绝密★启用前

2013年普通高等学校招生全国统一考试（福建卷）

数学试题（文史类）

第I卷（选择题 共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数的 $Z=-1-2i\left(i\text{为虚数单位}\right)$在复平面内对应的点位于模为

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．设点 $P\left(x,y\right)$,则“$x=2$且$y=-1$”是“点P在直线$l:x+y-1=0$上”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

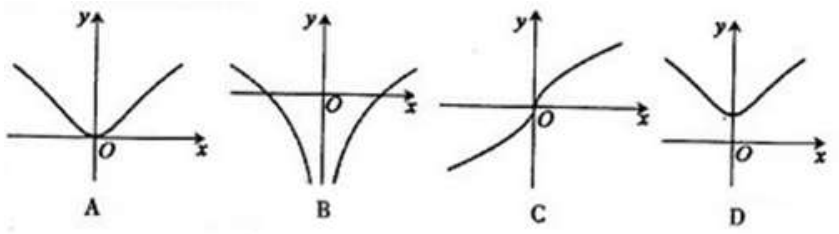
3．若集合 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,4\}$，则$A\cap B$的子集个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．16

4．双曲线 $x^2-y^2=1$的顶点到其渐近线的距离等于

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C．1　　D．$\sqrt{2}$

5．函数 $f\left(x\right)=\ln\left(x^2+1\right)$的图像大致是



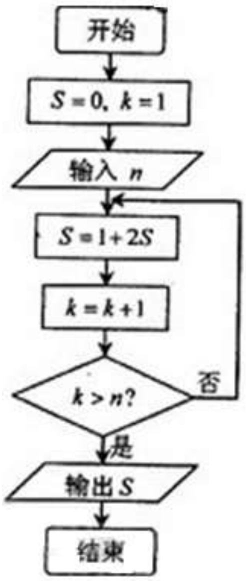
6．若变量 x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y\le 2\\ x\ge 1,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则$z=2x+y$的最大值和最小值分别为

A．4和3　　B．4和2　　C．3和2　　D．2和0

7．若 $2^x+2^y=1$,则$x+y$的取值范围是

A．$\left[0,2\right]$　　B．$\left[-2,0\right]$　　C．$\left[-2,+\infty\right]$　　D．$\left[-\infty,-2\right]$

8．阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，如果输入某个正整数 n 后，输出的$S\in(10,20)$,那么n的值为



A．3　　B.4　　C.5　　D.6

9．将函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$的图像向右平移$\varphi(\varphi>1)$个单位长度后得到函数$g(x)$的图像,若$f(x),g(x)$的图像都经过点$P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则$\varphi$的值可以是

A．$\frac{5\pi}{3}$　　B．$\frac{5\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

10．在四边形 $ABCD$中,$\overrightarrow{AC}=(1,2),\overrightarrow{BD}=(-4,2)$,则该四边形的面积为

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{5}$　　C．5　　D．10

11．已知x与y之间的几组数据如下表：

x	1	2	3	4	5	6
y	0	2	1	3	3	4

假设根据上表数据所得线性回归直线方程为 $\dot{y}=\dot{b}x+\dot{a}$,若某同学根据上表中的前两组数据$(1,0)$和$(2,2)$求得的直线方程为 $y'=b'x+a'$, 则以下结论正确的是

A．$\dot{b}>b',\dot{a}>a'$　　B．$\dot{b}>b',\dot{a}<a'$　　C．$\dot{b}<b',\dot{a}>a'$　　D．$\dot{b}<b',\dot{a}<a'$

12．设函数 $f(x)$的定义域为R，$x_0(x_0\neq 0)$是$f(x)$的极大值点，以下结论一定正确的是

A．$\forall x\in R, f(x)\le f(x_0)$　　B．$-x_0$是$f(-x)$的极小值点

C．$-x_0$是$-f(x)$的极小值点　　D．$-x_0$是$-f(-x)$的极小值点

第 II 卷（非选择题 共 60 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

13.已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^3, x<0,\\ -\tan x, 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 则$f\left(f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=$____________.

14.利用计算机产生 0~1之间的均匀随机数a,则事件“$3a-1<0$”发生的概率为____________.

15.椭圆$r:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，焦距为$2c$. 若直线 $y=\sqrt{3}\left(x+c\right)$与椭圆r的一个交点$M$满足$\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$, 则该椭圆的离心率等于____________.

16. 设 S，T 是 R 的两个非空子集，如果存在一个从 S 到 T 的函数 $y=f(x)$ 满足：

（i）$T=\left\{f(x)\middle|x\in S\right\}$；（ii）对任意 $x_1,x_2\in S$,当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$,

那么称这两个集合“保序同构”，现给出以下 3 对集合：

① $A=N, B=N^*$;

② $A=\left\{x\middle|-1\le x\le 3\right\}, B=\left\{x\middle|-8\le x\le 10\right\}$;

③ $A=\left\{x\middle|0\le x\le 1\right\}, B=R.$

其中，“保序同构”的集合对的序号是_______。（写出“保序同构”的集合对的序号）。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 12 分）

已知等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差 d =1，前 n 项和为 S_n.

(I)若$1, a_1, a_3$成等比数列，求 a_1；

(II)若 $S_5>a_1a_9$，求a_1的取值范围。

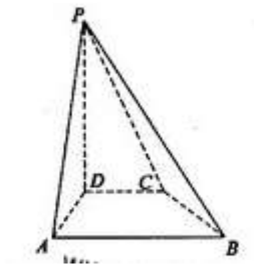
18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱柱 $P-ABCD$中，PD⊥平面ABCD，$AB // DC$, $AB\perp AD, BC=5, DC=3, AD=4, \angle PAD=60°.$

（I）当正视方向与向量 $\overrightarrow{AD}$ 的方向相同时，画出四棱锥 $P-ABCD$ 的正视图（要求标出尺寸，并写出演算过程)；

（II）若 M 为 PA 的中点，求证：求二面角 $DM //$平面PBC;

（III）求三棱锥 $D-PBC$ 的体积。



19.（本小题满分 12 分）

某工厂有 25 周岁以上（含 25 周岁）工人 300 名，25 周岁以下工人 200 名。为研究工人的日平均生产量是否与年龄有关，现采用分层抽样的方法，从中抽取了 100 名工人，先统计了他们某月的日平均生产件数，然后按工人年龄在“25 周岁以上（含 25 周岁）”和“25 周岁以下”分为两组，再将两组工人的日平均生产件数分为 5 组：$\left[50,60\right),\left[60,70\right), \left[70,80\right),$ $\left[80,90\right),\left[90,100\right)$ 分别加以统计，得到如图所示的频率分布直方图。

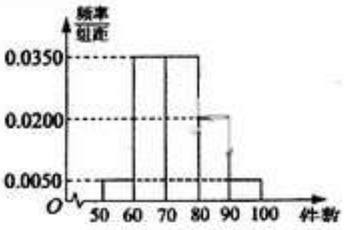
（I）从样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中随机抽取 2 人，求至少抽到一名“25 周岁以下组”工人的概率；

（II）规定日平均生产件数不少于 80 件者为“生产能手”，请你根据已知条件完成列联表，并判断是否有 90%的把握认为“生产能手与工人所在的年龄组有关”？

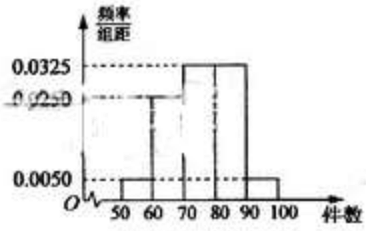
附：$x^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})}{n_{1*}n_{2*}n_{*1}n_{*2}}$

（注：此公式也可以写成$k^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$）

$P(x^2\geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828



25 周岁以上组



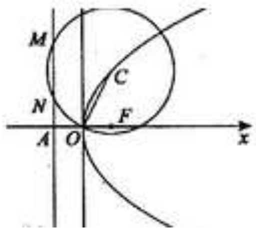
25 周岁以下组

20.（本小题满分 12 分）

如图，抛物线$E:y^2=4x$的焦点为 F，准线 l 与 x 轴的交点为 A。点 C 在抛物线 E 上，以 C 为圆心，$|CO|$为半径作圆，设圆 C 与准线 l 交于不同的两点 M，N。

（I）若点 C 的纵坐标为 2，求$|MN|$；

（II）若$|AF|^2=|AM|\cdot|AN|$，求圆 C 的半径。

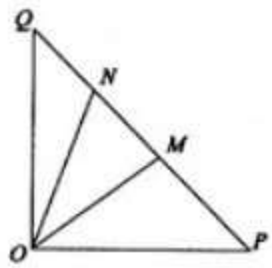


21.（本小题满分 12 分）

如图，在等腰直角△OPQ$\angle POQ=90^\circ, op=2\sqrt{2}$,点M在线段ＰＱ上，

（Ⅰ）若 OM=$\sqrt{5}$，求 PM 的长；

（Ⅱ）若点 N 在线段 MQ 上，且∠MON=30°，问：当∠POM 取　　何值时，△OMN 的面积最小？并求出面积的最小值。



22. （本小题满分 14 分）

已知函数 f(X)=X-1+ $\frac{a}{e^x}$（ $a\in R$，e 为自然对数的底数）。

（Ⅰ）若曲线 y= f(X)在点（1，f（1））处的切线平行于 X 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 f(X)的极值；

（Ⅲ）当 a-1 时，若直线 $l: y=kx-1$与曲线y= f(X)没有公共点，求 K 的最大值。

参考答案

一．选择题：1.C　2.A　3.C　4.B　5.A　6.B　7.D　8.B　9.B　10.C　11.C　12.D

二．填空题 ：13.-2　14.$\frac{1}{3}$　15. $\sqrt{3}-1$　16. ①②③

三．解答题：

17．解：（Ⅰ）因为数列{ a_n }的公差 d=1，且 1，a_1，a_3成等比数列，

所以 a_1^2=1×（a_1+2），

即 $a_1^2-a_1-2=0$，解得 $a_1=-1$ 或 $a_1=2$

（Ⅱ）因为数列{a_n}的公差 d=1，且 $S_5>a_1a_9$，

所以 $5a_1+10>a_1^2+8a_1$.

即 $a_1^2+3a_1-10<0$，解得$-5<a_1<2$.

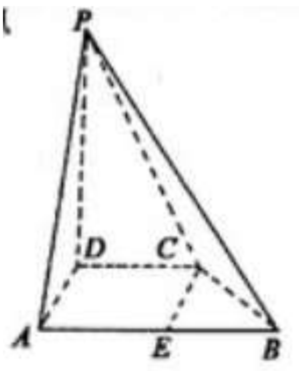
18. 解法一：

（Ⅰ）在梯形ＡＢＣＤ中，过点Ｃ作ＣＥ⊥ＡＢ，垂足为Ｅ。

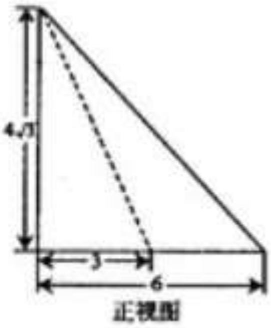
由已知得，四边形 ADCE 为矩形，ＡＥ＝ＣＤ＝３，

在ＲＴ△ＢＥＣ中，由ＢＣ＝５，ＣＥ＝４，

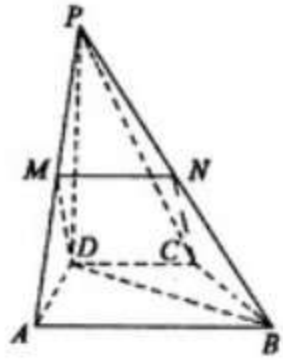
依勾股定理得ＢＥ＝３，从而ＡＢ＝６.



又由ＰＤ⊥平面ＡＢＣＤ得，ＰＤ⊥ＡＤ，
从而在 Rt△PDA 中，由 AD=4，∠PAD=60°，
得 PD=4$\sqrt{3}$.
正视图如图所示：



（Ⅱ）取 PB 中点 N，连接 MN，CN。



在△PAB 中，∵M 是ＰＡ中点，
∴MN∥AB，MN=$\frac{1}{2}$AB=3，又 CD∥AB，CD=3，
∴MN∥CD，MN∥CD，
∴四边形 MNCD 为平行四边形，∴DM∥CN。
又 DM$\not\subset$平面 PBC，CN⊂平面 PBC，
∴DM∥平面 PBC。
（Ⅲ）$V_{D-pBC}=V_{p-DBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta DBC}\cdot PD$，
又 $S_{\Delta DBC}$=6，PD=4$\sqrt{3}$，所以 V_{D-pBC}=8$\sqrt{3}$。
解法二：
（Ⅰ）同解法一。
（Ⅱ）取 AB 的中点 E，连接 ME，DE。
在梯形 ABCD 中，BE∥CD，且 BE=CD，
∴四边形 BCDE 为平行四边形，
∴DE∥BC，又 DE$\not\subset$平面 PBC，BC⊂平面 PBC，
∴DE∥平面 PBC.又在△PDB 中，ME∥PB，
ME$\not\subset$平面 PBC，PB⊂平面 PBC，
∴ME∥ 平面 PBC，又 DE∩ME=E，
∴平面 DME∥平面 PBC，又 DM⊂平面 DME，
∴DM∥平面 PBC。
（Ⅲ）同解法一。

19. 解（Ⅰ）由已知得，样本中的 25 周岁以上组工人 60 名，25 周岁以下组工人 40 名. 所以，样本中日平均生产件不足 60 件的工人中，25 周岁以上组工人有 60×0.05=3（人），记为 A_1,A_2,A_3；25 周岁以上组工人有 40×0.05=2（人），记为 B_1,B_2. 从中随机抽取 2 名工人，所有的可能结果共有 10 种，它们是：（A_1,A_2），（A_1,A_3），（A_2,A_3），$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2)$. 其中，至少有一名“25

周岁以下组”工人的可能结果共有 7 种，它们是：$(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1B_2)$.故所求的概率P=$\frac{7}{10}$。

（Ⅱ）由频率分布直方图可知，在抽取的 100 名工人中，“25 岁以上组”中的生产能手 60×0.25=15（人），“25 岁以下组”中的生产能手 40×0.375=15（人），据此可得 2×2 列联表如下：

	生产能手	非生产能手	合计
25 岁以上组	15	45	60
25 岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

所以得 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(15\times25-15\times45)^2}{60\times40\times30\times70}=\frac{25}{14}\approx1.79.$

因为 1.79<2.706.

所以没有 90%的把握认为“生产能手与工人所在年龄组有关”。

20. 解（Ⅰ）抛物线 $y^2=4x$ 的准线 I 的方程为 X=-1.

由点 C 的纵坐标为 2，得点 C 的坐标为（1,2），

所以点 C 到准线 I 的距离 d=2,又 $|CO|=\sqrt{5}$，

所以 $|MN|=2\sqrt{|co|^2-d^2}=2\sqrt{5-4}=2.$

（Ⅱ）设 C $(\frac{y_o^2}{4},y_o)$,则圆C的方程为 $(X-\frac{y_o^2}{4})^2+(y-y_o)^2=\frac{y_o^4}{16}+y_o^2,$

即 $X^2-\frac{y_o^2}{2}X+y^2-2y_oy=0,$

由 $X=-1,$得$y^2-2y_oy+1+\frac{y_o^2}{2}=0,$

设 M $(-1,y_1),N(-1,y_2),$则$\begin{cases}\Delta=4y_0^2-4(1+\frac{y_o^2}{2})=2y_o^2-4>0,\\ y_1y_2=\frac{y_o^2}{2}+1.\end{cases}$

由$|AF|^2=|AM|\cdot|AN|$,得$|y_1y_2|=4$,

所以$\frac{y_o^2}{2}+1=4$,解得$y_o=\pm\sqrt{6}$,此时$\Delta>0$.

所以圆心C的坐标为（$\frac{3}{2},-\sqrt{6}$），

从而$|co|^2=\frac{33}{4},|co|=\frac{\sqrt{33}}{2}$,即圆C的半径为$\frac{\sqrt{33}}{2}$。

21.

解：（Ⅰ）在△OMP 中，∠OPM=45°，$OM=\sqrt{5}$，$OP=2\sqrt{2}$,

由余弦定理得，$OM^2=OP^2+MP^2-2\times OP\times MP\times\cos45°$，

得$MP^2-4MP+3=0$，解得 MP=1 或 MP=3.

（Ⅱ）设∠POM=a, 0°≤a≤60°，

在△OMP 中，由正弦定理，得$\frac{OM}{\sin\angle OPM}=\frac{OP}{\sin\angle OPM}$,

所以 OM=$\frac{op\sin45^\circ}{\sin(45^\circ+a)}$,

同理 ON=$\frac{op\sin45^\circ}{\sin(75^\circ+a)}$.

故$S_{\Delta omn}=\frac{1}{2}\times OM\times ON\times\sin\angle MON$

$=\frac{1}{4}\times\frac{op^2\sin^2 45^\circ}{\sin(45^\circ+a)\sin(75^\circ+a)}$

$=\frac{1}{\sin(45^\circ+a)\sin(45^\circ+a+30^\circ)}$

$=\frac{1}{\sin(45^\circ+a)[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(45^\circ+a)+\frac{1}{2}\cos(45^\circ+a)]}$

$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin^2(45^\circ+a)+\frac{1}{2}\sin(45^\circ+a)\cos(45^\circ+a)}$

$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}[1-\cos(90^\circ+2_a)]+\frac{1}{4}\sin(90^\circ+2_a)}$

$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin2a+\frac{1}{4}\cos2a}$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sin(2a+30^{\circ})}$$

22

解：（**I**）由 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^{x}}$，得 $f'(x)=1-\frac{a}{e^{x}}$.

又曲线 y=$f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线平行于 x 轴，

得 $f'(x)$=0，即 $1-\frac{a}{e}$=0，解得 a=e。

$$f'(x)=1-\frac{a}{e^{x}},$$

（Ⅱ）

①当 a≤0 时，f'（X）>0, f（X）为（-∞，+∞）上的增函数，所以函数 f（X）无极值。

②当 a>0 时，令 f'（X）=0，得 e^{x}=a, X=In a.

X∈(-∞,In a), f'（X）<0；X∈（In a，+∞）上单调递增，

故 f（X）在 X= In a 处取得极小值，且极小值为 f（In a）= In a，无极大值。综上，当 a≤0 时，函数 f（X）在 X= In a 处取得极小值 In a，无极大值。

（Ⅲ）当 a=1 时，$f(x)$=x−1+$\frac{1}{e^{x}}$.

令 $g(x)=f(x)-(kx-1)=(1-k)x+\frac{1}{e^{x}}$,

则直线 l：$y=kx-1$ 与曲线 y=$f(x)$ 没有公共点，等加于方程 $g(x)$=0 在 R 上没有实数解。

假设 $k>1$, 此时 $g(0)=1>0$, $g(\frac{1}{k-1})=-1+\frac{1}{e^{\frac{1}{k-1}}}<0$,

又函数 $g(x)$ 的图像连续不断，由零点存在定理，可知 $g(x)$=0 在 R 上至少有一解，与“方程 $g(x)$=0 在 R 上没有实数解”矛盾，故 $k\leq1$.

又 k=1 时，$g(x)=\frac{1}{e^{x}}>0$, 知方程 $g(x)$=0 在 R 上没有实数解。

所以 k 的最大值为 1.

解法二：

（I）（II）同解法一.

（III）当 a=1 时，$f(x)=x-1+\frac{1}{e^x}$.

直线 $l: y=kx-1$ 与曲线 y= $f(x)$ 没有公共点，

等价于关于 x 的方程 $kx-1=x-1+\frac{1}{e^x}$ 在 R 上没有实数解，即关于 x 的方程：

$$(k-1)x=\frac{1}{e^x} \qquad (*)$$

在 R 上没有实数解。

① 当 k=1 时，方程（*）可化为 $\frac{1}{e^x}$ =0，在 R 上没有实数解.

② 当 k≠1 时，方程（*）化为 $\frac{1}{k-1}=xe^x$.

令 $g(x)=xe^x$，则有 $g'(x)=(1+x)e^x$.

令 $g'(x)=0$ 得 x=-1，

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

当 x=-1 时，$g(x)_{\min}=-\frac{1}{e}$，同时当 x 趋于 $+\infty$ 时，$g(x)$ 趋于 $+\infty$，

从而 $g(x)$ 的取值范围为$[-\frac{1}{e}, +\infty)$.

所以当 $\frac{1}{k-1}\in(-\infty,-\frac{1}{e})$ 时，方程（*）无实数解，

解得 k 的取值范围是（1-e，1）.

综上①②，得 k 的最大值为 1.