

2016 年山东省潍坊市中考真题数学

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分

1. 计算： $2^0 \cdot 2^{-3} = (\quad)$

A. $-\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. 0

D. 8

解析：直接利用负整数指数幂的性质结合零指数幂的性质分析得出答案.

$$2^0 \cdot 2^{-3} = 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

答案：B.

2. 下列科学计算器的按键中，其上面标注的符号是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()



解析：根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

A、是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项错误；

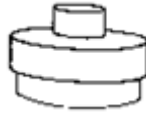
B、不是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

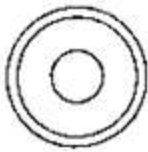
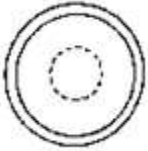
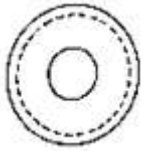
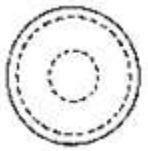
C、是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项错误；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项正确.

答案：D.

3. 如图，几何体是由底面圆心在同一条直线上的三个圆柱构成的，其俯视图是 ()



- A. 
- B. 
- C. 
- D. 

解析：根据俯视图的概念和看得到的边都应用实线表现在三视图中、看不到，又实际存在的，又没有被其他边挡住的边用虚线表现在三视图中解答即可。

图中几何体的俯视图是 C 选项中的图形。

答案：C.

4. 近日，记者从潍坊市统计局获悉，2016 年第一季度潍坊全市实现生产总值 1256.77 亿元，将 1256.77 亿用科学记数法可表示为(精确到百亿位) ()

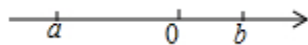
- A. 1.2×10^{11}
- B. 1.3×10^{11}
- C. 1.26×10^{11}
- D. 0.13×10^{12}

解析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

将 1256.77 亿用科学记数法可表示为 1.3×10^{11} .

答案：B.

5. 实数 a ， b 在数轴上对应点的位置如图所示，化简 $|a| + \sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是 ()



- A. $-2a+b$
- B. $2a-b$

C. -b

D. b

解析：如图所示： $a < 0$ ， $a - b < 0$ ，

$$\text{则 } |a| + \sqrt{(a-b)^2}$$

$$= -a - (a-b)$$

$$= -2a + b.$$

答案： A.

6. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2}x + \sin\alpha = 0$ 有两个相等的实数根，则锐角 α 等于()

A. 15°

B. 30°

C. 45°

D. 60°

解析： \because 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - \sqrt{2}x + \sin\alpha = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4\sin\alpha = 2 - 4\sin\alpha = 0,$$

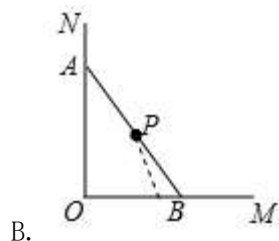
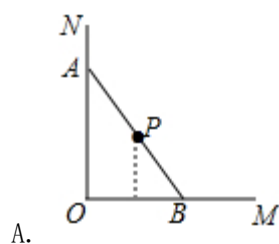
$$\text{解得： } \sin\alpha = \frac{1}{2},$$

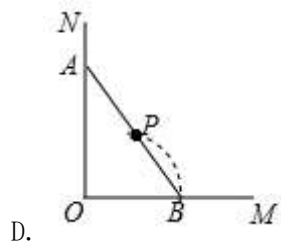
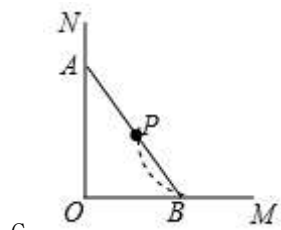
$\because \alpha$ 为锐角，

$\therefore \alpha = 30^\circ$.

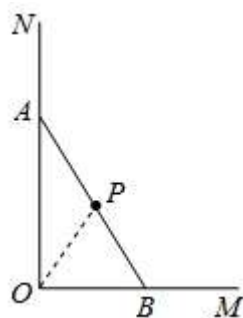
答案： B.

7. 木杆 AB 斜靠在墙壁上，当木杆的上端 A 沿墙壁 NO 竖直下滑时，木杆的底端 B 也随之沿着射线 OM 方向滑动. 下列图中用虚线画出木杆中点 P 随之下落的路线，其中正确的是()





解析：如图，



连接 OP ，由于 OP 是 $Rt\triangle AOB$ 斜边上的中线，

所以 $OP = \frac{1}{2} AB$ ，不管木杆如何滑动，它的长度不变，也就是 OP 是一个定值，点 P 就在以 O

为圆心的圆弧上，那么中点 P 下落的路线是一段弧线。

答案：D.

8. 将下列多项式因式分解，结果中不含有因式 $a+1$ 的是()

A. a^2-1

B. a^2+a

C. a^2+a-2

D. $(a+2)^2-2(a+2)+1$

解析：先把各个多项式分解因式，即可得出结果.

$$\because a^2-1=(a+1)(a-1),$$

$$a^2+a=a(a+1),$$

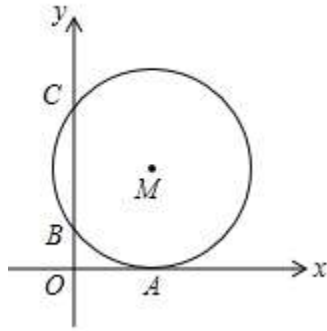
$$a^2+a-2=(a+2)(a-1),$$

$$(a+2)^2-2(a+2)+1=(a+2-1)^2=(a+1)^2.$$

\therefore 结果中不含有因式 $a+1$ 的是选项 C.

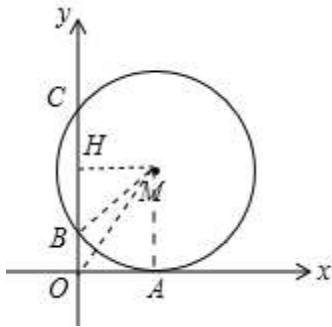
答案：C.

9. 如图，在平面直角坐标系中， $\odot M$ 与 x 轴相切于点 $A(8, 0)$ ，与 y 轴分别交于点 $B(0, 4)$ 和点 $C(0, 16)$ ，则圆心 M 到坐标原点 O 的距离是()



- A. 10
- B. $8\sqrt{2}$
- C. $4\sqrt{13}$
- D. $2\sqrt{41}$

解析：如图连接 BM、OM，AM，作 $MH \perp BC$ 于 H.



- $\because \odot M$ 与 x 轴相切于点 $A(8, 0)$,
- $\therefore AM \perp OA$, $OA=8$,
- $\therefore \angle OAM = \angle MH0 = \angle HOA = 90^\circ$,
- \therefore 四边形 OAMH 是矩形,
- $\therefore AM=OH$,
- $\because MH \perp BC$,
- $\therefore HC=HB=6$,
- $\therefore OH=AM=10$,

在 $RT\triangle AOM$ 中, $OM = \sqrt{AM^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}$.

答案：D.

10. 若关于 x 的方程 $\frac{x+m}{x-3} + \frac{3m}{3-x} = 3$ 的解为正数, 则 m 的取值范围是()

- A. $m < \frac{9}{2}$

B. $m < \frac{9}{2}$ 且 $m \neq \frac{3}{2}$

C. $m > -\frac{9}{4}$

D. $m > -\frac{9}{4}$ 且 $m \neq -\frac{3}{4}$

解析：去分母得： $x+m-3m=3x-9$ ，
整理得： $2x=-2m+9$ ，

解得： $x = \frac{-2m+9}{2}$ ，

∵ 关于 x 的方程 $\frac{x+m}{x-3} + \frac{3m}{3-x} = 3$ 的解为正数，

∴ $-2m+9 > 0$ ，

级的： $m < \frac{9}{2}$ ，

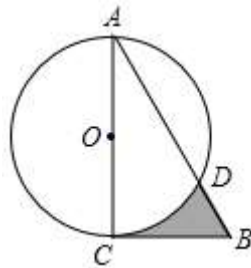
当 $x=3$ 时， $x = \frac{-2m+9}{2} = 3$ ，

解得： $m = \frac{3}{2}$ ，

故 m 的取值范围是： $m < \frac{9}{2}$ 且 $m \neq \frac{3}{2}$ 。

答案： B.

11. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ，以直角边 AC 为直径作 $\odot O$ 交 AB 于点 D ，则图中阴影部分的面积是（ ）



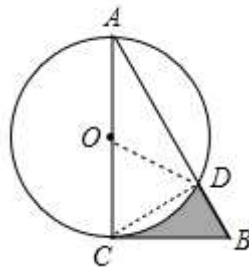
A. $\frac{15\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\pi$

B. $\frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\pi$

C. $\frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$

D. $\frac{7\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

解析：如图连接 OD、CD.



∵ AC 是直径，
 ∴ $\angle ADC = 90^\circ$ ，
 ∵ $\angle A = 30^\circ$ ，
 ∴ $\angle ACD = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$ ，
 ∵ $OC = OD$ ，
 ∴ $\triangle OCD$ 是等边三角形，
 ∵ BC 是切线。
 ∴ $\angle ACB = 90^\circ$ ， ∵ $BC = 2\sqrt{3}$ ，

∴ $AB = 4\sqrt{3}$ ， $AC = 6$ ，

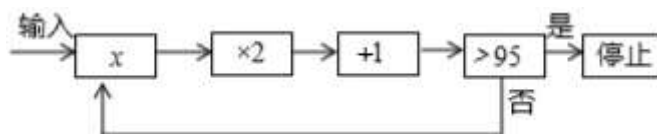
∴ $S_{\text{阴}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ACD} - (S_{\text{扇形} OCD} - S_{\triangle OCD})$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{3} - \left(\frac{60\pi \cdot 3^2}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 \right)$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\pi$$

答案：A.

12. 运行程序如图所示，规定：从“输入一个值 x”到“结果是否 > 95”为一次程序操作，如果程序操作进行了三次才停止，那么 x 的取值范围是 ()



A. $x \geq 11$

B. $11 \leq x < 23$

C. $11 < x \leq 23$

D. $x \leq 23$

解析：由题意得，
$$\begin{cases} 2x+1 \leq 95 \textcircled{1} \\ 2(2x+1) \leq 95 \textcircled{2} \\ 2[2(2x+1)+1]+1 > 95 \textcircled{3} \end{cases},$$

解不等式①得， $x \leq 47$ ，

解不等式②得， $x \leq 23$ ，

解不等式③得， $x > 11$ ，

所以， x 的取值范围是 $11 < x \leq 23$ 。

答案：C.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分

13. 计算： $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{27}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：先把 $\sqrt{27}$ 化简，再本括号内合并，然后进行二次根式的乘法运算.

$$\text{原式} = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = \sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 12.$$

答案：12.

14. 若 $3x^{2n}y^m$ 与 $x^{4-n}y^{n-1}$ 是同类项，则 $m+n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析： $\because 3x^{2n}y^m$ 与 $x^{4-n}y^{n-1}$ 是同类项，

$$\therefore \begin{cases} 2n=4-n \\ m=n-1 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} n=\frac{4}{3} \\ m=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{则 } m+n = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}.$$

答案： $\frac{5}{3}$.

15. 超市决定招聘广告策划人员一名，某应聘者三项素质测试的成绩如表：

测试项目	创新能力	综合知识	语言表达
测试成绩(分数)	70	80	92

将创新能力、综合知识和语言表达三项测试成绩按 5: 3: 2 的比例计入总成绩, 则该应聘者的总成绩是_____分.

解析: 根据该应聘者的总成绩=创新能力×所占的比值+综合知识×所占的比值+语言表达×所占的比值即可求得.

$$\text{该应聘者的总成绩是: } 70 \times \frac{5}{10} + 80 \times \frac{3}{10} + 92 \times \frac{2}{10} = 77.4 \text{ (分)}.$$

答案: 77.4.

16. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过 (3, -1), 则当 $1 < y < 3$ 时, 自变量 x 的取值范围是_____.

解析: \because 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过 (3, -1),

$$\therefore k = 3 \times (-1) = -3,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{-3}{x}.$$

\because 反比例函数 $y = \frac{-3}{x}$ 中 $k = -3$,

\therefore 该反比例函数的图象经过第二、四象限, 且在每个象限内均单增.

$$\text{当 } y=1 \text{ 时, } x = \frac{-3}{1} = -3;$$

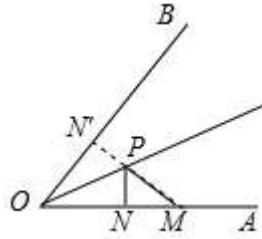
$$\text{当 } y=3 \text{ 时, } x = \frac{-3}{3} = -1.$$

$\therefore 1 < y < 3$ 时, 自变量 x 的取值范围是 $-3 < x < -1$.

答案: $-3 < x < -1$.

17. 已知 $\angle AOB = 60^\circ$, 点 P 是 $\angle AOB$ 的平分线 OC 上的动点, 点 M 在边 OA 上, 且 $OM = 4$, 则点 P 到点 M 与到边 OA 的距离之和的最小值是_____.

解析: 过 M 作 $MN' \perp OB$ 于 N' , 交 OC 于 P,



则 MN' 的长度等于 $PM+PN$ 的最小值，
即 MN' 的长度等于点 P 到点 M 与到边 OA 的距离之和的最小值，

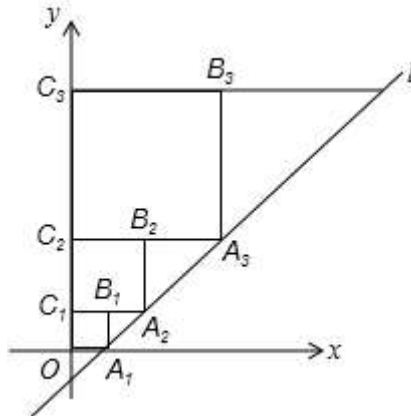
$\because \angle ON'M=90^\circ$ ， $OM=4$ ，

$$\therefore MN' = OM \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

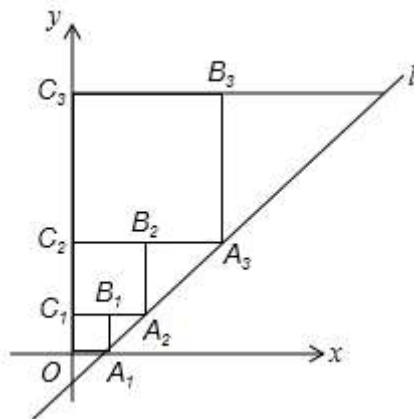
\therefore 点 P 到点 M 与到边 OA 的距离之和的最小值为 $2\sqrt{3}$ 。

答案： $2\sqrt{3}$ 。

18. 在平面直角坐标系中，直线 $l: y=x-1$ 与 x 轴交于点 A_1 ，如图所示依次作正方形 $A_1B_1C_1O$ 、正方形 $A_2B_2C_2C_1$ 、 \dots 、正方形 $A_nB_nC_nC_{n-1}$ ，使得点 A_1, A_2, A_3, \dots 在直线 l 上，点 C_1, C_2, C_3, \dots 在 y 轴正半轴上，则点 B_n 的坐标是_____。



解析：如图，



$\because y=x-1$ 与 x 轴交于点 A_1 ，

$\therefore A_1$ 点坐标(1, 0),
 \because 四边形 $A_1B_1C_1O$ 是正方形,
 $\therefore B_1$ 坐标(1, 1),
 $\because C_1A_2 \parallel x$ 轴,
 $\therefore A_2$ 坐标(2, 1),
 \because 四边形 $A_2B_2C_2C_1$ 是正方形,
 $\therefore B_2$ 坐标(2, 3),
 $\because C_2A_3 \parallel x$ 轴,
 $\therefore A_3$ 坐标(4, 3),
 \because 四边形 $A_3B_3C_3C_2$ 是正方形,
 $\therefore B_3$ 坐标(4, 7),
 $\therefore B_1(2^0, 2^{1-1}), B_2(2^1, 2^{2-1}), B_3(2^2, 2^{3-1}), \dots,$
 $\therefore B_n$ 坐标($2^{n-1}, 2^{n-1}$).
 答案: ($2^{n-1}, 2^{n-1}$).

三、解答题：本大题共 7 小题，共 66 分

19. 关于 x 的方程 $3x^2+mx-8=0$ 有一个根是 $\frac{2}{3}$ ，求另一个根及 m 的值.

解析：由于 $x=\frac{2}{3}$ 是方程的一个根，直接把它代入方程即可求出 m 的值，然后由根与系数的关系来求方程的另一根.

答案：设方程的另一根为 t .

$$\text{依题意得：} 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}m - 8 = 0,$$

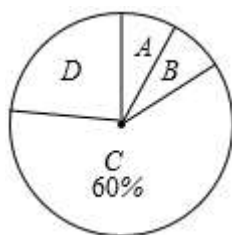
解得 $m=10$.

$$\text{又 } \frac{2}{3}t = -\frac{8}{3},$$

所以 $t=-4$.

综上所述，另一个根是 -4 ， m 的值为 10 .

20. 今年 5 月，某大型商业集团随机抽取所属的 m 家商业连锁店进行评估，将各连锁店按照评估成绩分成了 A、B、C、D 四个等级，绘制了如图尚不完整的统计图表.



评估成绩 n (分)	评定等级	频数
$90 \leq n \leq 100$	A	2
$80 \leq n < 90$	B	
$70 \leq n < 80$	C	15
$n < 70$	D	6

根据以上信息解答下列问题:

(1) 求 m 的值.

解析: (1) 由 C 等级频数为 15, 占 60%, 即可求得 m 的值.

答案: (1) \because C 等级频数为 15, 占 60%,

$\therefore m = 15 \div 60\% = 25$.

(2) 在扇形统计图中, 求 B 等级所在扇形的圆心角的大小; (结果用度、分、秒表示).

解析: (2) 首先求得 B 等级的频数, 继而求得 B 等级所在扇形的圆心角的大小.

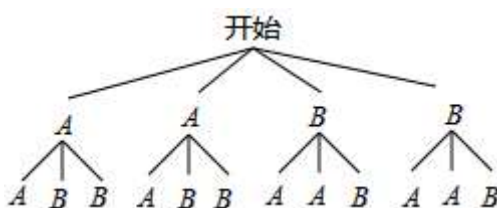
答案: (2) \because B 等级频数为: $25 - 2 - 15 - 6 = 2$,

\therefore B 等级所在扇形的圆心角的大小为: $\frac{2}{25} \times 360^\circ = 28.8^\circ = 28^\circ 48'$.

(3) 从评估成绩不少于 80 分的连锁店中任选 2 家介绍营销经验, 求其中至少有一家 A 等级的概率.

解析: (3) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与其中至少有一家 A 等级的情况, 再利用概率公式求解即可求得答案.

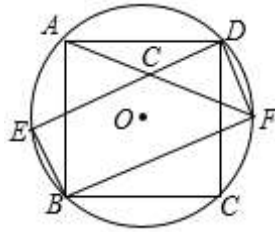
答案: (3) 评估成绩不少于 80 分的连锁店中, 有两家等级为 A, 有两家等级为 B, 画树状图得:



\therefore 共有 12 种等可能的结果, 其中至少有一家 A 等级的有 10 种情况,

\therefore 其中至少有一家 A 等级的概率为: $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

21. 正方形 ABCD 内接于 $\odot O$, 如图所示, 在劣弧 AB 上取一点 E, 连接 DE、BE, 过点 D 作 $DF \parallel BE$ 交 $\odot O$ 于点 F, 连接 BF、AF, 且 AF 与 DE 相交于点 G, 求证:



(1) 四边形 EBF D 是矩形.

解析: (1) 直接利用正方形的性质、圆周角定理结合平行线的性质得出 $\angle BED = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle BFD = \angle BCD = 90^\circ$, $\angle EDF = 90^\circ$, 进而得出答案.

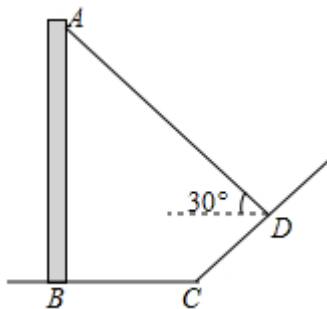
答案: (1) \because 正方形 ABCD 内接于 $\odot O$,
 $\therefore \angle BED = \angle BAD = 90^\circ$, $\angle BFD = \angle BCD = 90^\circ$,
 又 $\because DF \parallel BE$,
 $\therefore \angle EDF + \angle BED = 180^\circ$,
 $\therefore \angle EDF = 90^\circ$,
 \therefore 四边形 EBF D 是矩形.

(2) $DG = BE$.

解析: (2) 直接利用正方形的性质 AD 的度数是 90° , 进而得出 $BE = DF$, 则 $BE = DG$.

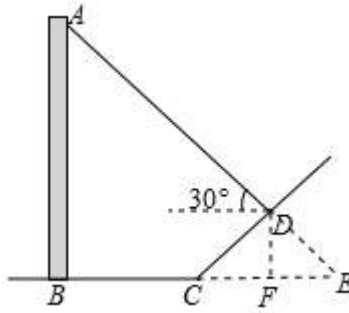
答案: (2) \because 正方形 ABCD 内接于 $\odot O$,
 $\therefore AD$ 的度数是 90° ,
 $\therefore \angle AFD = 45^\circ$,
 又 $\because \angle GDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DGF = \angle DFC = 45^\circ$,
 $\therefore DG = DF$,
 又 \because 在矩形 EBF D 中, $BE = DF$,
 $\therefore BE = DG$.

22. 如图, 直立于地面上的电线杆 AB, 在阳光落在水平地面和坡面上的影子分别是 BC、CD, 测得 BC=6 米, CD=4 米, $\angle BCD = 150^\circ$, 在 D 处测得电线杆顶端 A 的仰角为 30° , 试求电线杆的高度 (结果保留根号)



解析: 延长 AD 交 BC 的延长线于 E, 作 $DF \perp BE$ 于 F, 根据直角三角形的性质和勾股定理求出 DF、CF 的长, 根据正切的定义求出 EF, 得到 BE 的长, 根据正切的定义解答即可.

答案: 延长 AD 交 BC 的延长线于 E, 作 $DF \perp BE$ 于 F,



$$\because \angle BCD = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = 30^\circ, \text{ 又 } CD = 4,$$

$$\therefore DF = 2, \quad CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = 2\sqrt{3},$$

由题意得 $\angle E = 30^\circ$,

$$\therefore EF = \frac{DF}{\tan E} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BE = BC + CF + EF = 6 + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = BE \times \tan E = (6 + 4\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = (2\sqrt{3} + 4) \text{ 米},$$

答：电线杆的高度为 $(2\sqrt{3} + 4)$ 米.

23. 旅游公司在景区内配置了 50 辆观光车共游客租赁使用, 假定每辆观光车一天内最多只能出租一次, 且每辆车的日租金 x (元) 是 5 的倍数. 发现每天的营运规律如下: 当 x 不超过 100 元时, 观光车能全部租出; 当 x 超过 100 元时, 每辆车的日租金每增加 5 元, 租出去的观光车就会减少 1 辆. 已知所有观光车每天的管理费是 1100 元.

(1) 优惠活动期间, 为使观光车全部租出且每天的净收入为正, 则每辆车的日租金至少应为多少元? (注: 净收入 = 租车收入 - 管理费)

解析: (1) 观光车全部租出每天的净收入 = 出租自行车的总收入 - 管理费, 根据不等关系: 净收入为正, 列出不等式求解即可.

答案: (1) 由题意知, 若观光车能全部租出, 则 $0 < x \leq 100$,

$$\text{由 } 50x - 1100 > 0,$$

$$\text{解得 } x > 22,$$

又 $\because x$ 是 5 的倍数,

\therefore 每辆车的日租金至少应为 25 元.

(2) 当每辆车的日租金为多少元时, 每天的净收入最多?

解析: (2) 由函数解析式是分段函数, 在每一段内求出函数最大值, 比较得出函数的最大值.

答案: (2) 设每辆车的净收入为 y 元,

$$\text{当 } 0 < x \leq 100 \text{ 时, } y_1 = 50x - 1100,$$

$\because y_1$ 随 x 的增大而增大,

∴当 $x=100$ 时, y_1 的最大值为 $50 \times 100 - 1100 = 3900$;

当 $x > 100$ 时,

$$y_2 = \left(50 - \frac{x-100}{5} \right) x - 1100 = -\frac{1}{5}x^2 + 70x - 1100 = -\frac{1}{5}(x-175)^2 + 5025,$$

当 $x=175$ 时, y_2 的最大值为 5025,

$5025 > 3900$,

故当每辆车的日租金为 175 元时, 每天的净收入最多是 5025 元.

24. 如图, 在菱形 ABCD 中, $AB=2$, $\angle BAD=60^\circ$, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E, $DF \perp BC$ 于点 F.

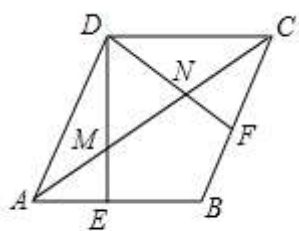


图1

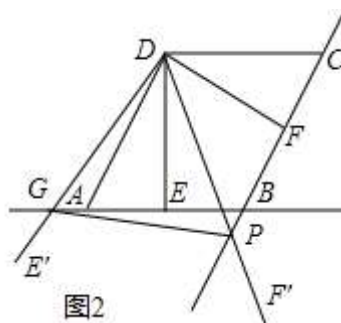


图2

(1) 如图 1, 连接 AC 分别交 DE、DF 于点 M、N, 求证: $MN = \frac{1}{3} AC$.

解析: (1) 连接 BD, 证明 $\triangle ABD$ 为等边三角形, 根据等腰三角形的三线合一得到 $AE=EB$, 根据相似三角形的性质解答即可.

答案: (1) 如图 1, 连接 BD, 交 AC 于 O,

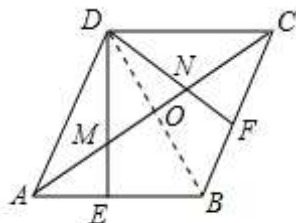


图1

在菱形 ABCD 中, $\angle BAD=60^\circ$, $AD=AB$,

∴ $\triangle ABD$ 为等边三角形,

∴ $DE \perp AB$,

∴ $AE=EB$,

∴ $AB \parallel DC$,

$$\therefore \frac{AM}{MC} = \frac{AE}{DC} = \frac{1}{2},$$

同理, $\frac{CN}{AN} = \frac{1}{2},$

$$\therefore MN = \frac{1}{3} AC.$$

(2) 如图 2, 将 $\triangle EDF$ 以点 D 为旋转中心旋转, 其两边 DE' 、 DF' 分别与直线 AB、BC 相交于点 G、P, 连接 GP, 当 $\triangle DGP$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$ 时, 求旋转角的大小并指明旋转方向.

解析: (2) 分 $\angle EDF$ 顺时针旋转和逆时针旋转两种情况, 根据旋转变换的性质解答即可.

答案: (2) $\because AB \parallel DC$, $\angle BAD = 60^\circ$,

$\therefore \angle ADC = 120^\circ$, 又 $\angle ADE = \angle CDF = 30^\circ$,

$\therefore \angle EDF = 60^\circ$,

当 $\angle EDF$ 顺时针旋转时,

由旋转的性质可知, $\angle EDG = \angle FDP$, $\angle GDP = \angle EDF = 60^\circ$,

$DE = DF = \sqrt{3}$, $\angle DEG = \angle DFP = 90^\circ$,

在 $\triangle DEG$ 和 $\triangle DFP$ 中,

$$\begin{cases} \angle GDE = \angle PDF \\ \angle DEG = \angle DFP, \\ DE = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DEG \cong \triangle DFP$,

$\therefore DG = DP$,

$\therefore \triangle DGP$ 为等边三角形,

$$\therefore \triangle DGP \text{ 的面积} = \frac{\sqrt{3}}{4} DG^2 = 3\sqrt{3},$$

解得, $DG = 2\sqrt{3}$,

$$\text{则 } \cos \angle EDG = \frac{DE}{DG} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \angle EDG = 60^\circ$,

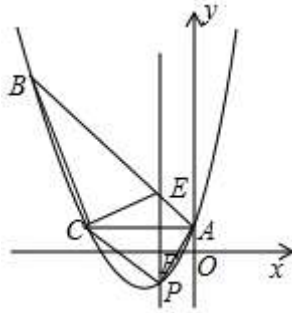
\therefore 当顺时针旋转 60° 时, $\triangle DGP$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$,

同理可得, 当逆时针旋转 60° 时, $\triangle DGP$ 的面积也等于 $3\sqrt{3}$,

综上所述, 将 $\triangle EDF$ 以点 D 为旋转中心, 顺时针或逆时针旋转 60° 时, $\triangle DGP$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$.

25. 如图, 已知抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ 经过 $\triangle ABC$ 的三个顶点, 其中点 A(0, 1), 点 B(-9,

10), $AC \parallel x$ 轴, 点 P 是直线 AC 下方抛物线上的动点.



(1) 求抛物线的解析式.

解析: (1) 用待定系数法求出抛物线解析式即可.

答案: (1) \because 点 $A(0, 1)$. $B(-9, 10)$ 在抛物线上,

$$\therefore \begin{cases} c=1 \\ \frac{1}{3} \times 81 - 9b + c = 10 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b=2 \\ c=1 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的解析式为 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$.

(2) 过点 P 且与 y 轴平行的直线 l 与直线 AB 、 AC 分别交于点 E 、 F , 当四边形 $AECF$ 的面积最大时, 求点 P 的坐标.

解析: (2) 设点 $P(m, \frac{1}{3}m^2 + 2m + 1)$, 表示出 $PE = -\frac{1}{3}m^2 - 3m$, 再用 $S_{\text{四边形}AECF} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AFC} =$

$\frac{1}{2}AC \times PE$, 建立函数关系式, 求出极值即可.

答案: (2) $\because AC \parallel x$ 轴, $A(0, 1)$

$$\therefore \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1 = 1,$$

$$\therefore x_1 = 6, x_2 = 0,$$

\therefore 点 C 的坐标 $(-6, 1)$,

\because 点 $A(0, 1)$. $B(-9, 10)$,

\therefore 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 1$,

设点 $P(m, \frac{1}{3}m^2 + 2m + 1)$

$\therefore E(m, -m + 1)$

$$\therefore PE = -m + 1 - \left(\frac{1}{3}m^2 + 2m + 1 \right) = -\frac{1}{3}m^2 - 3m,$$

$\because AC \perp EP, AC=6,$

$\therefore S_{\text{四边形} AECP}$

$$= S_{\triangle AEC} + S_{\triangle APC}$$

$$= \frac{1}{2}AC \times EF + \frac{1}{2}AC \times PF$$

$$= \frac{1}{2}AC \times (EF + PF)$$

$$= \frac{1}{2}AC \times PE$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}m^2 - 3m \right)$$

$$= -m^2 - 9m$$

$$= -\left(m + \frac{9}{2} \right)^2 + \frac{81}{4}$$

$\because -6 < m < 0$

\therefore 当 $m = -\frac{9}{2}$ 时, 四边形 AECP 的面积的最大值是 $\frac{81}{4}$,

此时点 $P\left(-\frac{9}{2}, -\frac{5}{4}\right)$.

(3) 当点 P 为抛物线的顶点时, 在直线 AC 上是否存在点 Q, 使得以 C、P、Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 若存在, 求出点 Q 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

解析: (3) 先判断出 $PF=CF$, 再得到 $\angle PCF = \angle EAF$, 以 C、P、Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 分两种情况计算即可.

$$\text{答案: (3)} \because y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{3}(x+3)^2 - 2,$$

$$\therefore P(-3, -2),$$

$$\therefore PF = y_F - y_P = 3, CF = x_F - x_C = 3,$$

$$\therefore PF = CF,$$

$$\therefore \angle PCF = 45^\circ$$

同理可得: $\angle EAF = 45^\circ$,

$$\therefore \angle PCF = \angle EAF,$$

\therefore 在直线 AC 上存在满足条件的 Q,

设 $Q(t, 1)$ 且 $AB = 9\sqrt{2}$, $AC = 6$, $CP = 3\sqrt{2}$

\therefore 以 C、P、Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似,

① $\triangle CPQ \sim \triangle ABC$ 时,

$$\therefore \frac{CQ}{AC} = \frac{CP}{AB},$$

$$\therefore \frac{t+6}{6} = \frac{3\sqrt{2}}{9\sqrt{2}},$$

$$\therefore t = -4,$$

$$\therefore Q(-4, 1)$$

② 当 $\triangle CQP \sim \triangle ABC$ 时,

$$\therefore \frac{CQ}{AB} = \frac{CP}{AC},$$

$$\therefore \frac{t+6}{9\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{6},$$

$$\therefore t = 3,$$

$$\therefore Q(3, 1).$$