2005年全国高等学校招生统一考试数学（上海·理）试题

考生注意：

1．答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚．

2．本试卷共有22道试题，满分 150分．考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

一．填空题（本大题满分48分）本大题共有12题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．函数 $f(x)=\log_4(x+1)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$_____________________________．

2．方程 $4^x+2^x-2=0$ 的解是_____________．

3．直角坐标平面 xoy 中，若定点 A(1,2)与动点 P(x,y)满足 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=4$。则点 P 的轨迹方程是_____________________________．

4．在(x-a)的展开式中,x 的系数是15,则实数 a=_________．

5．若双曲线的渐近线方程为 $y=\pm 3x$，它的一个焦点是（$\sqrt{10}$，0)，则双曲线的方程是_________________________．

6．将参数方程 $\begin{cases} x=1+2\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases}$（θ 为参数)化为普通方程,所得方程是________________．

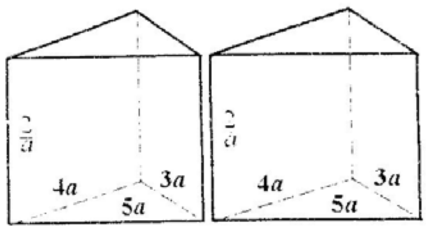
7．计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^{n+1}}=$_________．

8．某班有50名学生，其中 15人选修A课程，另外35人选修B课程．从班级中任选两名学生,他们是选修不同课程的学生的概率是_______．(结果用分数表示)

9．在△ABC中，若∠A＝120°，AB=5，BC＝7，则△ABC的面积S＝____________．

10．函数 $f(x)=\sin x+2\left|\sin x\right|$，$x\in[0,2\pi]$的图象与直线 y=k 有且仅有两个不同的交点,则 k 的取值范围是_____________．

11．有两个相同的直三棱柱,高为 $\dfrac{2}{a}$,底面三角形的三边长分别为 3a、4a、5a(a>0).用它们拼成一个三棱柱或四棱柱,在所有可能的情况中,全面积最小的是一个四棱柱,则 a 的取值范围是_____________．



12．用 n 个不同的实数 $a_1,a_2,\cdots a_n$ 可得 n!个不同的排列,每个排列为一行写成一个 n!行的数阵.对第 i 行 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$,记 $b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1,2,3,\cdots,n!$.用1,2,3可你数阵如右,由于此数阵中每一列各数之和都是12,所以,$b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times12-3\times12=-24$.那么,在用1,2,3,4,5形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$___________．

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$

二．选择题(本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中有且只有一个结论是正确的,必须把正确结论的代号写在题后的圆括内,选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个(不论是否都写在圆括内),一律得零分.

13．若函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^{x}+1}$，则该函数在(-∞,+∞)上是　　　　　　　　　　[答](　　　)

(A)单调递减无最小值　　　　　　　　　(B) 单调递减有最小值

(C)单调递增无最大值　　　　　　　　　(D) 单调递增有最大值

14．已知集合 M={x丨$|x-1|$≤, x∈R},P={x丨$\dfrac{5}{x+1}$≥1, x∈Z},则 M∩P 等于　　　　[答](　　　)

(A){x丨0<x≤3, x∈Z}　　　　　　　　(B) {x丨0≤x≤3, x∈Z}

(C) {x丨-1≤x≤0, x∈Z}　　　　　　　　(D) {x丨-1≤x<0, x∈Z}

15．过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作一条直线与抛物线相交于 A、B 两点,它们的横坐标之和等于 5,则这样的直线　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[答](　　　)

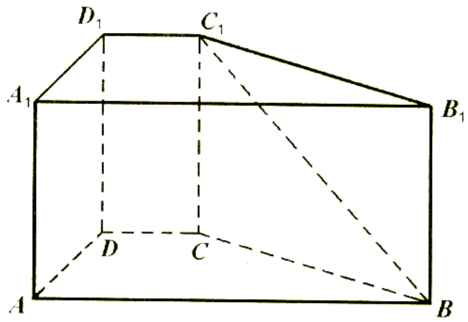
(A)有且仅有一条　　(B) 有且仅有两条　　(C) 有无穷多条　　(D)不存在

16．设定义域为 R 的函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg|x-1||, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$，则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[答](　　　)

(A)b<0 且 c>0　　(B) b>0 且 c<0　　(C)b<0 且 c=0　　　(D)b≥0 且 c=0

三．解答题（本大题满分 86 分）本大题共有 6 题，解答下列各题必须写出必要步骤.

17.（本题满分 12 分）已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2$ 底面 ABCD 是直角梯形,∠A 为直角,AB∥CD,AB=4,AD=2,DC=1,. 求异面直线 BC_1 与 DC 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)



[解]

18.（本题满分 12 分）在复数范围内解方程 $|z|^2+(z+\bar{z})i=\dfrac{3-i}{2+i}$ (i 为虚数单位)

[解]

19.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

如图,点 A、B 分别是椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$长轴的左、右端点,点 F 是椭圆的右焦点.点 P 在椭圆上,且位于 x 轴的上方,PA⊥PF.

(1)求点 P 的坐标;

(2)设 M 椭圆长轴 AB 上的一点,M 到直线 AP 的距离等于$|MB|$,求椭圆上的点到点 M 的距离 d 的最小值.

[解

20.(本题满分 14 分)本题共有 2 个小题,第 1 小题满分 6 分, 第 2 小题满分 8 分.

假设某市 2004 年新建住房 400 万平方米,其中有 250 万平方米是中低价房.预计在今后的若干年内,该市每年新建住房面积平均比上一年增长 8%.另外,每年新建住房中,中低价房的面积均比上一年增加 50 万平方米.那么,到哪一年底,

(1)该市历年所建中低价房的累计面积(以 2004 年为累计的第一年)将首次不少于 4750 万平方米?

(2)当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%?

[解]

21．(本题满分 16 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 6 分．

对定义域分别是 D_f、D_g 的函数 y=f(x) 、y=g(x)，

规定：函数 $h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & 当\ x\in D_f 且\ x\in D_g \\ f(x) & 当\ x\in D_f 且\ x\notin D_g \\ g(x) & 当\ x\notin D_f 且\ x\in D_g \end{cases}$

(1) 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$，$g(x)=x^2$，x∈R，写出函数 h(x)的解析式；

(2) 求问题(1)中函数 h(x)的值域；

(3)若 g(x)=f(x+α)，其中 α 是常数，且 α∈[0, π]，请设计一个定义域为 R 的函数 y=f(x)，及一个 α 的值，使得 h(x)=cos4x，并予以证明．

[解]

22．(本题满分 18 分)本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 8 分，第 3 小题满分 6 分．

在直角坐标平面中，已知点 $P_1(1,2)$，$P_2(2,2^2)$，---，$P_n(n,2^n)$，其中 n 是正整数．对平面上任一点 A_0，记 A_1 为 A_0 关于点 P_1 的对称点，A_2 为 A_1 关于点 P_2 的对称点，---，A_N 为 A_{N-1} 关于点 P_N 的对称点．

(1)求向量 $\overrightarrow{A_0A_2}$ 的坐标；

(2)当点 A_0 在曲线 C 上移动时，点 A_2 的轨迹是函数 y=f(x)的图象，其中 f(x)是以 3 为周期的周期函数，且当 x∈(0,3]时，f(x)=lgx．求以曲线 C 为图象的函数在(1,4]上的解析式；

(3)对任意偶数 n，用 n 表示向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 的坐标．

[解]

上海数学(理工农医类)参考答案

一.

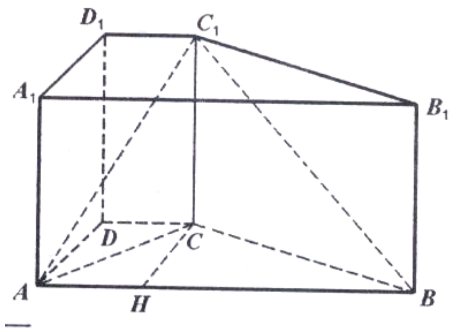
1. 1. $4^{x}-1$ 2. x=0 3. x+2y-4=0 4. $-\dfrac{1}{2}$ 5. $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 6. $(x-1)^2+y^2=4$

7. 3 8. $\dfrac{3}{7}$ 9. $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ 10. 1<k<3 11. $0<a<\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ 12. -1080

二.

13. A 14. B 15. B 16. C

三.



17. [解]由题意AB∥CD，∴$\angle C_1BA$是异面直线BC_1与DC 所成的角.

连结AC_1与AC，在Rt△ADC中，可得AC=$\sqrt{5}$.

又在Rt△ACC_1中，可得$AC_1=3$.

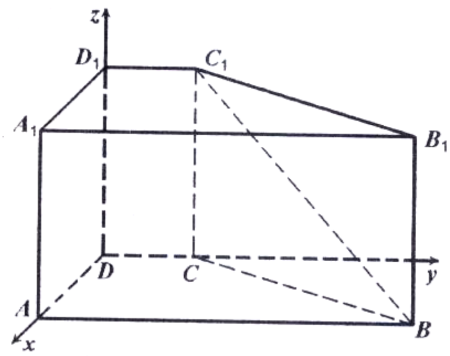
在梯形ABCD中，过C作CH∥AD交AB于H，

得∠CHB=90°，CH=2，HB=3，∴CB=$\sqrt{13}$.

又在Rt△CBC_1中，可得$BC_1=\sqrt{17}$，

在△ABC_1中，$\cos\angle C_1BA=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$，∴$\angle C_1BA=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$

异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$



另解：如图，以D为坐标原点，分别以DA、DC、DD_1所在直线为x、y、z轴建立直角坐标系.

则$C_1(0,1,2)$，B(2,4,0)，∴$\overrightarrow{BC_1}=(-2,-3,2)$，

$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$，设$\overrightarrow{BC_1}$与$\overrightarrow{CD}$所成的角为θ，

则$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$，$\theta=\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$.

异面直线BC_1与DC所成角的大小为$\arccos\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$

18. [解] 原方程化简为$|z|^2+(z+\bar{z})i=1-i$，

设z=x+yi(x、y∈R)，代入上述方程得 $x^2+y^2+2xi=1-i$，

∴$x^2+y^2=1$且2x=-1，解得$x=-\dfrac{1}{2}$且$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴原方程的解是 $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

19. ［解］（1）由已知可得点 A(－6,0),F(0,4)

设点 P(x,y),则 $\overrightarrow{AP}$={x+6,y}, $\overrightarrow{FP}$={x－4,y},由已知可得

$$\begin{cases}\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1\\ (x+6)(x-4)+y^2=0\end{cases}$$

则 $2x^2+9x-18=0$, $x=\frac{3}{2}$ 或 $x=-6$.

由于 y>0,只能 $x=\frac{3}{2}$,于是 $y=\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

∴点 P 的坐标是($\frac{3}{2}$, $\frac{5\sqrt{3}}{2}$)

(2) 直线 AP 的方程是 $x-\sqrt{3}y+6=0$.

设点 M(m,0),则 M 到直线 AP 的距离是 $\frac{|m+6|}{2}$.

于是 $\frac{|m+6|}{2}=|m+6|$,又－6≤m≤6,解得 m=2.

椭圆上的点(x,y)到点 M 的距离 d 有

$d^2=(x-2)^2+y^2=x-4x^2+4+20-\frac{5}{9}x^2=\frac{4}{9}(x-\frac{9}{2})^2+15$,

由于－6≤m≤6, ∴当 $x=\frac{9}{2}$ 时,d 取得最小值 $\sqrt{15}$

20. ［解］(1)设中低价房面积形成数列$\{a_n\}$,由题意可知$\{a_n\}$是等差数列,

其中 $a_1=250$, $d=50$,则 $S_n=250n+\frac{n(n-1)}{2}\times 50=25n^2+225n$,

令 $25n^2+225n\geqslant 4750$,即 $n^2+9n-190\geqslant 0$,而 n 是正整数, ∴$n\geqslant 10$.

到 2013 年底,该市历年所建中低价房的累计面积将首次不少于 4750 万平方米.

(2)设新建住房面积形成数列$\{b_n\}$,由题意可知$\{b_n\}$是等比数列,

其中 $b_1=400$, $q=1.08$,则 $b_n=400\cdot(1.08)^{n-1}\cdot 0.85$.

由题意可知 $a_n>0.85\,b_n$,有 $250+(n-1)\cdot 50>400\cdot(1.08)^{n-1}\cdot 0.85$.

由计算器解得满足上述不等式的最小正整数 n=6.

到 2009 年底,当年建造的中低价房的面积占该年建造住房面积的比例首次大于 85%.

21. ［解］(1)$h(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{x-1} & x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\\ \end{cases}$

1　　　　　　x=1

(2) 当 x≠1 时, $h(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$=x-1+$\dfrac{1}{x-1}$+2,

若 x>1 时, 则 h(x)≥4,其中等号当 x=2 时成立

若 x<1 时, 则 h(x)≤ 0,其中等号当 x=0 时成立

∴函数 h(x)的值域是(-∞,0]∪{1}∪[4,+∞)

(3)令 f(x)=sin2x+cos2x, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

则 $g(x)=f(x+\alpha)=\sin 2(x+\dfrac{\pi}{4})+\cos 2(x+\dfrac{\pi}{4})=\cos 2x-\sin 2x$,

于是 h(x)= f(x)·f(x+α)= (sin2x+co2sx)(cos2x-sin2x)=cos4x.

另解令 $f(x)=1+\sqrt{2}\sin 2x$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$,

$g(x)=f(x+\alpha)=1+\sqrt{2}\sin 2(x+\pi)=1-\sqrt{2}\sin 2x$,

于是 $h(x)=f(x)\cdot f(x+\alpha)=(1+\sqrt{2}\sin 2x)(1-\sqrt{2}\sin 2x)=\cos 4x$.

22.. [解](1)设点 $A_0(x,y)$, A_0为 P_1关于点的对称点 A_0的坐标为(2-x,4-y),

A_1为 P_2关于点的对称点 A_2的坐标为(2+x,4+y),

∴ $\overrightarrow{A_0A_2}$={2,4}.

(2) ∵ $\overrightarrow{A_0A_2}$={2,4},

∴f(x)的图象由曲线 C 向右平移 2 个单位,再向上平移 4 个单位得到.

因此, 曲线 C 是函数 y=g(x)的图象,其中 g(x)是以 3 为周期的周期函数,且当 x∈(-2,1]时,g(x)=lg(x+2)-4.于是,当 x∈(1,4]时,g(x)=lg(x-1)-4.

另解设点 $A_0(x,y)$, $A_2(x_2,y_2)$,于是 $x_2-x=2$, $y_2-y=4$,

若 3< x_2≤6,则 0< x_2-3≤3,于是 $f(x_2)=f(x_2-3)=\lg(x_2-3)$.

当 1< x≤4 时, 则 3< x_2≤6,y+4=lg(x-1).

∴当 x∈(1,4]时,g(x)=lg(x-1)-4.

(3) $\overrightarrow{A_0A_n}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-2}A_n}$,

由于 $\overrightarrow{A_{2k-2}A_{2k}}=2\overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}}$,得

$\overrightarrow{A_0A_n}=2(\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_3P_4}+\cdots+\overrightarrow{P_{n-1}P_n})$

$=2(\{1,2\}+\{1,2^3\}+\cdots+\{1,2^{n-1}\})$

$=2\{\dfrac{n}{2},\dfrac{2(2^n-1)}{3}\}=\{n,\dfrac{4(2^n-1)}{3}\}$