

2016年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)数学理

一、选择题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题列出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合  $A = \{x \mid |x| < 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{0, 1\}$
- B.  $\{0, 1, 2\}$
- C.  $\{-1, 0, 1\}$
- D.  $\{-1, 0, 1, 2\}$

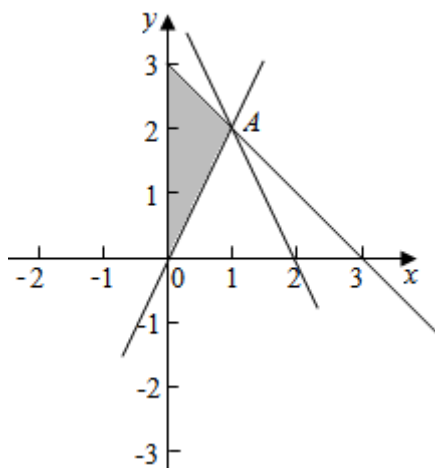
解析:  $\because$  集合  $A = \{x \mid |x| < 2\} = \{x \mid -2 < x < 2\}$ ,  $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ .

答案: C.

2. 若  $x, y$  满足  $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$  则  $2x + y$  的最大值为 ( )

- A. 0
- B. 3
- C. 4
- D. 5

解析: 作出不等式组  $\begin{cases} 2x - y \leq 0, \\ x + y \leq 3, \\ x \geq 0, \end{cases}$  对应的平面区域如图: (阴影部分).



设  $z = 2x + y$  得  $y = -2x + z$ ,

平移直线  $y = -2x + z$ ,

由图象可知当直线  $y = -2x + z$  经过点 A 时, 直线  $y = -2x + z$  的截距最大, 此时  $z$  最大.

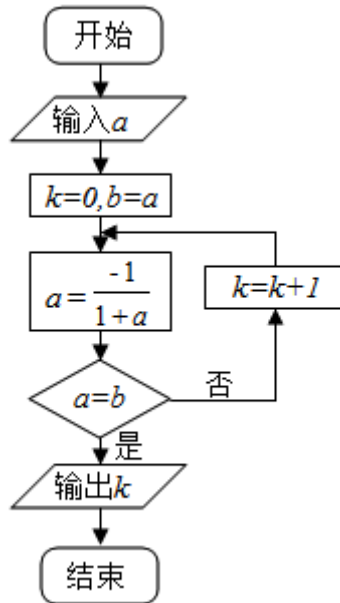
由  $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + y = 3, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases}$  即  $A(1, 2)$ ,

代入目标函数  $z = 2x + y$  得  $z = 1 \times 2 + 2 = 4$ .

即目标函数  $z=2x+y$  的最大值为 4.

答案: C

3. 执行如图所示的程序框图, 若输入的  $a$  值为 1, 则输出的  $k$  值为( )



- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

解析: 输入的  $a$  值为 1, 则  $b=1$ ,

第一次执行循环体后,  $a=-\frac{1}{2}$ , 不满足退出循环的条件,  $k=1$ ;

第二次执行循环体后,  $a=-2$ , 不满足退出循环的条件,  $k=2$ ;

第三次执行循环体后,  $a=1$ , 满足退出循环的条件,

故输出的  $k$  值为 2.

答案: B

4. 设  $\vec{a}, \vec{b}$  是向量, 则 “ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ” 是 “ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ” 的( )

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析: 若 “ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ”, 则以  $\vec{a}, \vec{b}$  为邻边的平行四边形是菱形;

若 “ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ”, 则以  $\vec{a}, \vec{b}$  为邻边的平行四边形是矩形;

故 “ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ” 是 “ $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ” 的既不充分也不必要条件.

答案: D.

5. 已知  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x > y > 0$ , 则( )

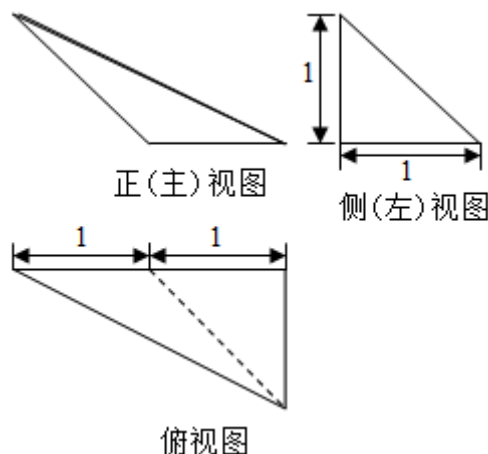
- A.  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} > 0$
- B.  $\sin x - \sin y > 0$
- C.  $(\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^y < 0$
- D.  $\ln x + \ln y > 0$

解析:  $\because x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x > y > 0$ , 则  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ ,  $\sin x$  与  $\sin y$  的大小关系不确定,  $(\frac{1}{2})^x < (\frac{1}{2})^y$ ,

即  $(\frac{1}{2})^x - (\frac{1}{2})^y < 0$ ,  $\ln x + \ln y$  与 0 的大小关系不确定.

答案: C.

6. 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的体积为( )



- A.  $\frac{1}{6}$
- B.  $\frac{1}{3}$
- C.  $\frac{1}{2}$
- D. 1

解析: 由已知中的三视图可得: 该几何体是一个以俯视图为底面的三棱锥,

棱锥的底面面积  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$ , 高为 1, 故棱锥的体积  $V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{6}$ .

答案: A

7. 将函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  图象上的点  $P(\frac{\pi}{4}, t)$  向左平移  $s (s > 0)$  个单位长度得到点  $P'$ , 若  $P'$  位于函数  $y = \sin 2x$  的图象上, 则( )

- A.  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$   
 B.  $t = \frac{3}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$   
 C.  $t = \frac{1}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$   
 D.  $t = \frac{3}{2}$ ,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{3}$

解析: 将  $x = \frac{\pi}{4}$  代入得:  $t = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ,

将函数  $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  图象上的点  $P$  向左平移  $s$  个单位, 得到  $P'(\frac{\pi}{4} - s, \frac{1}{2})$  点,

若  $P'$  位于函数  $y = \sin 2x$  的图象上,

则  $\sin(\frac{\pi}{2} - 2s) = \cos 2s = \frac{1}{2}$ , 则  $2s = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 则  $s = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,

由  $s > 0$  得: 当  $k=0$  时,  $s$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$ .

答案: A

8. 袋中装有偶数个球, 其中红球、黑球各占一半. 甲、乙、丙是三个空盒. 每次从袋中任意取出两个球, 将其中一个球放入甲盒, 如果这个球是红球, 就将另一个放入乙盒, 否则就放入丙盒. 重复上述过程, 直到袋中所有球都被放入盒中, 则( )

- A. 乙盒中黑球不多于丙盒中黑球  
 B. 乙盒中红球与丙盒中黑球一样多  
 C. 乙盒中红球不多于丙盒中红球  
 D. 乙盒中黑球与丙盒中红球一样多

解析: 取两个球共有 4 种情况:

- ①红+红, 则乙盒中红球数加 1 个;  
 ②黑+黑, 则丙盒中黑球数加 1 个;  
 ③红+黑(红球放入甲盒中), 则乙盒中黑球数加 1 个;  
 ④黑+红(黑球放入甲盒中), 则丙盒中红球数加 1 个.

设一共有球  $2a$  个, 则  $a$  个红球,  $a$  个黑球, 甲中球的总个数为  $a$ , 其中红球  $x$  个, 黑球  $y$  个,  $x+y=a$ .

则乙中有  $x$  个球, 其中  $k$  个红球,  $j$  个黑球,  $k+j=x$ ;

丙中有  $y$  个球, 其中  $l$  个红球,  $i$  个黑球,  $i+l=y$ ;

黑球总数  $a=y+i+j$ , 又  $x+y=a$ , 故  $x=i+j$

由于  $x=k+j$ , 所以可得  $i=k$ , 即乙中的红球等于丙中的黑球.

答案: B.

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分.

9. 设  $a \in \mathbb{R}$ , 若复数  $(1+i)(a+i)$  在复平面内对应的点位于实轴上, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解析:  $(1+i)(a+i) = a-1+(a+1)i$ ,

若复数  $(1+i)(a+i)$  在复平面内对应的点位于实轴上, 则  $a+1=0$ , 解得:  $a=-1$ .

答案: -1

10. 在  $(1-2x)^6$  的展开式中,  $x^2$  的系数为\_\_\_\_\_。(用数字作答)

解析:  $(1-2x)^6$  的展开式中, 通项公式  $T_{r+1} = C_6^r (-2x)^r = (-2)^r C_6^r x^r$ ,

令  $r=2$ , 则  $x^2$  的系数  $= (-2)^2 C_6^2 = 60$ .

答案: 60.

11. 在极坐标系中, 直线  $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta - 1 = 0$  与圆  $\rho = 2 \cos \theta$  交于 A, B 两点, 则  $|AB| =$ \_\_\_\_\_.

解析: 直线  $\rho \cos \theta - \sqrt{3} \rho \sin \theta - 1 = 0$  化为直角坐标方程  $x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ .

圆  $\rho = 2 \cos \theta$  化为  $\rho^2 = 2\rho \cos \theta$ ,  $\therefore x^2 + y^2 = 2x$ , 配方为  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ , 可得圆心  $C(1, 0)$ , 半径  $r=1$ . 则圆心 C 在直线上,  $\therefore |AB|=2$ .

答案: 2.

12. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前 n 项和. 若  $a_1=6$ ,  $a_3+a_5=0$ , 则  $S_6 =$ \_\_\_\_\_.

解析:  $\because \{a_n\}$  为等差数列,  $S_n$  为其前 n 项和.  $a_1=6$ ,  $a_3+a_5=0$ ,  $\therefore a_1+2d+a_1+4d=0$ ,

$\therefore 12+6d=0$ , 解得  $d=-2$ ,  $\therefore S_6 = 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2} d = 36 - 30 = 6$ .

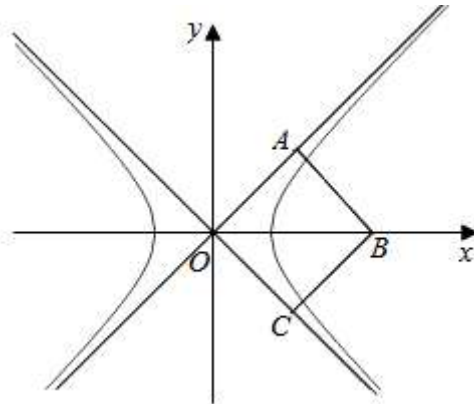
答案: 6

13. 双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的渐近线为正方形 OABC 的边 OA, OC 所在的直线, 点 B

为该双曲线的焦点. 若正方形 OABC 的边长为 2, 则  $a =$ \_\_\_\_\_.

解析:  $\because$  双曲线的渐近线为正方形 OABC 的边 OA, OC 所在的直线,

$\therefore$  渐近线互相垂直, 则双曲线为等轴双曲线, 即渐近线方程为  $y = \pm x$ ,



即  $a=b$ ,

$\because$  正方形 OABC 的边长为 2,  $\therefore OB = 2\sqrt{2}$ , 即  $c = 2\sqrt{2}$ , 则  $a^2 + b^2 = c^2 = 8$ , 即  $2a^2 = 8$ , 则  $a^2 = 4$ ,  $a = 2$ ,

答案：2

14. 设函数  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq a, \\ -2x, & x > a. \end{cases}$

①若  $a=0$ , 则  $f(x)$  的最大值为\_\_\_\_\_.

②若  $f(x)$  无最大值, 则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析: ①若  $a=0$ , 则  $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & x \leq 0, \\ -2x, & x > 0, \end{cases}$

则  $f'(x) = 3x^2 - 3, x \leq 0, x > 0,$

当  $x < -1$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时函数为增函数,

当  $x > -1$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时函数为减函数,

故当  $x = -1$  时,  $f(x)$  的最大值为 2;

② $f'(x) = 3x^2 - 3, x \leq a-2, x > a,$

令  $f'(x) = 0$ , 则  $x = \pm 1$ ,

若  $f(x)$  无最大值, 则  $\begin{cases} a \leq -1, \\ -2a > a^3 - 3a, \end{cases}$  或  $\begin{cases} a > -1, \\ -2a > a^3 - 3a, \\ -2a > 2, \end{cases}$  解得:  $a \in (-\infty, -1)$ .

答案：2

三、解答题共 6 小题, 共 80 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. 在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$ .

(I) 求  $\angle B$  的大小;

(II) 求  $\sqrt{2} \cos A + \cos C$  的最大值.

解析: (I) 根据已知和余弦定理, 可得  $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 进而得到答案:

(II) 由(I)得:  $C = \frac{3\pi}{4} - A$ , 结合正弦型函数的图象和性质, 可得  $\sqrt{2} \cos A + \cos C$  的最大值.

答案: (I)  $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 + c^2 = b^2 + \sqrt{2}ac$ .

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{2}ac. \therefore \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{2}ac}{2ac} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{4}.$$

(II) 由(I)得:  $C = \frac{3\pi}{4} - A$ ,

$$\therefore \sqrt{2} \cos A + \cos C = \sqrt{2} \cos A + \cos\left(\frac{3\pi}{4} - A\right) = \sqrt{2} \cos A - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin A = \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\because A \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right), \therefore A + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right),$$

故当  $A + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  时,  $\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$  取最大值 1, 即  $\sqrt{2} \cos A + \cos C$  的最大值为 1.

16. A, B, C 三个班共有 100 名学生, 为调查他们的体育锻炼情况, 通过分层抽样获得了部分学生一周的锻炼时间, 数据如表(单位: 小时):

A班	6	6.5	7	7.5	8			
B班	6	7	8	9	10	11	12	
C班	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12	13.5

(I) 试估计 C 班的学生人数;

(II) 从 A 班和 C 班抽出的学生中, 各随机选取一个人, A 班选出的人记为甲, C 班选出的人记为乙. 假设所有学生的锻炼时间相对独立, 求该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;

(III) 再从 A, B, C 三班中各随机抽取一名学生, 他们该周锻炼时间分别是 7, 9, 8.25(单位: 小时), 这 3 个新数据与表格中的数据构成的新样本的平均数记为  $\mu_1$ , 表格中数据的平均数记为  $\mu_0$ , 试判断  $\mu_0$  和  $\mu_1$  的大小.(结论不要求证明)

解析: (I) 由已知先计算出抽样比, 进而可估计 C 班的学生人数;

(II) 根据古典概型概率计算公式, 可求出该周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率;

(III) 根据平均数的定义, 可判断出  $\mu_0 > \mu_1$ .

答案: (I) 由题意得: 三个班共抽取 20 个学生, 其中 C 班抽取 8 个,

故抽样比  $K = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ , 故 C 班有学生  $8 \div \frac{1}{5} = 40$  人,

(II) 从 A 班和 C 班抽出的学生中, 各随机选取一个人, 共有  $5 \times 8 = 40$  种情况, 而且这些情况是等可能发生的,

当甲锻炼时间为 6 时, 甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 2 种情况;

当甲锻炼时间为 6.5 时, 甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况;

当甲锻炼时间为 7 时, 甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况;

当甲锻炼时间为 7.5 时, 甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 3 种情况;

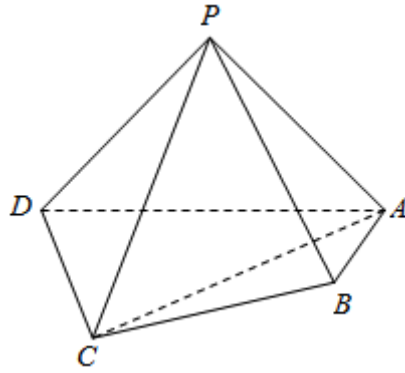
当甲锻炼时间为 8 时, 甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长有 4 种情况;

故周甲的锻炼时间比乙的锻炼时间长的概率  $P = \frac{2+3+3+3+4}{40} = \frac{3}{8}$ ;

(III)  $\mu_0 > \mu_1$ .

17. 如图, 在四棱锥 P-ABCD 中, 平面 PAD  $\perp$  平面 ABCD, PA  $\perp$  PD, PA=PD, AB  $\perp$  AD, AB=1, AD=2,

$$AC=CD=\sqrt{5}.$$



(I) 求证:  $PD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 求直线  $PB$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值;

(III) 在棱  $PA$  上是否存在点  $M$ , 使得  $BM \parallel$  平面  $PCD$ ? 若存在, 求  $\frac{AM}{AP}$  的值, 若不存在, 说明理由.

解析: (I) 由已知结合面面垂直的性质可得  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 进一步得到  $AB \perp PD$ , 再由  $PD \perp PA$ , 由线面垂直的判定得到  $PD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 取  $AD$  中点为  $O$ , 连接  $CO, PO$ , 由已知可得  $CO \perp AD, PO \perp AD$ . 以  $O$  为坐标原点, 建立空间直角坐标系, 求得  $P(0, 0, 1), B(1, 1, 0), D(0, -1, 0), C(2, 0, 0)$ , 进一步求出向量  $\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PD}, \overrightarrow{PC}$  的坐标, 再求出平面  $PCD$  的法向量  $\vec{n}$ , 设  $PB$  与平面  $PCD$  的夹角为  $\theta$ ,

由  $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}|}{\|\vec{n}\| \|\overrightarrow{PB}\|}$  求得直线  $PB$  与平面  $PCD$  所成角的正弦值;

(III) 假设存在  $M$  点使得  $BM \parallel$  平面  $PCD$ , 设  $\frac{AM}{AP} = \lambda, M(0, y_1, z_1)$ , 由  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$  可得  $M(0,$

$1-\lambda, \lambda), \overrightarrow{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$ , 由  $BM \parallel$  平面  $PCD$ , 可得  $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$ , 由此列式求得当  $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$  时,  $M$  点即为所求.

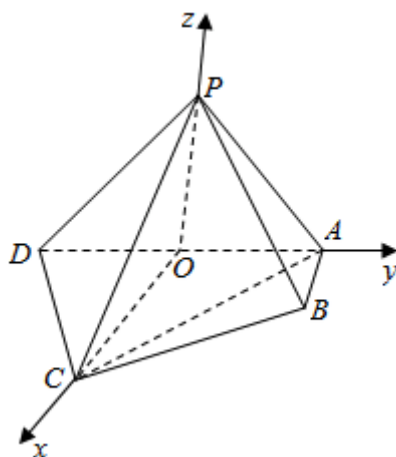
答案: (I)  $\because$  平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 且平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ , 且  $AB \perp AD, AB \subset$  平面  $ABCD, \therefore AB \perp$  平面  $PAD$ ,

$\because PD \subset$  平面  $PAD, \therefore AB \perp PD$ ,

又  $PD \perp PA$ , 且  $PA \cap AB = A, \therefore PD \perp$  平面  $PAB$ ;

(II) 取  $AD$  中点为  $O$ , 连接  $CO, PO$ ,





$\because CD=AC=\sqrt{5}, \therefore CO \perp AD,$

又 $\because PA=PD, \therefore PO \perp AD.$

以 O 为坐标原点, 建立空间直角坐标系如图:

则  $P(0, 0, 1), B(1, 1, 0), D(0, -1, 0), C(2, 0, 0),$

则  $\overrightarrow{PB}=(1, 1, -1), \overrightarrow{PD}=(0, -1, -1), \overrightarrow{PC}=(2, 0, -1), \overrightarrow{CD}=(-2, -1, 0),$

设  $\vec{n}=(x_0, y_0, 1)$  为平面 PCD 的法向量,

则由  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \end{cases}$  得  $\begin{cases} -y_0 - 1 = 0, \\ 2x_0 - 1 = 0, \end{cases}$  则  $\vec{n}=(\frac{1}{2}, -1, 1).$

设 PB 与平面 PCD 的夹角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{PB} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{PB}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\frac{1}{2} - 1 - 1|}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$

(III) 假设存在 M 点使得  $BM \parallel$  平面 PCD, 设  $\frac{AM}{AP} = \lambda, M(0, y_1, z_1),$

由(II)知,  $A(0, 1, 0), P(0, 0, 1), \overrightarrow{AP}=(0, -1, 1), B(1, 1, 0), \overrightarrow{AM}=(0, y_1-1, z_1),$

则有  $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP},$  可得  $M(0, 1-\lambda, \lambda), \therefore \overrightarrow{BM}=(-1, -\lambda, \lambda),$

$\because BM \parallel$  平面 PCD,  $\vec{n}=(\frac{1}{2}, -1, 1)$  为平面 PCD 的法向量,  $\therefore \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0,$  即  $-\frac{1}{2} + \lambda + \lambda = 0,$

解得  $\lambda = \frac{1}{4}.$

综上, 存在点 M, 即当  $\frac{AM}{AP} = \frac{1}{4}$  时, M 点即为所求.

18. 设函数  $f(x) = xe^{a-x} + bx,$  曲线  $y=f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y=(e-1)x+4,$

(I) 求 a, b 的值;

(II) 求  $f(x)$  的单调区间.

解析: (I) 求函数的导数, 根据导数的几何意义求出函数的切线斜率以及  $f(2)$ , 建立方程组关系即可求  $a, b$  的值;

(II) 求函数的导数, 利用函数单调性和导数之间的关系即可求  $f(x)$  的单调区间.

答案: (I)  $\because y=f(x)$  在点  $(2, f(2))$  处的切线方程为  $y=(e-1)x+4$ ,

$\therefore$  当  $x=2$  时,  $y=2(e-1)+4=2e+2$ , 即  $f(2)=2e+2$ ,

同时  $f'(2)=e-1$ ,

$\because f(x)=xe^{a-x}+bx$ ,  $\therefore f'(x)=e^{a-x}-xe^{a-x}+b$ ,

$$\text{则} \begin{cases} f(2) = 2e^{a-2} + 2b = 2e + 2, \\ f'(2) = e^{a-2} - 2e^{a-2} + b = e - 1, \end{cases} \quad \text{即 } a=2, b=e.$$

(II)  $\because a=2, b=e; \therefore f(x)=xe^{2-x}+ex$ ,

$\therefore f'(x)=e^{2-x}-xe^{2-x}+e=(1-x)e^{2-x}+e$ ,  $f''(x)=-e^{2-x}-(1-x)e^{2-x}=(x-2)e^{2-x}$ ,

由  $f''(x)>0$  得  $x>2$ , 由  $f''(x)<0$  得  $x<2$ ,

即当  $x=2$  时,  $f'(x)$  取得极小值  $f'(2)=(1-2)e^{2-2}+e=e-1>0$ ,

$\therefore f'(x)>0$  恒成立, 即函数  $f(x)$  是增函数, 即  $f(x)$  的单调区间是  $(-\infty, +\infty)$ .

19. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $A(a, 0), B(0, b), O(0, 0)$ ,

$\triangle OAB$  的面积为 1.

(I) 求椭圆  $C$  的方程;

(II) 设  $P$  是椭圆  $C$  上一点, 直线  $PA$  与  $y$  轴交于点  $M$ , 直线  $PB$  与  $x$  轴交于点  $N$ . 求证:  $|AN| \cdot |BM|$  为定值.

解析: (I) 运用椭圆的离心率公式和三角形的面积公式, 结合  $a, b, c$  的关系, 解方程可得  $a=2, b=1$ , 进而得到椭圆方程;

(II) 设椭圆上点  $P(x_0, y_0)$ , 可得  $x_0^2+4y_0^2=4$ , 求出直线  $PA$  的方程, 令  $x=0$ , 求得  $y$ ,  $|BM|$ ; 求出直线  $PB$  的方程, 令  $y=0$ , 可得  $x$ ,  $|AN|$ , 化简整理, 即可得到  $|AN| \cdot |BM|$  为定值 4.

答案: (I) 由题意可得  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

又  $\triangle OAB$  的面积为 1, 可得  $\frac{1}{2}ab=1$ , 且  $a^2-b^2=c^2$ , 解得  $a=2, b=1, c=\sqrt{3}$ ,

可得椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ;

(II) 设椭圆上点  $P(x_0, y_0)$ ,

可得  $x_0^2+4y_0^2=4$ ,

直线  $PA: y = \frac{y_0}{x_0-2}(x-2)$ , 令  $x=0$ , 可得  $y = -\frac{2y_0}{x_0-2}$ , 则  $|BM| = \left| 1 + \frac{2y_0}{x_0-2} \right|$ ;

直线  $PB: y = y_0 - 1x_0x + 1$ , 令  $y=0$ , 可得  $x = -x_0y_0 - 1$ , 则  $|AN| = \left| 2 + \frac{x_0}{y_0-1} \right|$ .

$$\begin{aligned}
\text{可得 } |AN| \cdot |BM| &= \left| 2 + \frac{x_0}{y_0 - 1} \right| \cdot \left| 1 + \frac{2y_0}{x_0 - 2} \right| \\
&= \left| \frac{(x_0 + 2y_0 - 2)^2}{(x_0 - 2)(y_0 - 1)} \right| = \left| \frac{x_0^2 + 4y_0^2 + 4 + 4x_0y_0 - 4x_0 - 8y_0}{2 + x_0y_0 - x_0 - 2y_0} \right| \\
&= \left| \frac{8 + 4x_0y_0 - 4x_0 - 8y_0}{2 + x_0y_0 - x_0 - 2y_0} \right| = 4,
\end{aligned}$$

即有  $|AN| \cdot |BM|$  为定值 4.

20. 设数列  $A: a_1, a_2, \dots, a_N$  ( $N \geq 2$ ). 如果对小于  $n$  ( $2 \leq n \leq N$ ) 的每个正整数  $k$  都有  $a_k < a_n$ , 则称  $n$  是数列  $A$  的一个“G 时刻”, 记  $G(A)$  是数列  $A$  的所有“G 时刻”组成的集合.

(I) 对数列  $A: -2, 2, -1, 1, 3$ , 写出  $G(A)$  的所有元素;

(II) 证明: 若数列  $A$  中存在  $a_n$  使得  $a_n > a_1$ , 则  $G(A) \neq \emptyset$ ;

(III) 证明: 若数列  $A$  满足  $a_n - a_{n-1} \leq 1$  ( $n=2, 3, \dots, N$ ), 则  $G(A)$  的元素个数不小于  $a_N - a_1$ .

解析: (I) 结合“G 时刻”的定义进行分析;

(II) 可以采用假设法和递推法进行分析;

(III) 可以采用假设法和列举法进行分析.

答案: (I) 根据题意可得,  $a_1 = -2, a_2 = 2, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = 3$ ,  $a_1 < a_2$  满足条件, 2 满足条件,  $a_2 > a_3$  不满足条件, 3 不满足条件,

$a_2 > a_4$  不满足条件, 4 不满足条件,  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 均小于  $a_5$ , 因此 5 满足条件, 因此  $G(A) = \{2, 5\}$ .

(II) 因为存在  $a_n > a_1$ , 设数列  $A$  中第一个大于  $a_1$  的项为  $a_k$ , 则  $a_k > a_1 \geq a_i$ , 其中  $2 \leq i \leq k-1$ , 所以  $k \in G(A)$ ,  $G(A) \neq \emptyset$ ;

(III) 设  $A$  数列的所有“G 时刻”为  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ,

对于第一个“G 时刻” $i_1$ , 有  $a_{i_1} > a_1 \geq a_i$  ( $i=2, 3, \dots, i_1-1$ ), 则  $a_{i_1} - a_i \leq a_{i_1} - a_{i_1-1} \leq 1$ .

对于第二个“G 时刻” $i_2$ , 有  $a_{i_2} > a_{i_1} \geq a_i$  ( $i=2, 3, \dots, i_2-1$ ), 则  $a_{i_2} - a_i \leq a_{i_2} - a_{i_2-1} \leq 1$ .

类似的  $a_{i_3} - a_{i_2} \leq 1, \dots, a_{i_k} - a_{i_k-1} \leq 1$ .

于是,  $k \geq (a_{i_k} - a_{i_k-1}) + (a_{i_k-1} - a_{i_k-2}) + \dots + (a_{i_2} - a_{i_1}) + (a_{i_1} - a_1) = a_{i_k} - a_1$ .

对于  $a_N$ , 若  $N \in G(A)$ , 则  $a_{i_k} = a_N$ .

若  $N \notin G(A)$ , 则  $a_N \leq a_{i_k}$ , 否则由(2)知  $a_{i_k}, a_{i_k} + 1, \dots, a_N$ , 中存在“G 时刻”与只有  $k$  个“G

时刻”矛盾. 从而  $k \geq a_{i_k} - a_1 \geq a_N - a_1$ .