2018年普通高等学校招生全国统一考试(浙江卷)数学

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知全集U={1，2，3，4，5}，A={1，3}，则C_UA=(　　)

A.∅

B.{1，3}

C.{2，4，5}

D.{1，2，3，4，5}

解析：根据补集的定义，C_UA是由所有属于集合U但不属于A的元素构成的集合，由已知，有且仅有2，4，5符合元素的条件.C_UA={2，4，5}.

答案：C

2.双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的焦点坐标是(　　)

A.(-$\sqrt{2}$，0)，($\sqrt{2}$，0)

B.(-2，0)，(2，0)

C.(0，-$\sqrt{2}$)，(0，$\sqrt{2}$)

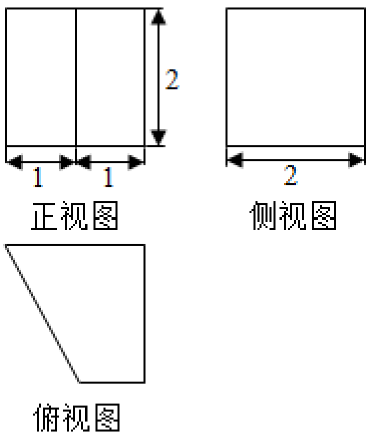
D.(0，-2)，(0，2)

解析：∵双曲线方程可得双曲线的焦点在x轴上，且a^2=3，b^2=1，

由此可得c=$\sqrt{a^2+b^2}$=2，∴该双曲线的焦点坐标为(±2，0)

答案：B

3.某几何体的三视图如图所示(单位：cm)，则该几何体的体积(单位：cm^3)是(　　)



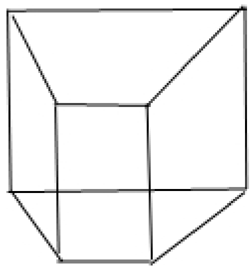
A.2

B.4

C. 6

D. 8

解析：根据三视图：该几何体为底面为直角梯形的四棱柱.如图所示：



故该几何体的体积为：V=$\frac{1}{2}(1+2)\cdot 2\cdot 2$=6.

答案：C

4. 复数$\frac{2}{1-i}$(i 为虚数单位)的共轭复数是(　　)

A. 1+i

B. 1-i

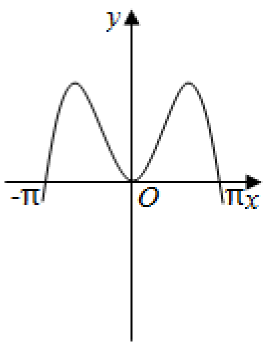
C. -1+i

D. -1-i

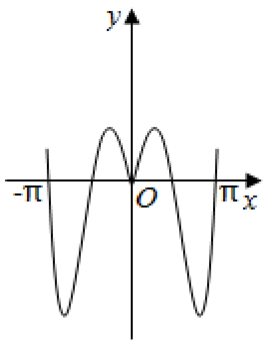
解析：化简可得$z=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$，∴z 的共轭复数$\bar{z}$=1-i.

答案：B

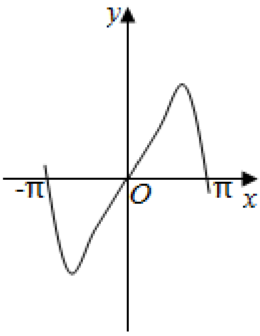
5. 函数 y=$2^{|x|}$sin2x 的图象可能是(　　)



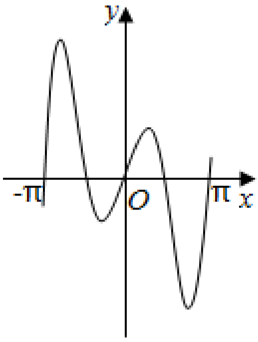
A.



B.



C.



D.

解析：根据函数的解析式 $y=2^{|x|}\sin 2x$，得到：函数的图象为奇函数，

故排除 A 和 B. 当 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数的值也为 0，故排除 C.

答案：D

6. 已知平面α，直线 m，n 满足 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则“m∥n”是“m∥α”的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：∵$m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，∴当 m∥n 时，m∥α 成立，即充分性成立，

当 m∥α 时，m∥n 不一定成立，即必要性不成立，

则“m∥n”是“m∥α”的充分不必要条件.

答案：A

7. 设 $0<p<1$，随机变量ξ 的分布列是

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

则当 p 在(0，1)内增大时，(　　)

A. D(ξ)减小

B. D(ξ)增大

C. D(ξ)先减小后增大

D. D(ξ)先增大后减小

解析：设 0＜p＜1，随机变量ξ 的分布列是 E(ξ)=$0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=p+\frac{1}{2}$；

方差是 D(ξ)=
$$\left(0-p-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1-p}{2}+\left(1-p-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(2-p-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{p}{2}=-p^2+p+\frac{1}{4}=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$
，

∴p∈(0，$\frac{1}{2}$)时，D(ξ)单调递增；

p∈($\frac{1}{2}$，1)时，D(ξ)单调递减；

∴D(ξ)先增大后减小.

答案：D

8.已知四棱锥 S-ABCD 的底面是正方形，侧棱长均相等，E 是线段 AB 上的点(不含端点).设 SE 与 BC 所成的角为θ_1，SE 与平面 ABCD 所成的角为θ_2，二面角 S-AB-C 的平面角为θ_3，则(　　)

A.$\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\theta_3$

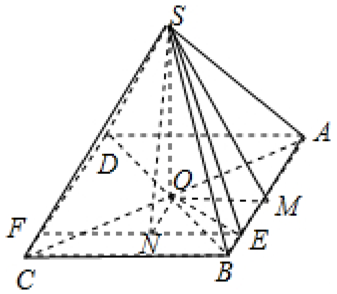
B.$\theta_3\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$

C.$\theta_1\leqslant\theta_3\leqslant\theta_2$

D.$\theta_2\leqslant\theta_3\leqslant\theta_1$

解析：∵由题意可知 S 在底面 ABCD 的射影为正方形 ABCD 的中心.

过 E 作 EF∥BC，交 CD 于 F，过底面 ABCD 的中心 O 作 ON⊥EF 交 EF 于 N，



连接 SN，取 CD 中点 M，连接 SM，OM，OE，则 EN=OM，

则θ_1=∠SEN，θ_2=∠SEO，θ_3=∠SMO.

显然，θ_1，θ_2，θ_3均为锐角.

∵$\tan\theta_1=\frac{SN}{NE}=\frac{SN}{OM},\tan\theta_3=\frac{SO}{OM}$,SN≥SO，∴$\theta_1\geqslant\theta_3$，

又$\sin\theta_3=\frac{SO}{SM},\sin\theta_2=\frac{SO}{SE}$，SE≥SM，∴$\theta_3\geqslant\theta_2$.

答案：D

9.已知$\vec{a},\vec{b},\vec{e}$是平面向量，$\vec{e}$是单位向量.若非零向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，向量$\vec{b}$满足$\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的最小值是(　　)

A. $\sqrt{3}-1$

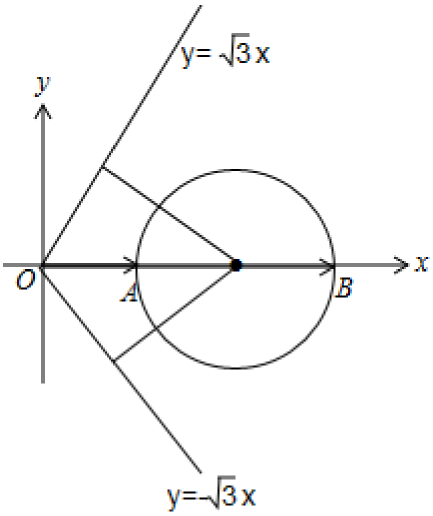
B. $\sqrt{3}+1$

C. $\sqrt{2}$

D. $2-\sqrt{3}$

解析：由$\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$，得$(\vec{b}-\vec{e})\cdot(\vec{b}-3\vec{e})$=0，∴$(\vec{b}-\vec{e})\perp(\vec{b}-3\vec{e})$，

如图，不妨设$\vec{e}$=(1，0)，则$\vec{b}$的终点在以(2，0)为圆心，以1为半径的圆周上，



又非零向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$\vec{a}$的终点在不含端点O的两条射线 y=±$\sqrt{3}$x(x＞0)上.

不妨以 y=$\sqrt{3}$x 为例，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值是(2，0)到直线$\sqrt{3}$x=y=0的距离减1.

即$\frac{|2\sqrt{3}|}{\sqrt{3}+1}-1=\sqrt{3}-1$.

答案：A

10.已知 a_1，a_2，a_3，a_4成等比数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$，若 $a_1>1$，则(　　)

A. $a_1<a_3$，$a_2<a_4$

B. $a_1>a_3$，$a_2<a_4$

C. $a_1<a_3$，$a_2>a_4$

D. $a_1>a_3$，$a_2>a_4$

解析：a_1，a_2，a_3，a_4成等比数列，由等比数列的性质可知，奇数项符号相同，偶数项符号相同，$a_1>1$，设公比为 q，

当 q＞0 时，$a_1+a_2+a_3+a_4>a_1+a_2+a_3$，$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$，不成立，

即：$a_1>a_3$，$a_2>a_4$，$a_1<a_3$，$a_2<a_4$，不成立，排除 A、D.

当 q=-1 时，$a_1+a_2+a_3+a_4=0$，$\ln(a_1+a_2+a_3)>0$，等式不成立，所以 q≠-1；

当 q<-1 时，$a_1+a_2+a_3+a_4<0$，$\ln(a_1+a_2+a_3)>0$，$a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$不成立，
当 q∈(-1，0)时，$a_1>a_3>0$，$a_2<a_4<0$，并且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$，能够成立，
答案：B

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

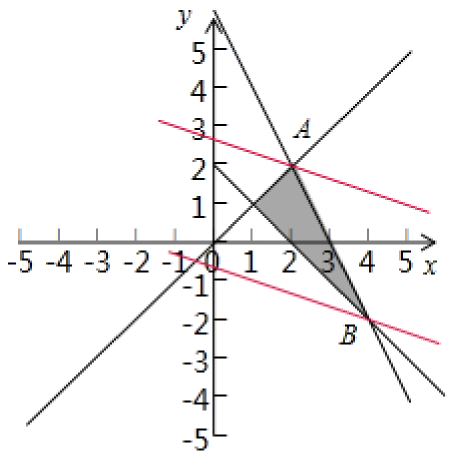
11.我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题："今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一.凡百钱，买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？"设鸡翁，鸡母，鸡雏个数分别为 x，y，z，则$\begin{cases}x+y+z=100,\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100,\end{cases}$当 z=81 时，x=__________，y=__________.

解析：$\begin{cases}x+y+z=100,\\5x+3y+\frac{1}{3}z=100,\end{cases}$当 z=81 时，化为：$\begin{cases}x+y=19,\\5x+3y=73,\end{cases}$解得 x=8，y=11.

答案：8；11

12.若 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\ge 0,\\2x+y\le 6,\\x+y\ge 2,\end{cases}$则 z=x+3y 的最小值是_________,最大值是_________.

解析：作出 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\ge 0,\\2x+y\le 6,\\x+y\ge 2,\end{cases}$表示的平面区域，如图：



其中 B(4，-2)，A(2，2).
设 z=F(x，y)=x+3y，
将直线 l：z=x+3y 进行平移，观察直线在 y 轴上的截距变化，
可得当 l 经过点 B 时，目标函数 z 达到最小值.∴z 最小值=F(4，-2)=-2.
可得当 l 经过点 A 时，目标函数 z 达到最最大值：z 最大值=F(2，2)=8.
答案：-2；8

13.在△ABC中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c.若a=$\sqrt{7}$,b=2,A=60° ,则sinB=________,c=________.

解析：∵在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c.a=$\sqrt{7}$，b=2，A=60°，

∴由正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即$\frac{7}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin B}$，解得sinB=$\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

由余弦定理得：cos60° =$\frac{4+c^2-7}{2\times 2c}$，解得c=3或c=-1(舍)，∴sinB=$\frac{\sqrt{21}}{7}$，c=3.

答案：$\frac{\sqrt{21}}{7}$，3

14.二项式($\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x}$)^{8}的展开式的常数项是________.

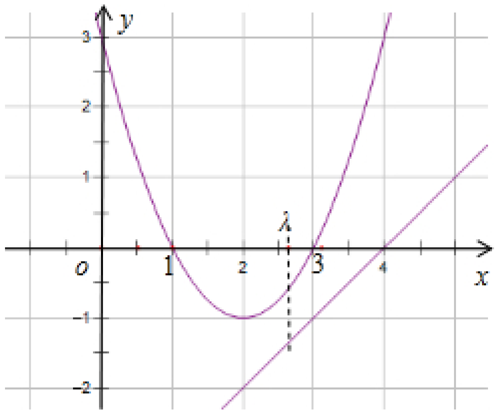
解析：由$T_{r+1}=C_8^r\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-r}\cdot\left(\frac{1}{2x}\right)^r=\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot C_8^r\cdot x^{\frac{8-4r}{3}}$.

令$\frac{8-4r}{3}$=0，得r=2.∴二项式($\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x}$)^{8}的展开式的常数项是($\frac{1}{2}$)^2•C_8^2=7.

答案：7

15.已知λ ∈R，函数 f(x)=$\begin{cases}x-4, & x\geq\lambda,\\ x^2-4x+3, & x<\lambda,\end{cases}$当λ =2 时，不等式 f(x)＜0 的解集是________.若函数f(x)恰有2个零点，则λ 的取值范围是________.

解析：当λ =2时函数f(x)=$\begin{cases}x-4, & x\geq 2,\\ x^2-4x+3, & x<2,\end{cases}$显然x≥2时，不等式x-4＜0的解集：{x|2≤x＜4}；x＜2时，不等式f(x)＜0化为：x^2-4x+3＜0，解得1＜x＜2，综上，不等式的解集为：{x|1＜x＜4}.函数f(x)恰有2个零点，函数f(x)=$\begin{cases}x-4, & x\geq\lambda,\\ x^2-4x+3, & x<\lambda,\end{cases}$的草图如图：



函数 f(x)恰有 2 个零点，则λ ∈(1，3].

答案：{x|1<x<4}；(1，3].

16. 从 1，3，5，7，9 中任取 2 个数字，从 0，2，4，6 中任取 2 个数字，一共可以组成________个没有重复数字的四位数.(用数字作答)

解析：从 1，3，5，7，9 中任取 2 个数字有 C_5^2 种方法，

从 2，4，6，0 中任取 2 个数字不含 0 时，有 C_3^2 种方法，

可以组成 $C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot A_4^4=720$ 个没有重复数字的四位数；

含有 0 时，0 不能在千位位置，其它任意排列，共有 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot A_3^3=540$，

故一共可以组成 1260 个没有重复数字的四位数.

答案：1260

17. 已知点 P(0，1)，椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=m(m>1)$ 上两点 A，B 满足 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则当 m=________时，点 B 横坐标的绝对值最大.

解析：设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

由 P(0，1)，$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，可得 $-x_1=2x_2$，$1-y_1=2(y_2-1)$，即有 $x_1=-2x_2$，$y_1+2y_2=3$，

又 $x_1^2+4y_1^2=4m$，即为 $x_2^2+y_1^2=m$，①

$x_2^2+4y_2^2=4m$，②

①-②得 $(y_1-2y_2)(y_1+2y_2)=-3m$，

可得 $y_1-2y_2=-m$，解得 $y_1=\frac{3-m}{2}$，$y_2=\frac{3+m}{4}$，则 $m=x_2^2+\left(\frac{3-m}{2}\right)^2$，

即有 $x_2^2=m-\left(\frac{3-m}{2}\right)^2=\frac{-m^2+10m-9}{4}=\frac{-(m-5)^2+16}{4}$，

即有 m=5 时，x_2^2 有最大值 16，即点 B 横坐标的绝对值最大.

答案：5

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 已知角α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 P$(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

(Ⅰ)求 sin(α +π)的值；

(Ⅱ)若角β 满足 sin(α +β)=$\frac{5}{13}$，求 cosβ 的值.

解析：(Ⅰ)由已知条件即可求 r，则 sin(α +π)的值可得；

(Ⅱ)由已知条件即可求 sinα ，cosα ，cos(α +β)，再由 cosβ =cos[(α +β)−α]=cos(α +β)cosα +sin(α +β)sinα 代值计算得答案.

答案：(Ⅰ)∵角α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴非负半轴重合，终边过点 P$(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5})$.

$\therefore x=-\frac{3}{5},\ \ y=-\frac{4}{5},\ \ r=|OP|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=1$，∴sin(α +π)=−sinα $=-\frac{y}{r}=\frac{4}{5}$；

(Ⅱ)由 x=$-\frac{3}{5}$，y=$-\frac{4}{5}$，r=|OP|=1，

得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5},\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，又由 sin(α +β)=$\frac{12}{13}$，

得 cos(α +β)=$\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\pm\frac{12}{13}$，

则 cos β =cos[(α + β)− α]=cos(α + β)cos α +sin(α + β)sin α =

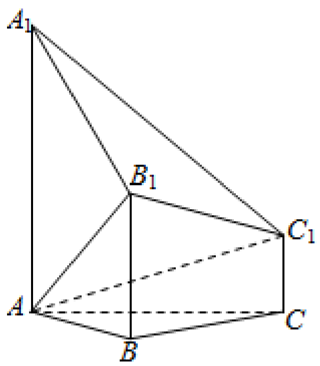
$\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{56}{65}$，

或 cos β =cos[(α + β)− α]=cos(α + β)cos α +sin(α + β)sin α

$=-\frac{12}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{65}$.

∴cosβ 的值为$-\frac{56}{65}$或$\frac{16}{65}$.

19. 如图，已知多面体 $ABCA_1B_1C_1$，A_1A，B_1B，C_1C 均垂直于平面 ABC，∠ABC=120°，$A_1A=4$，$C_1C=1$，$AB=BC=B_1B=2$.



(Ⅰ)证明：$AB_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$；

(Ⅱ)求直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值.

解析：(I)利用勾股定理的逆定理证明 $AB_1\perp A_1B_1$，$AB_1\perp B_1C_1$，从而可得 $AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$；
(II)以 AC 的中点为坐标原点建立空间坐标系，求出平面 ABB_1 的法向量 n，计算 n 与 AC_1 的夹角即可得出线面角的大小.

答案：(I)∵$A_1A\perp$ 平面 ABC，$B_1B\perp$ 平面 ABC，∴$AA_1\parallel BB_1$，

∵$AA_1=4$，$BB_1=2$，$AB=2$，∴$A_1B_1=\sqrt{(AB)^2+(AA_1-BB_1)^2}=2\sqrt{2}$，

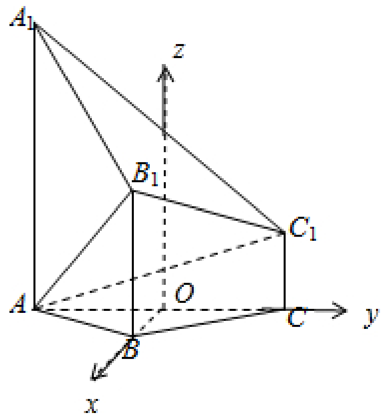
又 $AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=2\sqrt{2}$，∴$AA_1^2=AB_1^2+A_1B_1^2$，∴$AB_1\perp A_1B_1$，

同理可得：$AB_1\perp B_1C_1$，又 $A_1B_1\cap B_1C_1=B_1$，∴$AB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

(II)取 AC 中点 O，过 O 作平面 ABC 的垂线 OD，交 A_1C_1 于 D，

∵AB=BC，∴OB⊥OC，∵AB=BC=2，∠BAC=120°，∴OB=1，OA=OC=3，

以 O 为原点，以 OB，OC，OD 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示：



则 $A(0，-\sqrt{3}，0)$，$B(1，0，0)$，$B_1(1，0，2)$，$C_1(0，\sqrt{3}，1)$，

∴ $\overrightarrow{AB}=(1，\sqrt{3}，0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0，0，2)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0，2\sqrt{3}，1)$，

设平面 ABB_1 的法向量为 $\vec{n}=(x，y，z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$ 令 y=1 可得 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$，∴$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AC_1}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AC_1}\rangle|=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

∴直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

20. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比 q＞1，且 $a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2 是 a_3，a_5 的等差中项. 数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$的前 n 项和为 $2n^2+n$.

(Ⅰ)求 q 的值；

(Ⅱ)求数列$\{b_n\}$的通项公式.

解析：(Ⅰ)运用等比数列的通项公式和等差数列中项性质，解方程可得公比 q；
(Ⅱ)设 $c_n=(b_{n+1}-bn)a_n=(b_{n+1}-b_n)2^{n-1}$，运用数列的递推式可得 $c_n=4n-1$，再由数列的恒等式求得 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})$，运用错位相减法，可得所求数列的通项公式.
答案：(Ⅰ)等比数列$\{a_n\}$的公比 $q>1$，且 $a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2 是 a_3，a_5 的等差中项，

可得 $2a_4+4=a_3+a_5=28-a_4$，解得 $a_4=8$，由 $\frac{8}{q}+8+8q=28$，可得 $q=2$($\frac{1}{2}$ 舍去)，则 q 的值为 2；

(Ⅱ)设 $c_n=(b_n+1-b_n)a_n=(b_{n+1}-b_n)2^{n-1}$，可得 $n=1$ 时，$c_1=2+1=3$，
$n\geqslant 2$ 时，可得 $c_n=2n^2+n-2(n-1)^2-(n-1)=4n-1$，

上式对 $n=1$ 也成立，则 $(b_{n+1}-b_n)a_n=4n-1$，即有 $b_{n+1}-b_n=(4n-1)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

可得 $b_n=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=1+3\cdot(\frac{1}{2})^0+7\cdot(\frac{1}{2})^1+\cdots+(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}$，

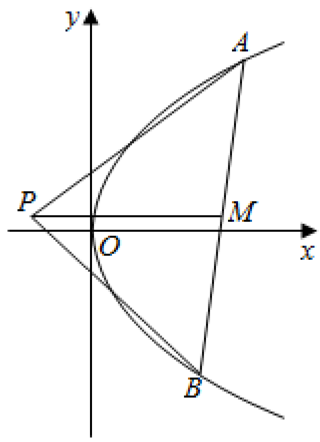
$\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}+3\cdot(\frac{1}{2})+7\cdot(\frac{1}{2})^2+\cdots+(4n-5)\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

相减可得 $\frac{1}{2}b_n=\frac{7}{2}+4\left[\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]-(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$=\frac{7}{2}+4\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-2}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

化简可得 $b_n=15-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

21. 如图，已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点，抛物线 C：$y^2=4x$ 上存在不同的两点 A，B 满足 PA，PB 的中点均在 C 上.



(Ⅰ)设 AB 中点为 M，证明：PM 垂直于 y 轴；

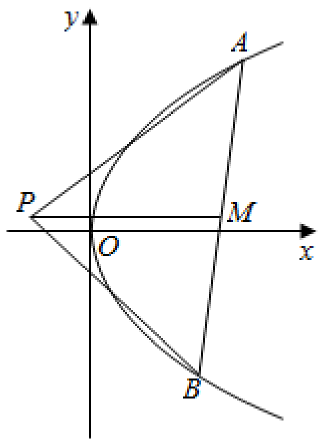
(Ⅱ)若 P 是半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$上的动点，求△PAB 面积的取值范围.

解析：(Ⅰ)设 P(m，n)，A($\frac{y_1^2}{4}$，y_1)，B($\frac{y_2^2}{4}$，y_2)，运用中点坐标公式可得 M 的坐标，再由中点坐标公式和点在抛物线上，代入化简整理可得 y_1，y_2为关于 y 的方程 $y^2-2ny+8m-n^2=0$ 的两根，由韦达定理即可得到结论；

(Ⅱ)由题意可得 $m^2+\frac{n^2}{4}=1$，$-1\leq m<0$，$-2<n<2$，可得△PAB 面积为 $S=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1-y_2|$，再由配方和换元法，可得面积 S 关于新元的三次函数，运用单调性可得所求范围.

答案：(Ⅰ)可设 P(m，n)，A($\frac{y_1^2}{4}$，y_1)，B($\frac{y_2^2}{4}$，y_2)，

AB 中点为 M 的坐标为($\frac{y_1^2+y_2^2}{8},\frac{y_1+y_2}{2}$)，



抛物线 C：$y^2=4x$ 上存在不同的两点 A，B 满足 PA，PB 的中点均在 C 上，

可得 $\left(\frac{n+y_1}{2}\right)^2=4\cdot\frac{m+\frac{y_1^2}{4}}{2},\left(\frac{n+y_2}{2}\right)^2=4\cdot\frac{m+\frac{1}{4}y_2^2}{2}$，

化简可得 y_1，y_2为关于 y 的方程 $y^2-2ny+8m-n^2=0$ 的两根，

可得 $y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=8m-n^2$，可得 $n=\frac{y_1+y_2}{2}$，则 PM 垂直于 y 轴；

(Ⅱ)若 P 是半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$($x<0$)上的动点，

可得 $m^2+\frac{n^2}{4}=1$，$-1\leq m<0$，$-2<n<2$，

由(Ⅰ)可得 $y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=8m-n^2$，
由 PM 垂直于 y 轴，可得△PAB 面积为

$$S=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{8}-m\right)\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$$

$=\left[\frac{1}{16}\cdot\left(4n^2-16m+2n^2\right)-\frac{1}{2}m\right]\cdot\sqrt{4n^2-32m+4n^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(n^2-4m\right)\sqrt{n^2-4m}$，

可令 $t=\sqrt{n^2-4m}=\sqrt{4-4m^2-4m}=\sqrt{-4\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+5}$，

可得 m=$-\frac{1}{2}$ 时，t 取得最大值 $\sqrt{5}$；

m=-1 时，t 取得最小值 2，即 2≤t≤ $\sqrt{5}$，

则 $S=\frac{3\sqrt{2}}{4}t^3$ 在 2≤t≤ $\sqrt{5}$ 递增，可得 S∈[$6\sqrt{2},\frac{15}{4}\sqrt{10}$]，

△PAB 面积的取值范围为[$6\sqrt{2},\frac{15}{4}\sqrt{10}$].

22.已知函数 f(x)=$\sqrt{x}$ -lnx.

(Ⅰ)若 f(x)在 x=x_1，x_2(x_1≠x_2)处导数相等，证明：f(x_1)+f(x_2)＞8-8ln2;

(Ⅱ)若 a≤3-4ln2，证明：对于任意 k＞0，直线 y=kx+a 与曲线 y=f(x)有唯一公共点.

解析：(Ⅰ)推导出 x＞0，f′(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，由 f(x)在 x=$x_1$，$x_2$($x_1$≠$x_2$)处导数相等，得到 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$，由基本不等式得：$\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\ge 2\sqrt[4]{x_1x_2}$，从而 x_1x_2＞256，由题意得 f(x_1)+f(x_2)=$\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln\left(x_1x_2\right)$，设 g(x)=$\frac{1}{2}\sqrt{x}$ -lnx，则 g′(x)=$\frac{1}{4x}\left(\sqrt{x}-4\right)$，利用导数性质能证明 f($x_1$)+f($x_2$)＞8-8ln2.

(Ⅱ)令 m=$e^{-(|a|+k)}$，n=$\left(\frac{|a|+1}{k}\right)^2+1$，则 f(m)-km-a＞|a|+k-k-a≥0，推导出存在 x_0∈(m，n)，使 f(x_0)=kx_0+a，对于任意的 a∈R 及 k∈(0，+∞)，直线 y=kx+a 与曲线 y=f(x)有公共点，由 f(x)=kx+a，得 k=$\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，设 h(x)=$\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，则 h′(x)=$\frac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\frac{-g\left(x\right)-1+a}{x^2}$，利用导数性质能证明 a≤3-4ln2 时，对于任意 k＞0，直线 y=kx+a 与曲线 y=f(x)有唯一公共点.

答案：(Ⅰ)∵函数 f(x)=$\sqrt{x}$ -lnx，∴x＞0，f′(x)=$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，

∵f(x)在 $x=x_1$，$x_2(x_1\neq x_2)$处导数相等，∴$\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$，

∵$x_1\neq x_2$，∴$\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$，由基本不等式得：$\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 2\sqrt[4]{x_1x_2}$，

∵$x_1\neq x_2$，∴$x_1x_2>256$，

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln\left(x_1x_2\right)$，

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{4x}\left(\sqrt{x}-4\right)$，∴列表讨论：

x	(0，16)	16	(16，+∞)
g′(x)	-	0	+
g(x)	↓	2-4ln2	↑

∴g(x)在[256，+∞)上单调递增，∴$g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，∴$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$.

(Ⅱ)令 $m=e^{-(|a|+k)}$，$n=(\frac{|a|+1}{k})^2+1$，则 $f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geqslant 0$，

$f(n)-kn-a<n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{a}{n}-k\right)\leq n\left(\frac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$，

∴存在 $x_0\in(m，n)$，使 $f(x_0)=kx_0+a$，

∴对于任意的 $a\in R$ 及 $k\in(0，+\infty)$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有公共点，

由 $f(x)=kx+a$，得 $k=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，

设 $h(x)=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$，则 $h'(x)=\frac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\frac{-g\left(x\right)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$，由(1)知 $g(x)\geqslant g(16)$，

又 $a\leqslant 3-4\ln 2$，∴$-g(x)-1+a\leqslant -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leqslant 0$，

∴$h'(x)\leqslant 0$，即函数 h(x)在(0，+∞)上单调递减，

∴方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多有一个实根，

综上，$a\leqslant 3-4\ln 2$ 时，对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.