqrt{3}n g\dfrac{1}{t}+3n-4\sqrt{3}=0$，

$\dfrac{1}{t_1},\dfrac{1}{t_2}$ 为该二次方程的两根，由韦达定理得

$\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}=-\sqrt{3}$，

代入①式，得 $\dfrac{2y_0}{x_0-2}=-\sqrt{3}\Rightarrow \sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0$.

所以点M都在定直线 $\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}=0,\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1\right)$ 上.

21.函数$f(x)=a\ln x-x^2+x$，$g(x)=(x-2)e^x-x^2+m$(其中e=2.71828…).

(1)当a≤0时，讨论函数f(x)的单调性.

解析：(1)求出函数的导数，通过讨论a的范围求出函数的单调区间即可.

答案：(1)函数f(x)定义域是(0，+∞)，

$f'(x)=\dfrac{a}{x}-2x+1=\dfrac{-2x^2+x+a}{x}$，

(i)当 $a\leqslant -\dfrac{1}{8}$ 时，$1+8a\leqslant 0$，当$x\in(0，+\infty)$时$f'(x)\leqslant 0$，

函数f(x)的单调递减区间是(0，+∞)；

(ⅱ)当$-\frac{1}{8}$＜a≤0，1+8a＞0，$-2x^2+x+a=0$的两根分别是：

$x_1=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4}$＞0，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4}$＞0，

当x∈(0，x_1)时$f'(x)$＜0.函数f(x)的单调递减.
当x∈(x_1，x_2)时$f'(x)$＞0，函数f(x)的单调速递增，
当x∈(x_2，+∞)时$f'(x)$＜0，函数f(x)的单调递减.

综上所述，(i)当a≤$-\frac{1}{8}$时f(x)的单调递减区间是(0，+∞)；

(ⅱ)当$-\frac{1}{8}$＜a≤0时，f(x)的单调递增区间是($\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4},\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4}$)，

单调递减区间是$\left(0,\frac{1-\sqrt{1+8a}}{4}\right)$和$\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{4},+\infty\right)$.

(2)当a=-1，x∈(0，1]时，f(x)＞g(x)恒成立，求正整数m的最大值.
解析：(2)得到m＜$(-x+2)e^x-\ln x+x$，设$h(x)=(-x+2)e^x-\ln x+x$，x∈(0，1]，根据函数的单调性求出h(x)的最小值，从而求出m的最大值即可.
答案：(2)当a=-1，x∈(0，1]时，f(x)＞g(x)，即m＜$(-x+2)e^x-\ln x+x$，

设$h(x)=(-x+2)e^x-\ln x+x$，x∈(0，1]，∴$h'(x)=(1-x)(e^x-\frac{1}{x})$，

∴当0＜x≤1时，1-x≥0，

设$u(x)=e^x-\frac{1}{x}$，则$u'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$＞0，∴u(x)在(0，1)递增，

又∵u(x)在区间(0，1]上的图象是一条不间断的曲线，

且$u\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2$＜0，u(1)=e-1＞0，

∴∃x_0∈($\frac{1}{2}$，1)使得u(x0)=0，即$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，$\ln x_0=-x_0$，

当x∈(0，x_0)时，u(x)＜0，$h'(x)$＜0；
当x∈(x_0，1)时，u(x)＞0，$h'(x)$＞0；
∴函数h(x)在(0，x_0]单调递减，在[x_0，1)单调递增，

∴$h(x)_{\min}=h(x_0)=(-x_0+2)e^{x_0}-\ln x_0+x_0=(-x_0+2)\frac{1}{x_0}+2x_0=-1+\frac{2}{x_0}+2x_0$，

∵$y=-1+\frac{2}{x}+2x$在x∈(0，1)递减，

∵x_0∈($\frac{1}{2}$，1)，∴$h(x_0)=-1+\frac{2}{x_0}+2x_0$∈(3，4)，

∴当 m≤3 时，不等式 m<(-x+2)e^x-lnx+x 对任意 x∈(0，1]恒成立，
∴正整数 m 的最大值是 3.

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.
选修 4-4：坐标系与参数方程

22.在立角坐标系 x0y 中，直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=-2\sqrt{3}+t\cos\alpha \\ y=-1+t\sin\alpha \end{cases}$（t 为参数）.以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为$\rho^2(1+\sin^2\theta)=8$.

(1)若曲线 C 上一点 Q 的极坐标为(ρ_0，$\frac{\pi}{2}$)，且 l 过点 Q，求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程.
解析：(1)首先利用转换关系把参数方程和极坐标方程与直角坐标方程进行转化.
答案：(1)把 Q(ρ_0，$\frac{\pi}{2}$)代入曲线 C 可得 Q(2，$\frac{\pi}{2}$)，
化为直角坐标为 Q(0，2)，

又 l 过点 P($-2\sqrt{3}$，-1)，得直线 l 的普通方程为：$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+2$；

曲线$\rho^2(1+\sin^2\theta)=8$可化为的直角坐标方程为：$x^2+2y^2=8$.

(2)设点 P($-2\sqrt{3}$，-1)，l 与 C 的交点为 A，B，求$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$的最大值.

解析：(2)利用方程组和一元二次方程根与系数的关系进行应用.

答案：(2)把直线 l 的参数方程代入曲线 C：$\rho^2+(\rho\sin\theta)^2=8(t\cos\alpha-2\sqrt{3})^2+2(t\sin\alpha-1)^2=8$
的直角坐标方程得，

化简得$(\sin^2\alpha+1)t^2-4(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)t+6=0$，

①$\triangle=[-4(\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)]^2-24(\sin^2\alpha+1)$，

可得$t_1+t_2=\frac{4(\sin\alpha+3\cos\alpha)}{\sin^2\alpha+1}$，$t_1t_2=\frac{6}{\sin^2\alpha+1}>0$，

故 t_1 与 t_2 同号

$$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{4|\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha|}{6}=\frac{4}{3}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|,$$

所以$\alpha=\frac{\pi}{6}$时，$\frac{4}{3}\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|$有最大值$\frac{4}{3}$.

此时方程①的△=34＞0，故$\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$有最大值$\frac{4}{3}$.

选修4-5：不等式选讲

23.已知函数f(x)=|x+a|+|3x-1|(a∈R).

(1)当a=-1时，求不等式f(x)≤1的解集.
解析：(1)将a=-1代入，根据零点分段法去掉绝对值，分别解出不等式再合并.
答案：(1)当a=-1时，f(x)=|x-1|+|3x-1|，f(x)≤1⇒ |x-1|+|3x-1|≤1.

即$\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ 1-x+1-3x \le 1 \end{cases}$ 或$\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1 \\ 1-x+3x-1 \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 1 \\ x-1+3x-1 \le 1 \end{cases}$，

解得$\begin{cases} x \le \frac{1}{3} \\ x \ge \frac{1}{4} \end{cases}$或$\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1 \\ x \le \frac{1}{2} \end{cases}$ 或$\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le \frac{3}{4} \end{cases}$，

所以$\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3}$或$\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}$或$\varnothing$.

所以原不等式的解集为{x|$\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}$}.

(2)设关于x的不等式f(x)≤|3x+1|的解集为M，且[$\frac{1}{4}$，1]⊂M，求a的取值范围.

解析：(2)不等式的解集为M，且[$\frac{1}{4}$，1]⊂M，即不等式在[$\frac{1}{4}$，1]上恒成立，根据零点分段去掉绝对值，分离参变量并求出最值，可得a的取值范围.

答案：(2)因为[$\frac{1}{4}$，1]⊂M，

所以当x∈[$\frac{1}{4}$，1]时，不等式f(x)≤|3x+1|恒成立，

即|x+a|+|3x-1|≤|3x+1|在[$\frac{1}{4}$，1]上恒成立，

当x∈$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$时，|x+a|+1-3x≤3x+1，即|x+a|≤6x，

所以-6x≤x+a≤6x，所以-7x≤a≤5x在$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$上恒成立，

所以$(-7x)_{min}$≤a≤$(5x)_{min}$，即$-\frac{7}{4} \le a \le \frac{5}{4}$；

当 $x\in[\frac{1}{3}，1]$时，$|x+a|+3x-1\leqslant 3x+1$，即$|x+a|\leqslant 2$，即$-2\leqslant x+a\leqslant 2$，

所以$-2-x\leqslant a\leqslant 2-x$ 在$[\frac{1}{3}，1]$上恒成立，

所以$(-2-x)_{min}\leqslant a\leqslant(2-x)_{min}$，即$-\frac{7}{3}\le a\le 1$；

综上，a 的取值范围为$-\frac{7}{3}\le a\le 1$.