2017年上海市静安区高考一模数学

一、填空题(50分)本大题共有10题，要求在答题纸相应题序的空格内直接填写结果，每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1.“x＜0”是“x＜a”的充分非必要条件，则a的取值范围是_____.

解析：若“x＜0”是“x＜a”的充分非必要条件，

则a的取值范围是(0，+∞).

答案：(0，+∞).

2.函数 $f(x)=1-3\sin^2(x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为_____.

解析：利用三角恒等变换化简函数的解析式，再利用正弦函数的周期性，求得 f(x)的最小正周期.

答案：π.

3.若复数z为纯虚数，且满足(2-i)z=a+i(i为虚数单位)，则实数a的值为_____.

解析：由(2-i)z=a+i，得 $z=\frac{a+i}{2-i}$，然后利用复数代数形式的乘除运算化简复数z，由复数z为纯虚数，列出方程组，求解即可得答案.

答案：$\frac{1}{2}$.

4.二项式 $(x^2+\frac{1}{x})^5$ 展开式中x的系数为_____.

解析：利用二项式 $(x^2+\frac{1}{x})^5$ 展开式的通项公式即可求得答案.

答案：10.

5.用半径1米的半圆形薄铁皮制作圆锥型无盖容器，其容积为_____立方米.

解析：由已知求出圆锥的底面半径，进一步求得高，代入圆锥体积公式得答案.

答案：$\frac{\sqrt{3}\pi}{24}$.

6.已知α为锐角，且 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，则 $\sin\alpha=$_____.

解析：由α为锐角求出 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 的范围，利用同角三角函数间的基本关系求出 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值，所求式子中的角变形后，利用两角和与差的正弦函数公式化简，将各自的值代入计算即可求出值.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{10}$.

7.根据相关规定，机动车驾驶人血液中的酒精含量大于(等于)20 毫克/100 毫升的行为属于饮酒驾车.假设饮酒后，血液中的酒精含量为 p0 毫克/100 毫升，经过 x 个小时，酒精含量降为 p 毫克/100 毫升，且满足关系式 $p=p_0\cdot e^{rx}$(r 为常数).若某人饮酒后血液中的酒精含量为 89 毫克/100 毫升，2 小时后，测得其血液中酒精含量降为 61 毫克/100 毫升，则此人饮酒后需经过_____小时方可驾车.(精确到小时)

解析：先求出 $e^r=\sqrt{\frac{61}{89}}$，再利用 $89\cdot e^{xr}<20$，即可得出结论.

答案：8.

8.已知奇函数 f(x)是定义在 R 上的增函数，数列$\{x_n\}$是一个公差为 2 的等差数列，满足 $f(x_7)+f(x_8)=0$，则 x_{2017}的值为_____.
解析：设 $x_7=x$，则 $x_8=x+2$，则 $f(x)+f(x+2)=0$，结合奇函数关于原点的对称性可知，$f(x+1)=0=f(0)$，$x_7=-1$.设数列$\{x_n\}$通项 $x_n=x_7+2(n-7)$.得到通项 $x_n=2n-15$.由此能求出 x_{2011}的值.
答案：4019.

9.直角三角形 ABC 中，AB=3，AC=4，BC=5，点 M 是三角形 ABC 外接圆上任意一点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$的最大值为_____.
解析：建立坐标系，设 $M(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cos\alpha，2+\frac{5}{2}\sin\alpha)$，则 $\overrightarrow{AM}=(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cos\alpha，2+\frac{5}{2}\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AB}=(3，0)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{9}{2}+\frac{15}{2}\cos\alpha\leqslant 12$.

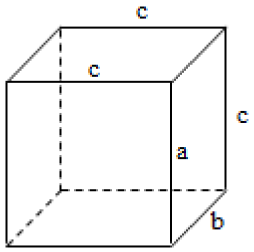
答案：12.

10.已知 $f(x)=a^x-b$((a>0 且且 a≠1，b∈R)，g(x)=x+1，若对任意实数 x 均有 f(x)·g(x)≤0，则$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值为_____.

解析：根据对任意实数 x 均有 f(x)·g(x)≤0，求出 a，b 的关系，可求$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}$的最小值.

答案：4.

二、选择题(25 分)本大题共有 5 题，每题都给出四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把答题纸上相应题序内的正确结论代号涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.
11.若空间三条直线 a、b、c 满足 a⊥b，b⊥c，则直线 a 与 c(　　)
A.一定平行
B.一定相交
C.一定是异面直线
D.平行、相交、是异面直线都有可能
解析：如图所示：a⊥b，b⊥c，



a 与 c 可以相交，异面直线，也可能平行.
从而若直线 a、b、c 满足 a⊥b、b⊥c，则 a∥c，或 a 与 c 相交，或 a 与 c 异面.
答案：D.

12. 在无穷等比数列$\{a_n\}$中，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\frac{1}{2}$，则 a_1 的取值范围是(　　)

A. $(0,\ \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2},\ 1)$

C. (0，1)

D. $(0,\ \frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},\ 1)$

解析：利用无穷等比数列和的极限，列出方程，推出 a_1 的取值范围.
答案：D.

13. 某班班会准备从含甲、乙的 6 名学生中选取 4 人发言，要求甲、乙两人至少有一人参加，那么不同的发言顺序有(　　)
A. 336 种
B. 320 种
C. 192 种
D. 144 种
解析：根据题意，分 2 种情况讨论，①只有甲乙其中一人参加，②甲乙两人都参加，由排列、组合计算可得其符合条件的情况数目，由加法原理计算可得答案.
答案：A.

14. 已知椭圆 C_1，抛物线 C_2 焦点均在 x 轴上，C_1 的中心和 C_2 顶点均为原点 O，从每条曲线上各取两个点，将其坐标记录于表中，则 C_1 的左焦点到 C_2 的准线之间的距离为(　　)

x	3	-2	4	$\sqrt{2}$
y	$-2\sqrt{3}$	0	-4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

A. $\sqrt{2}-1$

B. $\sqrt{3}-1$

C. 1

D. 2

解析：由表可知：抛物线 C_2 焦点在 x 轴的正半轴，设抛物线 C_2：$y^2=2px(p>0)$，则有 $\frac{y^2}{x}=2p(x\neq 0)$，将 $(3,-2\sqrt{3})$，$(4,-4)$ 在 C_2 上，代入求得 $2p=4$，即可求得抛物线方程，求得准线方程，设椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，把点 $(-2,0)$，$(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，即可求得椭圆方程，求得焦点坐标，即可求得 C_1 的左焦点到 C_2 的准线之间的距离.

答案：B.

15. 已知 $y=g(x)$ 与 $y=h(x)$ 都是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$g(x)=\begin{cases} x^2, 0<x\leq 1 \\ g(x-1), x>1 \end{cases}$，$h(x)=k\log_2 x(x>0)$，若 $y=g(x)-h(x)$ 恰有 4 个零点，则正实数 k 的取值范围是(　　)

A. $[\frac{1}{2}, 1]$

B. $(\frac{1}{2}, 1]$

C. $(\frac{1}{2}, \log_3 2]$

D. $[\frac{1}{2}, \log_3 2]$

解析：问题转化为 $g(x)$ 和 $h(x)$ 有 4 个交点，画出函数 $g(x)$，$h(x)$ 的图象，结合图象得到关于 k 的不等式组，解出即可.

答案：C.

三、解答题(本题满分 75 分)本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸的规定区域(对应的题号)内写出必要的步骤.

16. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$AB=a$，$AA_1=2a$，E，F 分别是棱 AD，CD 的中点.

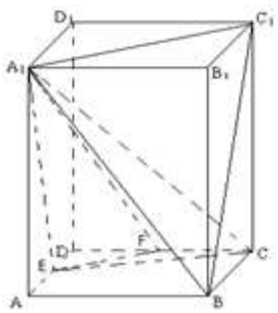
(1)求异面直线 BC_1 与 EF 所成角的大小；

(2)求四面体 CA_1EF 的体积.

解析：(1)连接 A_1C_1，由 E，F 分别是棱 AD，CD 的中点，可得 $EF\parallel AC$，进一步得到 $EF\parallel A_1C_1$，可知 $\angle A_1C_1B$ 为异面直线 BC_1 与 EF 所成角. 然后求解直角三角形得答案；

(2)直接利用等体积法把四面体 CA_1EF 的体积转化为三棱锥 A_1-EFC 的体积求解.

答案：(1)连接 A_1C_1，



∵E，F 分别是棱 AD，CD 的中点，∴EF∥AC，则 EF∥A_1C_1，

∴∠A_1C_1B 为异面直线 BC_1 与 EF 所成角.

在△A_1C_1B 中，由 AB=a，AA_1=2a，得 $C_1B=A_1B$=5a，A_1C_1=2a，

∴cos∠A_1C_1B=$\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{5}a}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

∴异面直线 BC_1 与 EF 所成角的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$；

(2) $V_{C-A_1EF}=V_{A_1-EFC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a=\frac{a^3}{12}$.

17.设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}$=1，$F_1$，$F_2$ 为其左右两个焦点.

(1)设 O 为坐标原点，M 为双曲线 C 右支上任意一点，求 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$ 的取值范围；

(2)若动点 P 与双曲线 C 的两个焦点 F_1,F_2 的距离之和为定值，且 cos∠F_1PF_2 的最小值为$-\dfrac{1}{9}$，求动点 P 的轨迹方程.

解析：(1)设 M(x，y)，x≥$\sqrt{2}$，左焦点 $F_1(-\sqrt{5}$，0)，通过 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$=(x，y)•(x+$\sqrt{5}$，y)利用二次函数的性质求出对称轴 x=$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\leqslant\sqrt{2}$，求出 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$ 的取值范围.

(2)写出 P 点轨迹为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$=1，利用|$F_1F_2$|=2$\sqrt{5}$，|$PF_1$|+|$PF_2$|=2a，结合余弦定理，以及基本不等式求解椭圆方程即可.

答案：(1)设 M(x，y)，x≥$\sqrt{2}$，左焦点 $F_1(-\sqrt{5}$，0)，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$=(x，y)•(x+$\sqrt{5}$，y)=$x^2+\sqrt{5}x+y^2=x^2+\sqrt{5}x+\dfrac{3x^2}{2}-3=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x^2+\sqrt{5}x-3$（x≥$\sqrt{2}$）对称轴 x=$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\leqslant\sqrt{2}$，$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{F_1M}$∈[2+

$\sqrt{10}$，+∞)

(2)由椭圆定义得：P 点轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1，|$F_1F_2$|=2$\sqrt{5}$，|$PF_1$|+|$PF_2$|=2acos∠$F_1PF_2$=

$$\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{4a^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{4a^2-20}{2|PF_1|\cdot|PF_2|-1}$$

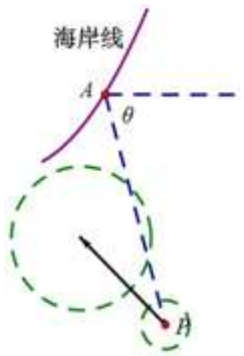
由基本不等式得 2a=|PF_1|+|PF_2|≥$2\sqrt{|PF_1|\cdot|PF_2|}$，

当且仅当|PF_1|=|PF_2|时等号成立|PF_1|·|PF_2|≤a^2⇒cos∠F_1PF_2≥$\frac{4a^2-20}{2a^2}-1$=-$\frac{1}{9}$⇒a^2=9，

b^2=4

所求动点 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$=1.

18.在某海滨城市附近海面有一台风，据监测，当前台风中心位于城市 A(看做一点)的东偏南 θ 角方向(cos θ =$\frac{\sqrt{2}}{10}$)，300km 的海面 P 处，并以 20km/h 的速度向西偏北 45° 方向移动.台风侵袭的范围为圆形区域，当前半径为 60km，并以 10km/h 的速度不断增大.

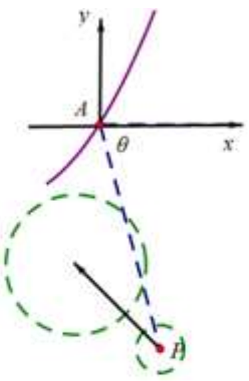


(1)问 10 小时后，该台风是否开始侵袭城市 A，并说明理由；
(2)城市 A 受到该台风侵袭的持续时间为多久？

解析：(1)建立直角坐标系，，则城市 A(0，0)，当前台风中心 P(30$\sqrt{2}$，-210$\sqrt{2}$)，设 t 小时后台风中心 P 的坐标为(x，y)，由题意建立方程组，能求出 10 小时后，该台风还没有开始侵袭城市 A.

(2)t 小时后台风侵袭的范围可视为以 P(30$\sqrt{2}$-10$\sqrt{2}$t，-210$\sqrt{2}$+10$\sqrt{2}$t)为圆心，60+10t 为半径的圆，由此利用圆的性质能求出结果.

答案：(1)如图建立直角坐标系，



则城市 A(0，0)，当前台风中心 P($30\sqrt{2}$，$-210\sqrt{2}$)，

设 t 小时后台风中心 P 的坐标为(x，y)，

则$\begin{cases} x=30\sqrt{2}-10\sqrt{2}t \\ y=-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}t \end{cases}$，此时台风的半径为 60+10t，

10 小时后，|PA|≈184.4km，台风的半径为 r=160km，
∵r＜|PA|，
∴10 小时后，该台风还没有开始侵袭城市 A.

(2)由(1)知 t 小时后台风侵袭的范围可视为以 P($30\sqrt{2}-10\sqrt{2}$t，$-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}$t)为圆心，60+10t 为半径的圆，
若城市 A 受到台风侵袭，

则$\sqrt{\left[\left(30\sqrt{2}-10\sqrt{2}t\right)-0\right]^2+\left[\left(-210\sqrt{2}+10\sqrt{2}t\right)-0\right]^2}$≤(60+10t)，

∴$300t^2-10800t+86400\leq 0$，即 $t^2-36t+288\leq 0$，
解得 12≤t≤24
∴该城市受台风侵袭的持续时间为 12 小时.

19.设集合 M_a={f(x)|存在正实数 a，使得定义域内任意 x 都有 f(x+a)＞f(x)}.
(1)若 $f(x)=2^x-x^2$，试判断 f(x)是否为 M_1 中的元素，并说明理由；
(2)若 $g(x)=x^3-\frac{1}{4}x+3$，且 g(x)∈Ma，求 a 的取值范围；
(3)若 $h(x)=\log_3(x+\frac{k}{x})$， x∈[1，+∞)(k∈R)，且 h(x)∈$M_2$，求 h(x)的最小值.
解析：(1)利用 f(1)=f(0)=1，判断 f(x)$\notin M_1$.
(2)f(x+a)-f(x)＞0，化简，通过判别式小于 0，求出 a 的范围即可.
(3)由 f(x+a)-f(x)＞0，推出 $h(x+2)-h(x)=\log_3[(x+2)+\frac{k}{x+2}]-\log_3(x+\frac{k}{x})>0$，得到 $x+2+\frac{k}{x+2}>x+\frac{k}{x}>0$ 对任意 x∈[1，+∞)都成立，然后分离变量，通过当-1＜k≤0 时，当 0＜k＜1 时，分别求解最小值即可.
答案：(1)∵f(1)=f(0)=1，∴f(x)$\notin M_1$.

(2) 由 $g(x+a)-g(x)=(x+a)^3-x^3-\frac{1}{4}(x+a)+\frac{1}{4}x=3ax^2+3a^2x+a^3-\frac{1}{4}a>0$

$\therefore \triangle=9a^4-12a(a^3-\frac{1}{4}a)<0$，故 $a>1$.

(3) 由 $h(x+2)-h(x)=\log_3[(x+2)+\frac{k}{x+2}]-\log_3(x+\frac{k}{x})>0$，

即：$\log_3[(x+2)+\frac{k}{x+2}]>\log_3(x+\frac{k}{x})$

$\therefore x+2+\frac{k}{x+2}>x+\frac{k}{x}>0$ 对任意 $x\in[1,+\infty)$ 都成立

$\therefore \begin{cases}k<x(x+2)\\ k>-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k<3\\ k>-1\end{cases}\Rightarrow -1<k<3$

当 $-1<k\leqslant 0$ 时，$h(x)_{min}=h(1)=\log_3(1+k)$；

当 $0<k<1$ 时，$h(x)_{min}=h(1)=\log_3(1+k)$；

当 $1\leqslant k<3$ 时，$h(x)_{min}=h(\sqrt{k})=\log_3(2\sqrt{k})$.

综上：$h(x)_{min}=\begin{cases}log_3(1+k),-1<k<1\\ log_3(2\sqrt{k}),1\le k<3\end{cases}$.

20. 由 $n(n\geqslant 2)$ 个不同的数构成的数列 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 中，若 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 时，$a_j<a_i$(即后面的项 a_j 小于前面项 a_i)，则称 a_i 与 a_j 构成一个逆序，一个有穷数列的全部逆序的总数称为该数列的逆序数. 如对于数列 3，2，1，由于在第一项 3 后面比 3 小的项有 2 个，在第二项 2 后面比 2 小的项有 1 个，在第三项 1 后面比 1 小的项没有，因此，数列 3，2，1 的逆序数为 2+1+0=3；同理，等比数列 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{8}$ 的逆序数为 4.

(1) 计算数列 $a_n=-2n+19$ $(1\leqslant n\leqslant 100,\ n\in N^*)$ 的逆序数；

(2) 计算数列 $a_n=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n，n为奇数\\ -\frac{n}{n+1}，n为偶数\end{cases}$ $(1\leqslant n\leqslant k,\ n\in N^*)$ 的逆序数；

(3) 已知数列 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 的逆序数为 a，求 a_n，a_{n-1}，$\cdots a_1$ 的逆序数.

解析：(1) 由 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，可得逆序数为 99+98+…+1.

(2) 当 n 为奇数时，$a_1>a_3>\cdots>a_{2n-1}>0$. 当 n 为偶数时：$0>a_2>a_4>\cdots>a_{2n}$. 可得逆序数.

(3) 在数列 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 中，若 a_1 与后面 n−1 个数构成 p_1 个逆序对，则有 $(n-1)-p_1$ 不构成逆序对，可得在数列 a_n，a_{n-1}，$\cdots a_1$ 中，逆序数为 $(n-1)-p_1+(n-2)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n$.

答案：(1) $\because \{a_n\}$ 为单调递减数列，$\therefore$ 逆序数为 $99+98+\cdots+1=\frac{(99+1)\times 99}{2}=4950$.

(2) 当 n 为奇数时，$a_1>a_3>\cdots>a_{2n-1}>0$.

当 n 为偶数时：$a_n-a_{n-2}=-\frac{n}{n+1}+\frac{n-2}{n-1}$ $(n\geqslant 4)=\frac{-2}{n^2-1}=\frac{-2}{(n+1)(n-1)}<0$

$\therefore 0 > a_2 > a_4 > \cdots > a_{2n}$.

当 k 为奇数时，逆序数为 $(k-1)+(k-3)+\cdots+2+\dfrac{k-3}{2}+\dfrac{k-5}{2}+\cdots+1=\dfrac{3k^2-4k+1}{8}$；

当 k 为偶数时，逆序数为 $(k-1)+(k-3)+\cdots+1+\dfrac{k-2}{2}+\dfrac{k-4}{2}+\cdots+1=\dfrac{3k^2-2k}{8}$.

(3)在数列 a_1，a_2，$\cdots a_n$ 中，若 a_1 与后面 $n-1$ 个数构成 p_1 个逆序对，
则有 $(n-1)-p_1$ 不构成逆序对，所以在数列 a_n，a_{n-1}，$\cdots a_1$ 中，

逆序数为 $(n-1)-p_1+(n-2)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n=\dfrac{n(n-1)}{2}-a$.