2017年福建省中考数学

一、选择题：本题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 3的相反数是(　　)

A. -3

B. $-\frac{1}{3}$

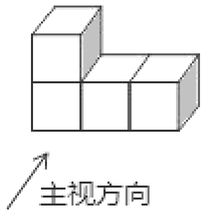
C. $\frac{1}{3}$

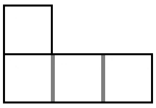
D. 3

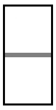
解析：3的相反数是-3

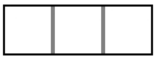
答案：A.

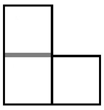
2.如图，由四个正方体组成的几何体的左视图是(　　)

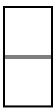


A. 

B. 

C. 

D. 

解析：图形的左视图为：.

答案：B.

3.用科学记数法表示136 000，其结果是(　　)

A. 0.136×10^6

B. 1.36×10^5

C. 136×10^3

D. 136×10^6

解析：用科学记数法表示136 000，其结果是1.36×10^5.

答案：B.

4.化简$(2x)^2$的结果是(　　)

A. x^4

B. $2x^2$

C. $4x^2$

D.4x

解析：$(2x)^2=4x^2$.

答案：C.

5.下列关于图形对称性的命题，正确的是(　　)

A.圆既是轴对称性图形，又是中心对称图形

B.正三角形既是轴对称图形，又是中心对称图形

C.线段是轴对称图形，但不是中心对称图形

D.菱形是中心对称图形，但不是轴对称图形

解析：A、圆既是轴对称性图形，又是中心对称图形，故A符合题意；

B、正三角形既是轴对称图形，不是中心对称图形，故B不符合题意；

C、线段是轴对称图形，是中心对称图形，故C不符合题意；

D、菱形是中心对称图形，是轴对称图形，故D符合题意.

答案：A.

6.不等式组：$\begin{cases} x-2\le 0 \\ x+3>0 \end{cases}$的解集是(　　)

A.$-3<x\leqslant 2$

B.$-3\leqslant x<2$

C.$x\geqslant 2$

D.$x<-3$

解析：$\begin{cases} x-2\le 0① \\ x+3>0② \end{cases}$

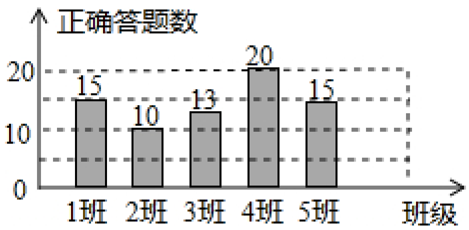
解不等式①得：$x\leqslant 2$，

解不等式②得：$x>-3$，

∴不等式组的解集为：$-3<x\leqslant 2$，

答案：A.

7.某校举行“汉字听写比赛”，5个班级代表队的正确答题数如图.这5个正确答题数所组成的一组数据的中位数和众数分别是(　　)



A.10，15

B.13，15

C.13，20

D.15，15

解析：把这组数据从小到大排列：10、13、15、15、20，

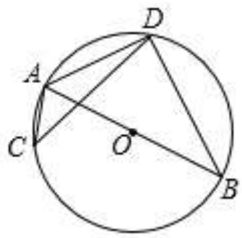
最中间的数是15，

则这组数据的中位数是15；

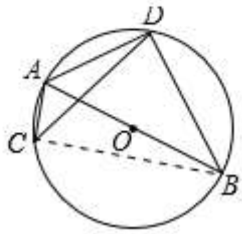
15出现了2次，出现的次数最多，则众数是15.

答案：D.

8.如图，AB是⊙O的直径，C，D是⊙O上位于AB异侧的两点.下列四个角中，一定与∠ACD互余的角是(　　)



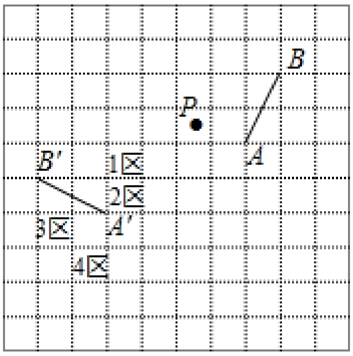
A. ∠ADC
B. ∠ABD
C. ∠BAC
D. ∠BAD
解析：连接 BC，如图所示：



∵AB 是⊙O 的直径，
∴∠ACB=∠ACD+∠BCD=90°，
∵∠BCD=∠BAD，
∴∠ACD+∠BAD=90°.
答案：D.

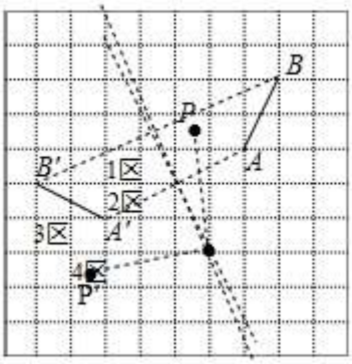
9.若直线 y=kx+k+1 经过点(m，n+3)和(m+1，2n－1)，且 0＜k＜2，则 n 的值可以是(　　)
A.3
B.4
C.5
D.6
解析：依题意得：$\begin{cases} n+3=km+k+1 \\ 2n+1=km+k+k+1 \end{cases}$，
∴k=n－4，
∵0＜k＜2，
∴0＜n－4＜2，
∴4＜n＜6.
答案：C.

10.如图,网格纸上正方形小格的边长为 1.图中线段 AB 和点 P 绕着同一个点做相同的旋转，分别得到线段 A’B’和点 P’，则点 P’所在的单位正方形区域是(　　)



A.1 区

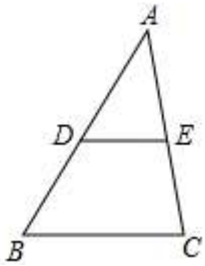
B.2 区
C.3 区
D.4 区
解析：如图，连接 AA′、BB′，分别作 AA′、BB′的中垂线，两直线的交点即为旋转中心，



由图可知，线段 AB 和点 P 绕着同一个该点逆时针旋转 90°，
∴点 P 逆时针旋转 90°后所得对应点 P′落在 4 区.
答案：D.

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.
11.计算$|-2|-3^0$=____.
解析：原式=2－1
=1.
答案：1.

12.如图，△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，连线 DE.若 DE=3，则线段 BC 的长等于____.

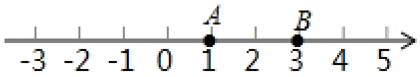


解析：∵△ABC 中，D，E 分别是 AB，AC 的中点，
∴DE 是△ABC 的中位线.
∵DE=3，
∴BC=2DE=6.
答案：6.

13.一个箱子装有除颜色外都相同的 2 个白球，2 个黄球，1 个红球.现添加同种型号的 1 个球，使得从中随机抽取 1 个球，这三种颜色的球被抽到的概率都是$\frac{1}{3}$，那么添加的球是____.

解析：∵这三种颜色的球被抽到的概率都是$\frac{1}{3}$，
∴这三种颜色的球的个数相等，
∴添加的球是红球.
答案：红球.

14.已知 A，B，C 是数轴上的三个点，且 C 在 B 的右侧.点 A，B 表示的数分别是 1，3，如图所示.若 BC=2AB，则点 C 表示的数是____.



解析：∵点 A，B 表示的数分别是 1，3，

∴AB=3﹣1=2，

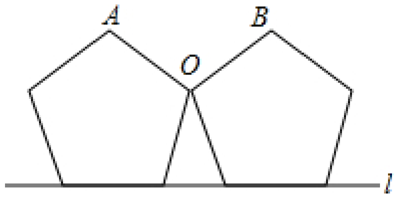
∵BC=2AB=4，

∴OC=OA+AB+BC=1+2+4=7，

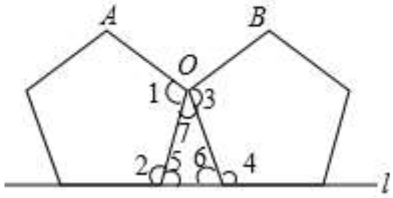
∴点 C 表示的数是 7.

答案：7.

15.两个完全相同的正五边形都有一边在直线 l 上，且有一个公共顶点 O，其摆放方式如图所示，则∠AOB 等于____度.



解析：如图



由正五边形的内角和，得∠1=∠2=∠3=∠4=108°，

∠5=∠6=180°﹣108°=72°，

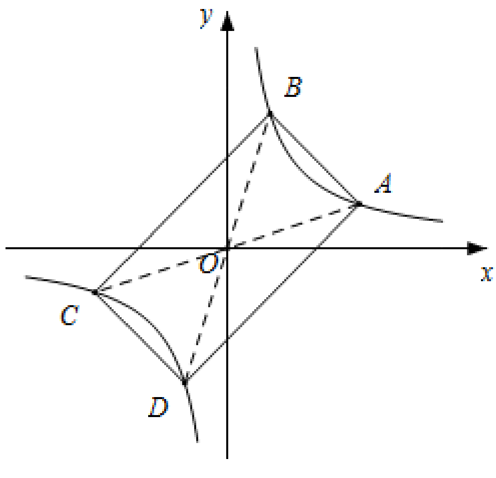
∠7=180°﹣72°﹣72°=36°.

∠AOB=360°﹣108°﹣108°﹣36°=108°，

答案：108.

16.已知矩形 ABCD 的四个顶点均在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，且点 A 的横坐标是 2，则矩形 ABCD 的面积为____.

解析：如图所示，根据点 A 在反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象上，且点 A 的横坐标是 2，可得 A(2，$\frac{1}{2}$)，



根据矩形和双曲线的对称性可得，B($\frac{1}{2}$，2)，D(－$\frac{1}{2}$，－2)，

由两点间距离公式可得，$AB=\sqrt{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

$AD=\sqrt{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+2\right)^2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$，

∴矩形ABCD的面积=AB×AD=$\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{15}{2}$，

答案：$\frac{15}{2}$.

三、解答题：本题共9小题，共86分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.先化简，再求值：$\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{a^2-1}$，其中a=$\sqrt{2}$－1.

解析：根据分式的运算法则即可求出答案.

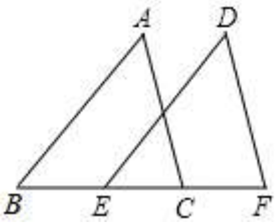
答案：当a=$\sqrt{2}$－1时

原式=$\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a}{(a+1)(a-1)}$

=$\frac{1}{a+1}$

=$\frac{\sqrt{2}}{2}$

18.如图，点B、E、C、F在同一直线上，AB=DE，AC=DF，BE=CF.求证：∠A=∠D.



解析：证明BC=EF，然后根据SSS即可证明△ABC≌△DEF，然后根据全等三角形的对应边相等即可证得.

答案：∵BE=DF，

∴BC=EF，

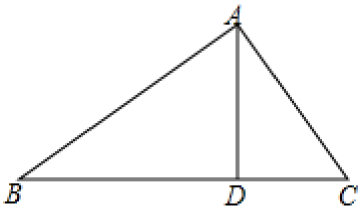
在△ABC和△DEF中，

$$\begin{cases}AB=DE\\AC=DF\\BC=EF\end{cases},$$

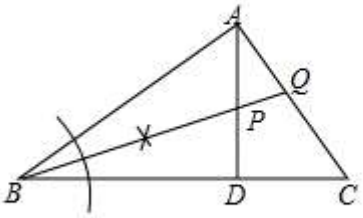
∴△ABC≌△DEF(SSS).

∴∠A=∠D.

19.如图，△ABC中，∠BAC=90°，AD⊥BC，垂足为D.求作∠ABC的平分线，分别交AD，AD于P，Q两点；并证明AP=AQ.(要求：尺规作图，保留作图痕迹，不写作法)

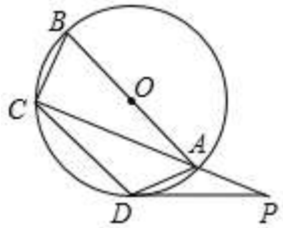


解析：根据角平分线的性质作出 BQ 即可.先根据垂直的定义得出∠ADB=90°，故∠BPD+∠PBD=90°.
再根据余角的定义得出∠AQP+∠ABQ=90°，根据角平分线的性质得出∠ABQ=∠PBD，再由∠BPD=∠APQ 可知∠APQ=∠AQP，据此可得出结论.
答案：BQ 就是所求的∠ABC 的平分线，P、Q 就是所求作的点.
证明：∵AD⊥BC，
∴∠ADB=90°，
∴∠BPD+∠PBD=90°.
∵∠BAC=90°，
∴∠AQP+∠ABQ=90°.
∵∠ABQ=∠PBD，
∴∠BPD=∠AQP.
∵∠BPD=∠APQ，
∴∠APQ=∠AQP，
∴AP=AQ.



20.我国古代数学著作《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足.问鸡兔各几何.”其大意是：“有若干只鸡和兔关在同一笼子里，它们一共有 35 个头，94 条腿.问笼中的鸡和兔各有多少只？”试用列方程(组)解应用题的方法求出问题的解.
解析：设鸡有 x 只，兔有 y 只，根据等量关系：上有三十五头，下有九十四足，可分别得出方程，联立求解即可得出答案.
答案：设鸡有 x 只，兔有 y 只，鸡有一个头，两只脚，兔有 1 个头，四只脚，
结合上有三十五头，下有九十四足可得：$\begin{cases}x+y=35\\2x+4y=94\end{cases}$，
解得：$\begin{cases}x=23\\y=12\end{cases}$.
答：鸡有 23 只，兔有 12 只.

21.如图，四边形 ABCD 内接于⊙O，AB 是⊙O 的直径，点 P 在 CA 的延长线上，∠CAD=45°.
(Ⅰ)若 AB=4，求 CD 的长；
(Ⅱ)若 $BC=AD$，AD=AP，求证：PD 是⊙O 的切线.



解析:(Ⅰ)连接OC,OD,由圆周角定理得到∠COD=2∠CAD,∠CAD=45°,于是得到∠COD=90°,根据弧长公式即可得到结论;

(Ⅱ)由已知条件得到∠BOC=∠AOD,由圆周角定理得到∠AOD=45°,根据等腰三角形的性质得到∠ODA=∠OAD,求得∠ADP=$\frac{1}{2}\angle CAD$=22.5°,得到∠ODP=∠ODA+∠ADP=90°,于是得到结论.

答案:(Ⅰ)连接OC,OD,

∵∠COD=2∠CAD,∠CAD=45°,

∴∠COD=90°,

∵AB=4,

∴OC=$\frac{1}{2}$AB=2,

∴CD的长=$\frac{90}{180}$×π×2=π;

(Ⅱ)∵$BC=AD$,

∴∠BOC=∠AOD,

∵∠COD=90°,

∴∠AOD=45°,

∵OA=OD,

∴∠ODA=∠OAD,

∵∠AOD+∠ODA=∠OAD=180°,

∴∠ODA=67.5°,

∵AD=AP,

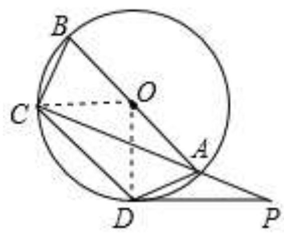
∴∠ADP=∠APD,

∵∠CAD=∠ADP+∠APD,∠CAD=45°,

∴∠ADP=$\frac{1}{2}\angle CAD$=22.5°,

∴∠ODP=∠ODA+∠ADP=90°,

∴PD是⊙O的切线.



22.小明在某次作业中得到如下结果:

$\sin^2 7°+\sin^2 83°\approx0.12^2+0.99^2=0.9945$,

$\sin^2 22°+\sin^2 68°\approx0.37^2+0.93^2=1.0018$,

$\sin^2 29°+\sin^2 61°\approx0.48^2+0.87^2=0.9873$,

$\sin^2 37°+\sin^2 53°\approx0.60^2+0.80^2=1.0000$, sin²45° +sin²45° $\approx\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$.

据此，小明猜想：对于任意锐角 α，均有 sin²α+sin²(90° - α)=1.

(Ⅰ)当 α=30° 时，验证 sin²α+sin²(90° - α)=1 是否成立；

(Ⅱ)小明的猜想是否成立？若成立，请给予证明；若不成立，请举出一个反例.

解析：(1)将 α=30° 代入，根据三角函数值计算可得；

(2)设∠A=α，则∠B=90° - α，根据正弦函数的定义及勾股定理即可验证.

答案：(1)当 α=30° 时，

sin²α+sin²(90° - α)

=sin²30° +sin²60°

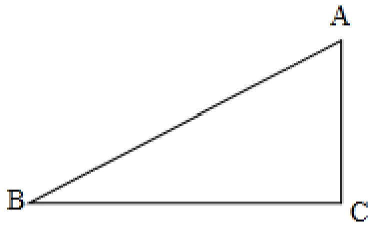
$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

=1；

(2)小明的猜想成立，证明如下：

如图，在△ABC 中，∠C=90°，



设∠A=α，则∠B=90° - α，

∴sin²α+sin²(90° - α)

$=\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$

$=\frac{BC^2+AC^2}{AB^2}$

$=\frac{AB^2}{AB^2}$

=1.

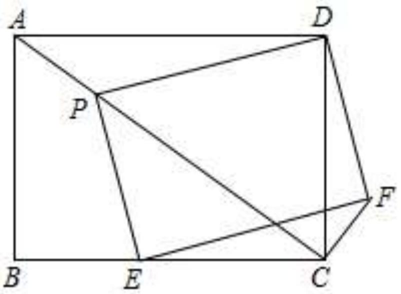
23.自 2016 年国庆后，许多高校均投放了使用手机就可随用的共享单车.某运营商为提高其经营的 A 品牌共享单车的市场占有率，准备对收费作如下调整：一天中，同一个人第一次使用的车费按 0.5 元收取，每增加一次，当次车费就比上次车费减少 0.1 元，第 6 次开始，当次用车免费.具体收费标准如下：

使用次数	0	1	2	3	4	5(含 5 次以上)
累计车费	0	0.5	0.9	a	b	1.5

同时，就此收费方案随机调查了某高校 100 名师生在一天中使用 A 品牌共享单车的意愿，得到如下数据：

使用次数	0	1	2	3	4	5
人数	5	15	10	30	25	15

(Ⅰ)写出 a，b 的值；
(Ⅱ)已知该校有 5000 名师生，且 A 品牌共享单车投放该校一天的费用为 5800 元.试估计：收费调整后，此运营商在该校投放 A 品牌共享单车能否获利？说明理由.
解析：(Ⅰ)根据收费调整情况列出算式计算即可求解；
(Ⅱ)先根据平均数的计算公式求出抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费，再根据用样本估计总体求出 5000 名师生一天使用共享单车的费用，再与 5800 比较大小即可求解.
答案：(Ⅰ)a=0.9+0.3=1.2，b=1.2+0.2=1.4；
(Ⅱ)根据用车意愿调查结果，抽取的 100 名师生每人每天使用 A 品牌共享单车的平均车费为：
$\frac{1}{100}$×(0×5+0.5×15+0.9×10+1.2×30+1.4×25+1.5×15)=1.1(元)，
所以估计 5000 名师生一天使用共享单车的费用为：5000×1.1=5500(元)，
因为 5500＜5800，
故收费调整后，此运营商在该校投放 A 品牌共享单车不能获利.

24.如图，矩形 ABCD 中，AB=6，AD=8，P，E 分别是线段 AC、BC 上的点，且四边形 PEFD 为矩形.
(Ⅰ)若△PCD 是等腰三角形时，求 AP 的长；
(Ⅱ)若 AP=$\sqrt{2}$，求 CF 的长.


解析：(Ⅰ)先求出 AC，再分三种情况讨论计算即可得出结论；
(Ⅱ)先判断出$OC=\frac{1}{2}ED，OC=\frac{1}{2}PF$，进而得出 OC=OP=OF，即可得出∠OCF=∠OFC，∠OCP=∠OPC，最后判断出△ADP∽△CDF，得出比例式即可得出结论.
答案：(Ⅰ)在矩形 ABCD 中，AB=6，AD=8，∠ADC=90°，
∴DC=AB=6，
∴AC=$\sqrt{AD^2+DC^2}$=10，
要使△PCD 是等腰三角形，
①当 CPCD 时，AP=AC﹣CP=10﹣6=4，
②当 PD=PC 时，∠PDC=∠PCD，
∵∠PCD+∠PAD=∠PDC+∠PDA=90°，
∴∠PAD=∠PDA，
∴PD=PA，
∴PA=PC，
∴AP=$\frac{1}{2}$AC=5，
③当 DP=DC 时，如图 1，过点 D 作 DQ⊥AC 于 Q，则 PQ=CQ，
∵$S_{\Delta ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}AC\cdot DQ$，

∴DQ=$\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{24}{5}$，

∴$CQ=\sqrt{DC^2-DQ^2}=\frac{18}{5}$，

∴PC=2CQ=$\frac{36}{5}$，

∴AP=AC－PC=10－$\frac{36}{5}=\frac{14}{5}$；

所以，若△PCD是等腰三角形时，AP=4或5或$\frac{14}{5}$；

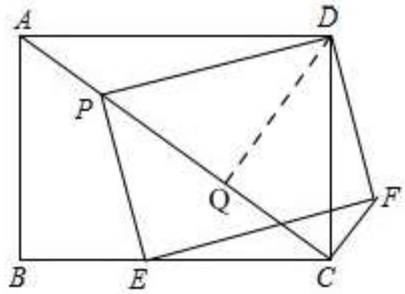


图1

(Ⅱ)如图2，连接PF，DE记PF与DE的交点为O，连接OC，

∵四边形ABCD和PEFD是矩形，

∴∠ADC=∠PDF=90°，

∴∠ADP+∠PDC=∠PDC+∠CDF，

∴∠ADP=∠CDF，

∵∠BCD=90°，OE=OD，

∴OC=$\frac{1}{2}$ED，

在矩形PEFD中，PF=DE，

∴OC=$\frac{1}{2}$PF，

∵OP=OF=$\frac{1}{2}$PF，

∴OC=OP=OF，

∴∠OCF=∠OFC，∠OCP=∠OPC，

∵∠OPC+∠OFC+∠PCF=180°，

∴2∠OCP+2∠OCF=180°，

∴∠PCF=90°，

∴∠PCD+∠FCD=90°，

在Rt△ADC中，∠PCD+∠PAD=90°，

∴∠PAD=∠FCD，

∴△ADP∽△CDF，

∴$\frac{CF}{AP}=\frac{CD}{AD}=\frac{3}{4}$，

∵AP=$\sqrt{2}$，

∴CF=$\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

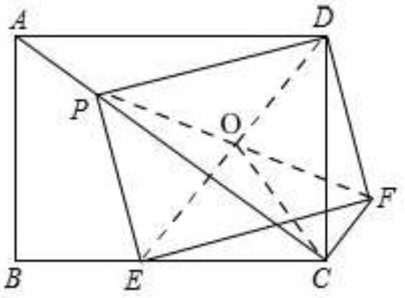


图2

25.已知直线 $y=2x+m$ 与抛物线 $y=ax^2+ax+b$ 有一个公共点 M(1，0)，且 a＜b.

(Ⅰ)求抛物线顶点 Q 的坐标(用含 a 的代数式表示)；

(Ⅱ)说明直线与抛物线有两个交点；

(Ⅲ)直线与抛物线的另一个交点记为 N.

(ⅰ)若 $-1\leqslant a\leqslant -\dfrac{1}{2}$，求线段 MN 长度的取值范围；

(ⅱ)求△QMN 面积的最小值.

解析：(Ⅰ)把 M 点坐标代入抛物线解析式可得到 b 与 a 的关系，可用 a 表示出抛物线解析式，化为顶点式可求得其顶点坐标；

(Ⅱ)由直线解析式可先求得 m 的值，联立直线与抛物线解析式，消去 y，可得到关于 x 的一元二次方程，再判断其判别式大于 0 即可；

(Ⅲ)(i)由(Ⅱ)的方程，可求得 N 点坐标，利用勾股定理可求得 MN^2，利用二次函数性质可求得 MN 长度的取值范围；(ii)设抛物线对称轴交直线与点 E，则可求得 E 点坐标，利用 $S_{\triangle QMN}=S_{\triangle QEN}+S_{\triangle QEM}$ 可用 a 表示出△QMN 的面积，再整理成关于 a 的一元二次方程，利用判别式可得其面积的取值范围，可求得答案.

答案：(Ⅰ)∵抛物线 $y=ax^2+ax+b$ 过点 M(1，0)，

∴a+a+b=0，即 b=－2a，

∴ $y=ax^2+ax+b=ax^2+ax-2a=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9a}{4}$，

∴抛物线顶点 Q 的坐标为($-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{9a}{4}$)；

(Ⅱ)∵直线 $y=2x+m$ 经过点 M(1，0)，

∴0=2×1+m，解得 m=－2，

联立直线与抛物线解析式，消去 y 可得 $ax^2+(a-2)x-2a+2=0$(*)

∴$\triangle=(a-2)^2-4a(-2a+2)=9a^2-12a+4$，

由(Ⅰ)知 b=－2a，且 a＜b，

∴a＜0，b＞0，

∴△＞0，

∴方程(*)有两个不相等的实数根，

∴直线与抛物线有两个交点；

(Ⅲ)联立直线与抛物线解析式，消去 y 可得 $ax^2+(a-2)x-2a+2=0$，即 $x^2+\left(1-\dfrac{2}{a}\right)x-2+\dfrac{2}{a}=0$，

∴$(x-1)[x-(\dfrac{2}{a}-2)]=0$，解得 x=1 或 $x=\dfrac{2}{a}-2$，

∴N 点坐标为($\dfrac{2}{a}-2,\dfrac{4}{a}-6$)， (i)由勾股定理可得 $MN^2=\left[\left(\frac{2}{a}-2\right)-1\right]^2+\left(\frac{4}{a}-6\right)^2=\frac{20}{a^2}-\frac{60}{a}+45=20\left(\frac{1}{a}-\frac{3}{2}\right)^2$，

∵ $-1\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$，

∴ $-2\leqslant \frac{1}{a}\leqslant -1$，

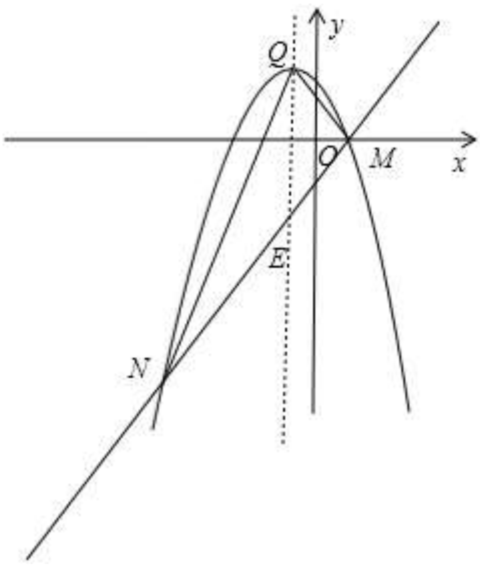
∴ MN^2 随 $\frac{1}{a}$ 的增大而减小，

∴当 $\frac{1}{a}=-2$ 时，MN^2 有最大值 245，则 MN 有最大值 $7\sqrt{5}$，

当 $\frac{1}{a}=-1$ 时，MN^2 有最小值 125，则 MN 有最小值 $5\sqrt{5}$，

∴线段 MN 长度的取值范围为 $5\sqrt{5}\leq MN\leq 7\sqrt{5}$；

(ii)如图，设抛物线对称轴交直线与点 E，



∵抛物线对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，

∴$E\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$，

∵M(1，0)，$N\left(\frac{2}{a}-2,\frac{4}{a}-6\right)$，且 a＜0，设△QMN 的面积为 S，

∴ $S=S_{\Delta QEN}+S_{\Delta QEM}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{2}{a}-2\right)-1\right|\cdot\left|-\frac{9a}{4}-(-3)\right|=\frac{27}{4}-\frac{3}{a}-\frac{27a}{8}$，

∴$27a^2+(8S-54)a+24=0$(*)，

∵关于 a 的方程(*)有实数根，

∴△$=(8S-54)^2-4\times27\times24\geqslant0$，即 $(8S-54)^2\geqslant(36\sqrt{2})^2$，

∵a＜0，

∴$S=\frac{27}{4}-\frac{3}{a}-\frac{27a}{8}>\frac{27}{4}$，

∴$8S-54>0$，

∴$8S-54\geqslant 36\sqrt{2}$，即 $S\geqslant \frac{27}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{2}$，

当 $S=\frac{27}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{2}$ 时，由方程(*)可得 $a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 满足题意，

∴当 $a=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$b=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 时，△QMN 面积的最小值为 $\frac{27}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{2}$.