2018年吉林省吉林市高考三模数学文

一、选择题：本大题共12题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求.

1.设全集U=Z，A={-1，1，3，5，7，9}，B={-1，5，7}，则$A\cap(C_UB)$=(　)

A.{1，3，9}

B.{-1，5，7}

C.{-1，1，3，9}

D.{-1，1，3，5，9}

解析：进行交集、补集的运算即可.

C_UB ={x∈Z|x≠-1，且x≠5，且x≠7}，

∴$A\cap(C_UB)$={1，3，9}.

答案：A

2.已知复数$z=\frac{i}{1-i}$(i为虚数单位)，则z的虚部为(　)

A.$\frac{1}{2}$i

B.$-\frac{1}{2}$i

C.$\frac{1}{2}$

D.$-\frac{1}{2}$

解析：直接利用复数代数形式的乘除运算化简得答案.

$\because z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

∴z的虚部为$\frac{1}{2}$.

答案：C

3.已知命题p：$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2>3x_0$，则命题p的否定为(　)

A.¬p：$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2\leqslant 3x_0$

B.¬p：$\forall x\in R$，$x^2+2\leqslant 3x$

C.¬p：$\forall x\in R$，$x^2+2<3x$

D.¬p：$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2\geqslant 3x_0$

解析：运用特称命题的否定为全称命题，以及量词和不等号的变化，即可得到所求命题的否定.

由特称命题的否定为全称命题，可得$\exists x_0\in R$，$x_0^2+2>3x_0$，

则命题 p 的否定为：$\forall x\in R$，$x^2+2\leq 3x$.

答案：B

4.下列各组向量中，可以作为基底的是(　)

A. $\vec{e_1}=(0，0)$，$\vec{e_2}=(1，-2)$

B. $\vec{e_1}=(2，-3)$，$\vec{e_2}=(\frac{1}{2}，-\frac{3}{4})$

C. $\vec{e_1}=(3，5)$，$\vec{e_2}=(6，10)$

D. $\vec{e_1}=(-1，2)$，$\vec{e_2}=(5，7)$

解析：不共线的向量可作基底，由向量共线的条件逐个选项判断即可.

选项 A，可得 $0\times(-2)-0\times1=0$，故$\vec{e_1}\parallel\vec{e_2}$，不可作基底，故错误；

选项 B，可得 $2\times(-\frac{3}{4})-(-3)\times\frac{1}{2}=0$，故$\vec{e_1}\parallel\vec{e_2}$，不可作基底，故错误；

选项 C，可得 $3\times10-5\times6=0$，故$\vec{e_1}\parallel\vec{e_2}$，不可作基底，故错误；

选项 D，可得$-1\times7-2\times5\neq0$，故$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$不平行，故可作基底，故正确.

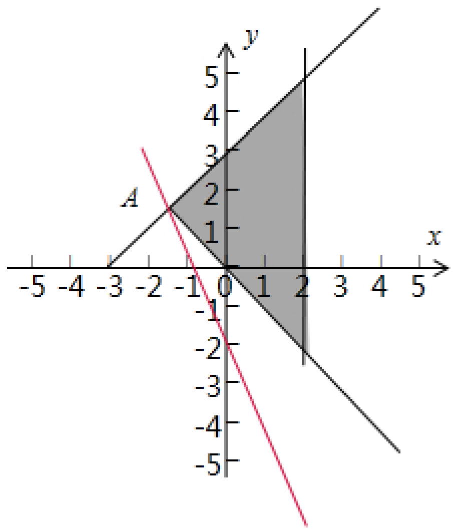
答案：D

5.设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y+3\geq 0\\ x+y\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}$，则 z=3x+y 的最小值是(　)

A.-5
B.4
C.-3
D.11

解析：作出约束条件对应的平面区域，利用线性规划的知识，通过平移即可求 z 的最小值.

作出约束条件$\begin{cases}x-y+3\geq 0\\ x+y\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}$对应的平面区域如图：



由 z=3x+y，得 y=-3x+z，

平移直线 y=-3x+z，由图象可知当直线 y=-3x+z，经过点 A 时，直线 y=-3x+z 的截距最小，此时 z 最小

由$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y=0 \end{cases}$，解得 A($-\frac{3}{2}$，$\frac{3}{2}$)，

此时 z 的最小值为$z=-3\times\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=-3$.

答案：C

6.已知等差数列{a_n}的公差不为 0，a_1=1，且 a_2，a_4，a_8成等比数列，设{a_n}的前 n 项和为 S_n，则 S_n=(　)

A. $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

B. $\frac{\left(n+1\right)^2}{2}$

C. $\frac{n^2+1}{2}$

D. $\frac{n\left(n+3\right)}{4}$

解析：利用等差数列的通项公式与求和公式以及等比数列的性质即可得出.

设等差数列{a_n}的公差 d≠0，∵a_1=1，且 a_2，a_4，a_8成等比数列，

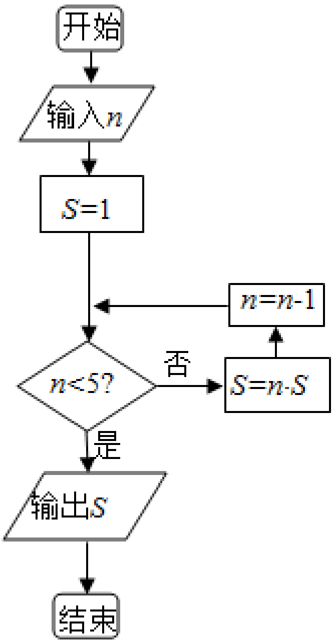
∴$a_4^2=a_2\cdot a_8$，即$(1+3d)^2=(1+d)(1+7d)$，解得 d=1，或 0(舍去).

则$S_n=n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)}{2}$.

答案：A

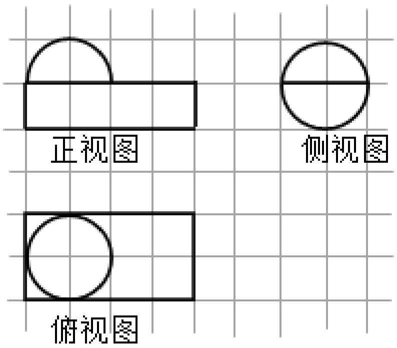
7.以抛物线 $y^2=8x$ 上的任意一点为圆心作圆与直线 x=-2 相切，这些圆必过一定点，则这一定点的坐标是( )
A.(0，2)
B.(2，0)
C.(4，0)
D.(0，4)
解析：先根据抛物线的标准方程表示出其准线方程，然后根据已知条件和抛物线的定义即可求解.
∵抛物线 $y^2=8x$ 的准线方程为 x=-2，
∴由题可知动圆的圆心在 $y^2=8x$ 上，且恒与抛物线的准线相切，
由定义可知，动圆恒过抛物线的焦点(2，0).
答案：B

8.执行如图所示的程序框图，当输出 S=210 时，则输入 n 的值为( )



A.6
B.7
C.8
D.9
解析：模拟程序的运行，可得程序框图的功能，结合已知进而计算得解 n 的值.
由题意，模拟执行程序，可得程序框图的功能是计算 S=n×(n-1)×…×5 的值，
由于 S=210=7×6×5，
可得：n=7，即输入 n 的值为 7.
答案：B

9.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为( )



A. $\dfrac{14\pi}{3}$

B. $\dfrac{10\pi}{3}$

C. $\dfrac{8\pi}{3}$

D. $\dfrac{5\pi}{3}$

解析：由题意，该几何体是由一个半圆柱与一个半球组成的组合体，其中半圆柱的底面半径为 1，高为 4，半球的半径为 1，即可求出几何体的体积.

由题意，该几何体是由一个半圆柱与一个半球组成的组合体，

其中半圆柱的底面半径为 1，高为 4，半球的半径为 1，

几何体的体积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi\times1^3+\dfrac{1}{2}\pi\times1^2\times4=\dfrac{8}{3}\pi$.

答案：C

10.已知锐角α 满足 cos(α $-\dfrac{\pi}{4}$)=cos2α ，则 sinα cosα 等于(　)

A. $\dfrac{1}{4}$

B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解析：由 cos(α $-\dfrac{\pi}{4}$)=cos2α ，得

$\cos\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ ，

$\therefore\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (sinα +cosα)=(sinα +cosα)(cosα -sinα)，

∵α $\in(0, \frac{\pi}{2})$，

∴sinα +cosα >0，

则 cosα -sinα $=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

两边平方得：1-2sinα cosα $=\frac{1}{2}$，

∴sinα cosα $=\frac{1}{4}$.

答案：A

11.朱世杰是历史上最伟大的数学家之一，他所著的《四元玉鉴》卷中“如像招数”五问有如下问题：“今有官司差夫一千八百六十四人筑堤.只云初日差六十四人，次日转多七人，每人日支米三升，共支米四百三石九斗二升，问筑堤几日”.其大意为：“官府陆续派遣 1864 人前往修筑堤坝，第一天派出 64 人，从第二天开始，每天派出的人数比前一天多 7 人，修筑堤坝的每人每天分发大米 3 升，共发出大米 40392 升，问修筑堤坝多少天”.这个问题中，前 5 天应发大米( )

A.894 升

B.1170 升

C.1275 米

D.1467 米

解析：先利用等差数列通项公式求出第 5 天派出的人数，再利用等差数列前 n 项和公式求出前 5 天一共派出多少人，由此能求出结果.

∵第一天派出 64 人，从第二天开始，每天派出的人数比前一天多 7 人，

∴第 5 天派出：64+4×7=92 人，

∴前 5 天共派出 $S_5=\frac{5}{2}(64+92)=390$(人)，

∴前 5 天应发大米：390×3=1170(升).

答案：B

12.对于定义域为 R 的函数 f(x)，若同时满足下列三个条件：①f(0)=0；②当 x∈R，且 x≠0 时，都有 xf′(x)>0；③当 $x_1<0<x_2$，且 $|x_1|=|x_2|$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 f(x)为“偏对称函数”.现给出下列三个函数：

$f_1(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2$，$f_2(x)=e^x-x-1$，$f_3(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\le 0\\ 2x, & x>0\end{cases}$

则其中是“偏对称函数”的函数个数为( )

A.0

B.1

C.2

D.3

解析：逐个条件进行验证：首先可验证四个函数都满足条件①；对于条件②，若 f′(x)的符号容易判断，可验证不等式 xf′(x)>0 成立，若 f′(x)的符号不容易判断，可理解到为

函数在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增，通过函数的单调性进行判断，可排除不满足条件的 $f_2(x)$；对剩余的函数验证条件③，由此能求出结果.

∵$xf'(x)>0$，∴$\begin{cases}x>0\\f'(x)>0\end{cases}$，或$\begin{cases}x<0\\f'(x)<0\end{cases}$.

即条件②等价于函数 $f(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在区间$(0,+\infty)$上单调递增.

对于 $f_1(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2$，$f_1(0)=0$，满足条件①$f(0)=0$；

$f_1'(x)=-3x^2+3x$，由 $f_1'(x)>0$，得 $0<x<1$，由 $f_1'(x)<0$，得 $x<0$ 或 $x>1$，

∴$f_1(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2$的减区间是$(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$；增区间是$(0,1)$，不满足②.

故 $f_1(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2$不是“偏对称函数”；

对于 $f_2(x)=e^x-x-1$，$f_2(0)=e^0-0-1=0$，满足条件①$f(0)=0$；

$f_2'(x)=e^x-1$，由 $f_2'(x)>0$，得 $x>0$，由 $f_2'(x)=e^x-1<0$，得 $x<0$，

∴$f_2(x)=e^x-x-1$ 的减区间为$(-\infty,0)$，增区间为$(0,+\infty)$，满足条件②；

当 $x_1<0<x_2$，且$|x_1|=|x_2|$时，

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(e^{x_2}-x_2-1\right)-\left(e^{x_1}-x_1-1\right)=\left(e^{x_2}-x_2-1\right)-\left(\frac{1}{e^{x_2}}+x_2-1\right)=e^{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}}-2x_2$$

，

设$g(x)=e^x-\frac{1}{e^x}-2x$，则$g'(x)=ex+\frac{1}{e^x}-2$，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$是增函数，

∴ $f(x_2)-f(x_1)=e^{x_2}-\frac{1}{e^{x_2}}-2x_2>0$，∴$f(x_1)<f(x_2)$，满足③，

故 $f_2(x)=e^x-x-1$ 为“偏对称函数”；

对于 $f_3(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\le 0\\2x, & x>0\end{cases}$，$f_3(0)=\ln 1=0$，满足条件①$f(0)=0$；

$f_3(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\le 0\\2x, & x>0\end{cases}$，由复合函数的单调性法则知：

$f_3(x)$在区间$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，满足条件②.

由函数 $f3(x)=\begin{cases}\ln(1-x), & x\le 0\\2x, & x>0\end{cases}$ 的单调性知：当 $x_1<0<x_2$，且$|x_1|=|x_2|$时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，满足条件③，

∴$f_3(x)$是“偏对称函数”.

答案：C

二、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.学校艺术节对 A，B，C，D 四件参赛作品只评一件一等奖，在评奖揭晓前，甲，乙，丙，

丁四位同学对这四件参赛作品预测如下：甲说："是C或D作品获得一等奖"；乙说："B作品获得一等奖"；丙说："A，D两件作品未获得一等奖"；丁说："是C作品获得一等奖".评奖揭晓后，发现这四位同学中只有两位说的话是对的，则获得一等奖的作品是_____.
解析：根据学校艺术节对同一类的A，B，C，D四项参赛作品，只评一项一等奖，故假设A，B，C，D分别为一等奖，判断甲、乙、丙、丁的说法的正确性，即可判断.
若A为一等奖，则甲，丙，丁的说法均错误，故不满足题意；
若B为一等奖，则乙，丙说法正确，甲，丁的说法错误，故满足题意；
若C为一等奖，则甲，丙，丁的说法均正确，故不满足题意；
若D为一等奖，则只有甲的说法正确，故不合题意.
故若这四位同学中只有两位说的话是对的，则获得一等奖的作品是B.
答案：B

14.函数 $y=2-x-\frac{4}{x}$ (x＞0)的最大值为_____.

解析：根据基本不等式的性质即可得到，关键是等号成立的条件.即 $x=\frac{4}{x}$.问题得以解决.

$y=2-x-\frac{4}{x}=2-\left(x+\frac{4}{x}\right)\le 2-2\sqrt{x\text{g}\frac{4}{x}}=2-4=-2$ ，当且仅当x=2时取等号.

所以函数 $y=2-x-\frac{4}{x}$ (x＞0)的最大值为-2.
答案：-2

15.已知α，β是平面，m，n是直线，给出下列命题：
①若m⊥α，m⊂β，则α⊥β
②若m⊂α，n⊂α，m∥β，n∥β，则α∥β
③如果m⊂α，n⊄α，m，n是异面直线，则n与α相交
④若α∩β=m.n∥m，且n⊄α，n⊄β，则n∥α，且n∥β
其中正确确命题的序号是_____(把正确命题的序号都填上)
解析：①由面面垂直的判定理判断.
若m⊥α，m⊂β，则α⊥β，由面面垂直的判定理知正确.
②由面面平行判定定理判断.
若m⊂α，n⊂α，m∥β，n∥β，则α∥β；两条相交直线才行，不正确.
③也可能平行.
如果m⊂α，n⊄α，m，n是异面直线，则n与α相交；也可能平行，不正确.
④若由线面平行的判定定理判断.
若α∩β=m.n∥m，且n⊄α，n⊄β，则n∥α，且n∥β由线面平行的判定定理知正确.
答案：①④

16.等比数列$\{a_n\}$的首项为$\frac{3}{2}$，公比为$-\frac{1}{2}$，前n项和为S_n，则当n∈N*时，$S_n-\frac{1}{S_n}$的最大值与最小值的比值为_____.

解析：由题意，$S_n=\dfrac{\frac{3}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{2}}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{2^n}，n为奇数\\1-\dfrac{1}{2^n}，n为偶数\end{cases}$，

n 为奇数时，S_n随着 n 的增大而减少，所以$1<S_n\le S_1=\frac{3}{2}$，故$0<S_n-\frac{1}{S_n}\le\frac{5}{6}$；

n 为偶数时，S_n随着 n 的增大而增大，所以$1>S_n\ge S_2=\frac{3}{4}$，故$0>S_n-\frac{1}{S_n}\ge-\frac{7}{12}$；

所以数列$\{S_n-\frac{1}{S_n}\}$的最大项的值与最小项的值的比值为$\dfrac{\frac{5}{6}}{-\frac{7}{12}}=-\frac{10}{7}$.

答案：$-\frac{10}{7}$

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.
(一)必考题：每题 12 分，共 60 分.

17.在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，满足：①△ABC 的外心在三角形内部(不包括边)；②$(b^2-a^2-c^2)\sin(B+C)=\sqrt{3}a\cos(A+C)$.

(Ⅰ)求 A 的大小.
解析：(Ⅰ)利用已知条件结合余弦定理，转化求解即可.
答案：(Ⅰ)因为△ABC 的外心在三角形内部(不包括边)，所以△ABC 为锐角三角形；
由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$
移项：$b^2-a^2-c^2=-2ac\cos B$

代入条件得：$-2ac\cos B\sin(B+C)=\sqrt{3}a\cos(A+C)$，

∴$-2\cos B\sin(\pi-A)=\sqrt{3}\cos(\pi-B)$，

即：$2\cos B\sin A=\sqrt{3}\cos B$，

因为△ABC 为锐角三角形，所以 $\cos B\neq 0$，则有：$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ)求代数式$\frac{b+c}{a}$的取值范围.

解析：(Ⅱ)由正弦定理以及两角和与差的三角函数结合函数的最值求解即可.

答案：(Ⅱ)由正弦定理得：$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$，

∵A+B+C=π 且 A=$\frac{\pi}{3}$，∴C=$\frac{2\pi}{3}$−B，代入上式化简得：

$$\frac{b+c}{a}=\frac{\sin B+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin A}=\frac{\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin A}=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right),$$

又△ABC 为锐角三角形，则有：

$$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2},$$

∴$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，则有$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)<1$，

即：$\sqrt{3}<\frac{b+c}{a}\le 2$.

18.“共享单车”的出现，为我们提供了一种新型的交通方式.某机构为了调查人们对此种交通方式的满意度，从交通拥堵不严重的 A 城市和交通拥堵严重的 B 城市分别随机调查了 20 个用户，得到了一个用户满意度评分的样本，并绘制出茎叶图如图：

A城市		B城市
6 8	4	
1 3 6 4	5	3
2 4 5 5	6	6 4 2
3 3 4 6 9	7	6 8 8 6 4 3
3 2 1	8	9 2 8 6 5 1
1 3	9	7 5 5 2

参考数据如下：(下面临界值表供参考)

$P(K^2\geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 n=a+b+c+d)

(Ⅰ)根据茎叶图，比较两城市满意度评分的平均值的大小及方差的大小(不要求计算出具体值，给出结论即可).
解析：(Ⅰ)根据茎叶图的数据即可判断.
答案：(Ⅰ)A 城市评分的平均值小于 B 城市评分的平均值，
A 城市评分的方差大于 B 城市评分的方差.

(Ⅱ)若得分不低于 80 分，则认为该用户对此种交通方式“认可”，否则认为该用户对此种交通方式“不认可”，请根据此样本完成此 2×2 列联表，并据此样本分析是否有 95%的把握认为城市拥堵与认可共享单车有关.

	A	B	合计
认可			
不认可			
合计			

解析：(Ⅱ)由题意做出 2×2 列联表，根据公式计算即可判断.
答案：(Ⅱ)2×2 列联表 2×2 列联表

	认可	不认可	合计
A城市	5	15	20
B城市	10	10	20
合计	15	25	40

$$x^2=\frac{40\left(5\times10-10\times15\right)^2}{20\times20\times15\times25}=\frac{8}{3}<3.841,$$

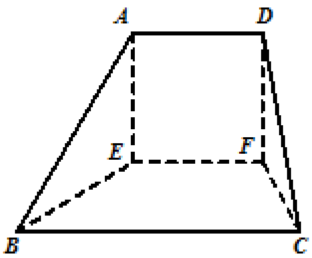
所以没有 95%的把握认为城市拥堵与认可共享单车有关.

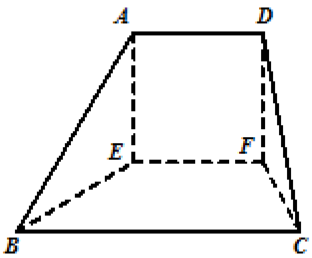
(Ⅲ)在 A，B 城市对此种交通方式“认可”的用户中按照分层抽样的方法抽取 6 人，若在此 6 人中推荐 2 人参加“单车维护”志愿活动，求 A 城市中至少有 1 人的概率.
解析：(Ⅲ)根据分层抽样，求解出人数，写基本事件，即可求解.
答案：(Ⅲ)A 市抽取 $\frac{5}{5+10}\times6=2$ 人，设为 x，y；
B 市抽取 $\frac{10}{5+10}\times6=4$ 人，设为 a，b，c，d，
基本事件共有：xy，xa，xb，xc，xd，ya，yb，yc，yd，ab，ac，ad，bc，bd，cd 共 15 个，
设“A 市至少有 1 人”为事件 M，

则事件 M 包含的基本事件为：xy，xa，xb，xc，xd，ya，yb，yc，yd　共 9 个，

所以 $P(M)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

19.在如图如示的多面体中，平面 AEFD⊥平面 BEFC，四边形 AEFD 是边长为 2 的正方形，EF∥BC，且 $BE=CF=\frac{1}{2}BC=2$.



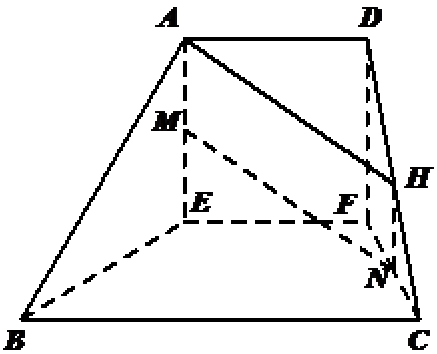


备用图

(Ⅰ)若 M，N 分别是 AE，CF 中点，求证：MN∥平面 ABCD.

解析：(Ⅰ)在平面 CDF 中，作 NH⊥CF，连接 AH，可得 AMNH 是平行四边形.则 MN∥AH.即可由线面平行的判定得 MN∥平面 ABCD.

答案：(Ⅰ)证明：在平面 CDF 中，作 NH⊥CF，连接 AH，



∵M、N 分别是 AE、CF 的中点，且 AEFD 是正方形

∴NH∥DF，$NH=\frac{1}{2}DF$，

AM∥DF，$AM=\frac{1}{2}DF$，

∴NH=AM，NH∥AM，

∴AMNH 是平行四边形.

∴MN∥AH.

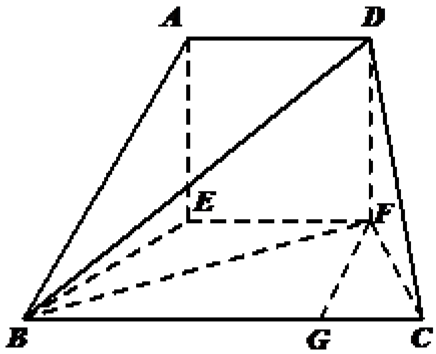
∵AH⊂平面 ABCD，MN⊄平面 ABCD，

∴MN∥平面 ABCD.

(Ⅱ)求此多面体 ABCDEF 的体积.

解析：(Ⅱ)由多面体 ABCDEF 的体积 $V=V_{D-BCF}+V_{B-AEFD}$ 求解.

答案：(Ⅱ)连接 BD，BF，过 F 作 FG⊥EF，交 BC 于点 G，



∵四边形 BEFC 是等腰梯形，

∴CG=$\frac{1}{2}$ (BC−EF)=1，FG=$\sqrt{3}$，

∵平面 AEFD⊥平面 BEFC，

∴GF⊥平面 AEFD，DF⊥平面 BEFC.

∴$V_{D-BCF}=\frac{1}{3}S_{\vartriangle BCF}\cdot DF=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}\times 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$V_{B-AEFD}=\frac{1}{3}S_{AEFD}\cdot HF=\frac{1}{3}\times 2\times 2\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

∴多面体 ABCDEF 的体积 V=V_{D-BCF}+V_{B-AEFD}=$\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

20.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0) 的离心率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆经过点(0，1).

(Ⅰ)求椭圆 C 的标准方程.

解析：(Ⅰ)由椭圆的离心率公式可求得 a 和 b 的值，求得椭圆方程.

答案：(Ⅰ)Q 椭圆经过点(0，1)，∴$\frac{1}{b^2}$=1，b^2=1，

∵e=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$，

解得 a^2=4，

椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(Ⅱ)若直线 l_1：x+2y−2=0 与圆 D：$x^2+y^2-6x-4y+m=0$ 相切：

（ⅰ）求圆 D 的标准方程.

（ⅱ）若直线 l_2 过定点(3，0)，与椭圆 C 交于不同的两点 E，F，与圆 D 交于不同的两点 M，N，求|EF|·|MN|的取值范围.

解析：(Ⅱ)(i)由题意求得直线 l_1 方程，将圆转化成标准方程，利用点圆心到直线的距离公式，求得半径，即可求得圆 D 的标准方程.

(ii)设 l_2：y=k(x-3)，代入椭圆方程，利用韦达定理及弦长公式求得|EF|·|MN|，根据二次函数的单调性即可求得|EF|·|MN|的取值范围.

答案：(Ⅱ)(i)由(1)得直线 l_1 的方程为 $\frac{x}{2}$ +y=1，即 x+2y-2=0，

又圆 D 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=13-m$，

∴圆心为(3，2)，圆的半径 $r=\frac{|3+2\times 2-2|}{\sqrt{1^2+2^2}}=5$，

∴圆 D 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$.

(ii)由题可得直线 l_2 的斜率存在，

设 l_2：y=k(x-3)，与椭圆 C 的两个交点为 $E(x_1，y_1)$、$F(x_2，y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x+3) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 得 $(1+4k^2)x^2-24k^2x+36k^2-4=0$，

由△＞0，得 $0\leqslant k^2<\frac{1}{5}$，$x_1+x_2=\frac{24k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{36k^2-4}{1+4k^2}$，

∴

$$|EF|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(1+k^2)\left(\frac{24k^2}{1+4k^2}\right)^2-4\times\frac{36k^2-1}{1+4k^2}}=\frac{(1+k)^2(1-5k^2)}{1+4k^2}$$

.

又圆 D 的圆心(3，2)到直线 l_2：kx-y-3k=0 的距离 $d=\frac{|3k-2-3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，

∴圆 D 截直线 12 所得弦长 $|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{\frac{5k^2+1}{k^2+1}}$，

$$∴|EF|\cdot|MN|=4\times\frac{\sqrt{(1+k)^2(1-5k^2)}}{1+4k^2}\times 2\sqrt{\frac{5k^2+1}{k^2+1}}=8\times\frac{1-25k^4}{1+4k^2}，$$

设 $t=1+4k^2\in[1，\frac{9}{5})$，$k^2=\frac{t-1}{4}$，

$$∴|EF|\cdot|MN|=8\sqrt{\frac{1-25\left(\frac{t-1}{4}\right)^2}{t^2}}=2\sqrt{-9\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{50}{t}-25}$$，∵ $t\in[1，\frac{9}{5})$，

$\therefore -9\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{50}{t}-25\in$(0，16]，

∴|EF|•|MN|的取值范围(0，8].

21.已知函数 $f\left(x\right)=\frac{-x^2+ax-a}{e^x}$ (x＞0，a∈R).

(Ⅰ)当 a=1 时，求函数 f(x)的极值.

解析：(Ⅰ)求出函数的导数，解关于导函数的不等式，求出函数的单调区间和极值即可.

答案：(Ⅰ)当 a=1 时，$f'\left(x\right)=\frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{e^x}$ (x＞0)，

x∈(0，1)，(2，+∞)时，f′(x)＞0；x∈(1，2)时，f′(x)＜0，

所以 f(x)在区间(0，1)，(2，+∞)上为增函数，在区间(1，2)上为减函数，

所以 f(x)在(0，+∞)上有极大值 f(1)= $-\frac{1}{e}$，极小值 f(2)=$-\frac{3}{e^2}$.

(Ⅱ)设 $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)+f'\left(x\right)}{x-1}$，若函数 g(x)在(0，1)∪(1，+∞)内有两个极值点 x_1，x_2，

求证：$g(x_1)\cdot g(x_2)<\frac{4}{e^2}$.

解析：(Ⅱ)求出函数的导数，设 $h(x)=2x^2-(2+a)x+2$，结合二次函数的性质得到关于 a 的范围，从而证明不等式.

答案：(Ⅱ)证明：$g\left(x\right)=\frac{-2x+a}{\left(x-1\right)e^x}$，$g'\left(x\right)=\frac{2x^2-\left(2+a\right)x+2}{\left(x-1\right)^2e^x}$，

设 $h(x)=2x^2-(2+a)x+2$，

由已知 h(x)=0 在(0，1)，(1，+∞)上有两个不相等的实根 x_1，x_2，

所以$\begin{cases}\text{V}=\left(a+2\right)^2-16>0\\ x_1+x_2=\frac{a+2}{2}>0\\ x_1x_2=1>0\end{cases}$，解得：a＞2，

而 1 不能是方程的根，即 a≠2，综上 a＞2，

$$g\left(x_1\right)\text{g}g\left(x_2\right)=\frac{4x_1x_2-2a\left(x_1+x_2\right)+a^2}{\left[x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1\right]e^{x_1+x_2}}=\frac{2\left(2-a\right)}{\left(2-\frac{a+2}{2}\right)^{\frac{a+2}{2}}}=\frac{4}{e^{\frac{a+2}{2}}},$$

∵a＞2，

$\therefore g(x_1)\cdot g(x_2)=\dfrac{4}{e^{\frac{a+2}{2}}}<\dfrac{4}{e^2}$.

(二)选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修4-4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t为参数)，以原点为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为$\rho=2\sqrt{2}a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(a>\dfrac{5}{6}\right)$.

(Ⅰ)分别写出直线l的普通方程与曲线C的直角坐标方程.

解析：(Ⅰ)直接利用转换关系式，把参数方程和极坐标方程与直角坐标方程进行转化.

答案：(Ⅰ)直线l的参数方程为$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t为参数)，

求出直线l的普通方程为$y=x-3$.

由$\rho=2\sqrt{2}a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\left(a>\dfrac{5}{6}\right)$，

得$\rho^2=2\sqrt{2}\rho a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$，

即$x^2+y^2=2ax-2ay$，

$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$

即曲线C的直角坐标方程为$(x-a)^2+(y+a)^2=2a^2$.

(Ⅱ)已知点P(2，-1)，直线l与曲线C相交于M，N两点，若$|MN|^2=6|PM|\cdot|PN|$，求a的值.

解析：(Ⅱ)利用根和系数的关系求出结果.

答案：(Ⅱ)设M，N两点对应参数分别为t_1，t_2，

将直线$\begin{cases}x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$代入到圆的方程$x^2+y^2=2ax-2ay$中

$t^2+\sqrt{2}t+5-6a=0$，

所以 $t_1+t_2=-\sqrt{2}$，$t_1t_2=5-6a$.

因为$|MN|^2=6|PM||PN|$，
所以$(t_1-t_2)^2=6|t_1t_2|$.

因为 $a>\frac{5}{6}$，
所以 $t_1t_2<0$，
所以$(t_1-t_2)^2=-6t_1t_2$，
所以$(t_1+t_2)^2+2t_1t_2=0$，

即：$(-\sqrt{2})^2+2(5-6a)=0$，

解得 $a=1$.

[选修 4-5：不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=|x-1|$.

(Ⅰ)解不等式 $f(x)+f(x+4)\geqslant 8$.
解析：(Ⅰ)运用绝对值的定义，去绝对值，解不等式，求并集，即可得到所求解集.

答案：(Ⅰ)$f(x)+f(x+4)=|x-1|+|x+3|=\begin{cases}-2-2x, & x<-3\\ 4, & -3\le x\le 1\\ 2x+2, & x>1\end{cases}$，

当 $x<-3$ 时，由$-2x-2\geqslant 8$，解得 $x\leqslant -5$；
当$-3\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=4\leqslant 8$，原不等式不成立；
当 $x>1$ 时，由 $2x+2\geqslant 8$，解得 $x\geqslant 3$.
所以，不等式 $f(x)\geqslant 8$ 的解集为$\{x|x\leqslant -5$，或 $x\geqslant 3\}$.

(Ⅱ)若$|a|<1$，$|b|<1$，$a\neq 0$，求证：$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$.

解析：(Ⅱ)$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$，即$|ab-1|>|a-b|$，两边平方后作差，由因式分解，即可得证.

答案：(Ⅱ)证明：$f(ab)>|a|f(\frac{b}{a})$，即$|ab-1|>|a-b|$.
∵$|a|<1$，$|b|<1$，
∴$|ab-1|^2-|a-b|^2=(a^2b^2-2ab+1)-(a^2-2ab+b^2)$
$=(a^2-1)(b^2-1)>0$，
所以，$|ab-1|>|a-b|$.
故所证不等式成立.