

2018年河南省周口市西华县中考一模数学

一、选择题(每小题3分,共30分)下列各小题均有四个答案,其中只有一个是正确的.

1. -3 是 3 的()

- A. 倒数
- B. 相反数
- C. 绝对值
- D. 平方根

解析: -3 是 3 的相反数.

答案: B

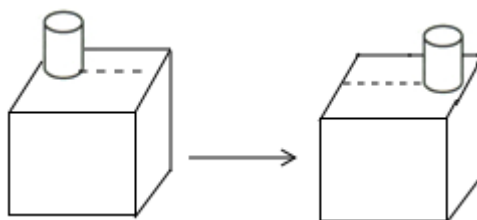
2. “厉行勤俭节约,反对铺张浪费”势在必行,最新统计数据显示,中国每年浪费食物总量折合粮食大约是210000000人一年的口粮.将210000000用科学记数法表示为()

- A. 2.1×10^9
- B. 0.21×10^9
- C. 2.1×10^8
- D. 21×10^7

解析: 将210000000用科学记数法表示为: 2.1×10^8 .

答案: C

3. 如图,一个圆柱体在正方体上沿虚线从左向右平移,平移过程中不变的是()



- A. 主视图
- B. 左视图
- C. 俯视图
- D. 主视图和俯视图

解析: 根据图形,可得: 平移过程中不变的是左视图,变化的是主视图和俯视图.

答案: B

4. 不等式组 $\begin{cases} 3 - 2x < 5 \\ 2(x - 2) \leq 1 \end{cases}$ 的解集是()

- A. 无解
- B. $x < -1$
- C. $x \geq \frac{5}{2}$
- D. $-1 < x \leq \frac{5}{2}$

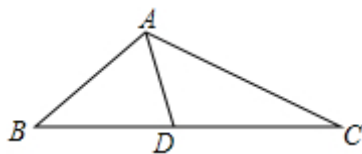
解析: 解不等式 $3 - 2x < 5$, 得: $x > -1$,

解不等式 $2(x - 2) \leq 1$, 得: $x \leq \frac{5}{2}$,

则不等式组的解集为 $-1 < x \leq \frac{5}{2}$.

答案: D

5. 如图， $\triangle ABC$ 中， AD 是中线， $BC=8$ ， $\angle B=\angle DAC$ ，则线段 AC 的长为()



- A. 4
- B. $4\sqrt{2}$
- C. 6
- D. $4\sqrt{3}$

解析： $\because BC=8$ ，
 $\therefore CD=4$ ，
 在 $\triangle CBA$ 和 $\triangle CAD$ 中，
 $\because \angle B=\angle DAC$ ， $\angle C=\angle C$ ，
 $\therefore \triangle CBA \sim \triangle CAD$ ，
 $\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{CD}{AC}$ ，
 $\therefore AC^2 = CD \cdot BC = 4 \times 8 = 32$ ，
 $\therefore AC = 4\sqrt{2}$ ；

答案：B

6. 学校团委组织“阳光助残”捐款活动，九年一班学生捐款情况如下表：

捐款金额(元)	5	10	20	50
人数(人)	10	13	12	15

则学生捐款金额的中位数是()

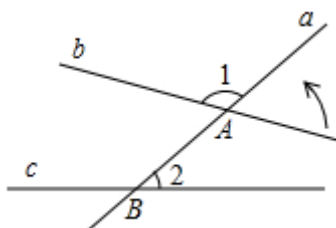
- A. 13 人
- B. 12 人
- C. 10 元
- D. 20 元

解析： $\because 10+13+12+15=50$ ，
 按照从小到大顺序排列的第 25 个和第 26 个数据都是 20(元)，
 \therefore 它们的平均数即为中位数， $\frac{20+20}{2}=20$ (元)，

\therefore 学生捐款金额的中位数是 20 元。

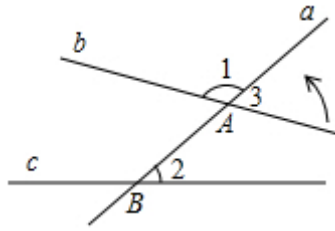
答案：D

7. 如图，直线 a 与直线 b 交于点 A ，与直线 c 交于点 B ， $\angle 1=120^\circ$ ， $\angle 2=45^\circ$ ，若使直线 b 与直线 c 平行，则可将直线 b 绕点 A 逆时针旋转()



- A. 15°
- B. 30°
- C. 45°
- D. 60°

解析：

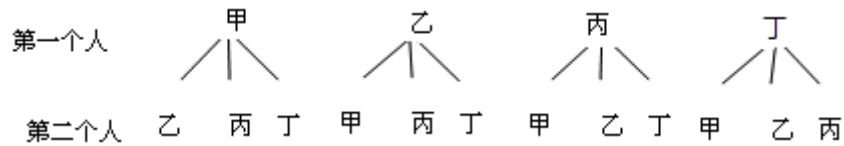


$\because \angle 1 = 120^\circ$,
 $\therefore \angle 3 = 60^\circ$,
 $\because \angle 2 = 45^\circ$,
 \therefore 当 $\angle 3 = \angle 2 = 45^\circ$ 时, $b \parallel c$,
 \therefore 直线 b 绕点 A 逆时针旋转 $60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$.
 答案: A

8. 共甲、乙、丙、丁 4 名三好学生中随机抽取 2 名学生担任升旗手, 则抽取的 2 名学生是甲和乙的概率为()

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{1}{6}$
- D. $\frac{3}{4}$

解析: 画树形图得:

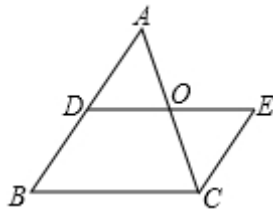


\therefore 一共有 12 种情况, 抽取到甲和乙的有 2 种,

$\therefore P(\text{抽到甲和乙}) = \frac{1}{6}$.

答案: C

9. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle BAC$, D 是 AB 的中点, $EC \parallel AB$, $DE \parallel BC$, AC 与 DE 交于点 O . 下列结论中, 不一定成立的是()



- A. $AC = DE$
- B. $AB = AC$
- C. $AD = EC$
- D. $OA = OE$

解析: $\because EC \parallel AB$, $DE \parallel BC$,
 \therefore 四边形 $BDEC$ 是平行四边形,
 $\therefore BD = CE$, $\angle B = \angle E$,
 又 $\because \angle ABC = \angle BAC$,
 $\therefore \angle CEO = \angle DAO$,
 又 D 是 AB 的中点,

$\therefore AD=BD$,
 $\therefore AD=CE$,
 $\therefore \triangle AOD \cong \triangle EOC$,
 $\therefore AD=CE, OA=OE$,
 $\because BC=DE, BC=AC$,
 $\therefore AC=DE$.

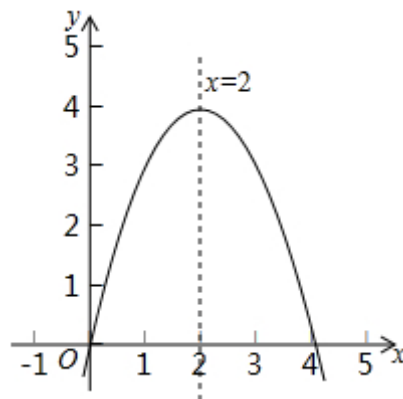
而 $AB=AC$ 无法证得.

答案: B

10. 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象如图所示, 下列几个结论:

- ① 对称轴为 $x=2$;
- ② 当 $y \leq 0$ 时, $x < 0$ 或 $x > 4$;
- ③ 函数解析式为 $y = -x(x-4)$;
- ④ 当 $x \leq 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

其中正确的结论有()



- A. ①②③④
- B. ①②③
- C. ①③④
- D. ①③

解析: 根据图象可以得到以下信息, 抛物线开口向下,

\therefore 与 x 轴交于 $(0, 0)$ $(4, 0)$ 两点坐标,

\therefore 对称轴为 $x=2$.

顶点坐标为 $(2, 4)$, 接着再判断①②③④的各种说法.

①正确; ②当 $y \leq 0$ 时, $x \leq 0$ 或 $x \geq 4$, 错误; ③正确; ④正确.

答案: C

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

11. 计算: $2018^0 - |-2| = \underline{\quad}$.

解析: 原式 $= 1 - 2$

$= -1$.

答案: -1

12. 若关于 x 的方程 $x^2 - \sqrt{2}x + \sin\alpha = 0$ 有两个相等的实数根, 则锐角 α 的度数为 $\underline{\quad}$.

解析: $\because x$ 的方程 $x^2 - \sqrt{2}x + \sin\alpha = 0$ 有两个相等的实数根,

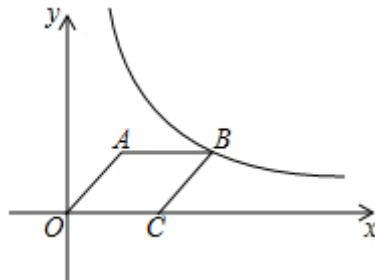
$\therefore \Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times \sin\alpha = 0$,

解得: $\sin\alpha = \frac{1}{2}$,

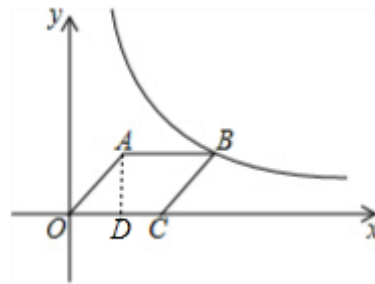
\therefore 锐角 α 的度数为 30° .

答案: 30°

13. 如图，菱形 AOCB 的顶点 A 坐标为 (3, 4)，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 B，则 k 的值为_____.

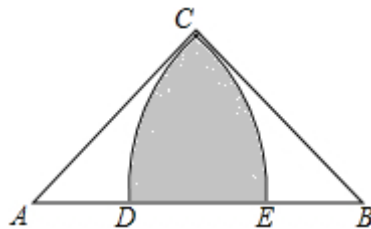


解析：过 A 点作 $AD \perp x$ 轴，垂足为 D，



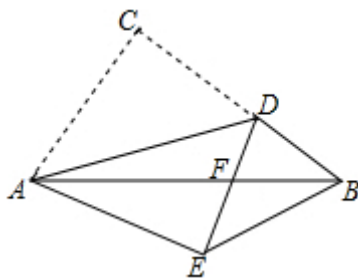
\because 点 A 的坐标为 (3, 4),
 $\therefore OD=3, AD=4,$
 $\therefore OA = \sqrt{OD^2 + AD^2} = 5,$
 $\therefore OA=AB=5,$
 \therefore 点 B 坐标为 (8, 4),
 \because 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过顶点 B,
 $\therefore k=32.$
 答案：32

14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=2$ ，以点 A 为圆心，AC 的长为半径作 CE 交 AB 于点 E，以点 B 为圆心，BC 的长为半径作 CD 交 AB 于点 D，则阴影部分的面积为_____.



解析： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC=2$ ，
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2,$
 $S_{\text{扇形}BCD} = \frac{45\pi \cdot 2^2}{360} = \frac{1}{2}\pi,$
 $S_{\text{空白}} = 2 \times (2 - \frac{1}{2}\pi) = 4 - \pi,$
 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{空白}} = 2 - 4 + \pi = \pi - 2.$
 答案： $\pi - 2$

15. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $AC=3$ ，点 D 是 BC 上一动点，连接 AD ，将 $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠，点 C 落在点 E 处，连接 DE 交 AB 于点 F ，当 $\triangle DEB$ 是直角三角形时， DF 的长为_____.



解析：如图 1 所示；点 E 与点 F 重合时.

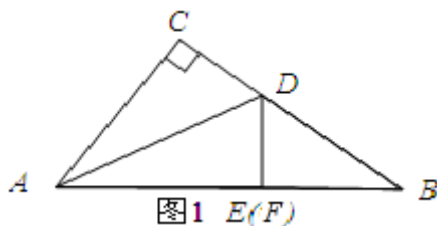


图 1 $E(F)$

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

由翻折的性质可知； $AE=AC=3$ 、 $DC=DE$. 则 $EB=2$.

设 $DC=ED=x$ ，则 $BD=4-x$.

在 $Rt\triangle DBE$ 中， $DE^2+BE^2=DB^2$ ，即 $x^2+2^2=(4-x)^2$.

解得： $x=\frac{3}{2}$.

$\therefore DE=\frac{3}{2}$.

如图 2 所示： $\angle EDB=90^\circ$ 时.

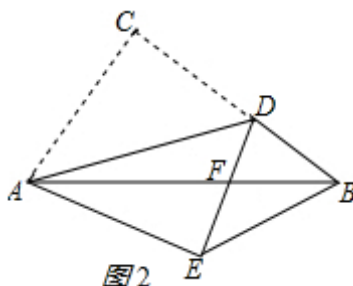


图 2

由翻折的性质可知： $AC=AE$ ， $\angle C=\angle AED=90^\circ$.

$\therefore \angle C=\angle AED=\angle CDE=90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $ACDE$ 为矩形.

又 $\because AC=AE$ ，

\therefore 四边形 ACE' 为正方形.

$\therefore CD=AC=3$.

$\therefore DB=BC - DC=4 - 3=1$.

$\therefore DF \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle BDF \sim \triangle BCA$.

$\therefore \frac{DF}{AC} = \frac{DB}{CB} = \frac{1}{4}$ ，即 $\frac{DF}{3} = \frac{1}{4}$.

解得： $DF=\frac{3}{4}$.

点 D 在 CB 上运动，假设 $\angle DBC' = 90^\circ$ ，则点 A 到 BE 的距离为 BC 的长，而 $AE=AC < BC$ ，

故 $\angle DBC'$ 不可能为直角.

答案: $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{4}$

三、解答题: (本大题共 8 个小题, 满分 75 分)

16. 化简 $\frac{a}{a^2-4} \div \frac{a^2-3a}{a+2} - \frac{1}{2-a}$, 并求值, 其中 a 与 2, 3 构成 $\triangle ABC$ 的三边, 且 a 为整数.

解析: 原式利用除法法则变形, 约分后两项通分并利用同分母分式的加法法则计算得到最简结果, 求出 a 的值, 代入计算即可求出值.

答案: 原式=

$$\frac{a}{(a+2)(a-2)} \cdot \frac{a+2}{a(a-3)} + \frac{1}{a-2} = \frac{1}{(a-2)(a-3)} + \frac{a-3}{(a-2)(a-3)} = \frac{a-2}{(a-2)(a-3)} = \frac{1}{a-3}$$

,

$\because a$ 与 2, 3 构成 $\triangle ABC$ 的三边,

$\therefore 1 < a < 5$, 且 a 为整数, $\therefore a=2, 3, 4$,

又 $\because a \neq 2$ 且 $a \neq 3$, $\therefore a=4$,

当 $a=4$ 时, 原式=1.

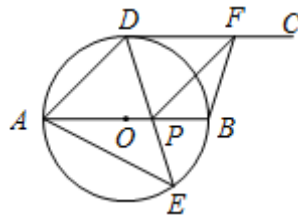
17. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 D, E 是位于 AB 两侧的半圆 AB 上的动点, 射线 DC 切 $\odot O$ 于点 D . 连接 DE, AE, DE 与 AB 交于点 P, F 是射线 DC 上一动点, 连接 FP, FB , 且 $\angle AED=45^\circ$.

(1) 求证: $CD \parallel AB$;

(2) 填空:

①若 $DF=AP$, 当 $\angle DAE=$ _____ 时, 四边形 $ADFP$ 是菱形;

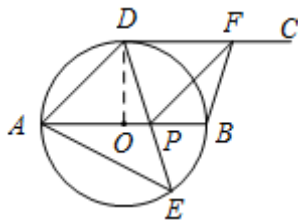
②若 $BF \perp DF$, 当 $\angle DAE=$ _____ 时, 四边形 $BDFP$ 是正方形.



解析: (1) 要证明 $CD \parallel AB$, 只要证明 $\angle ODF = \angle AOD$ 即可, 根据题目中的条件可以证明 $\angle ODF = \angle AOD$, 从而可以解答本题;

(2) ①根据四边形 $ADFP$ 是菱形和菱形的性质, 可以求得 $\angle DAE$ 的度数; ②根据四边形 $BDFP$ 是正方形, 可以求得 $\angle DAE$ 的度数.

答案: (1) 如图, OD 连接,



\because 射线 DC 切 $\odot O$ 于点 D ,

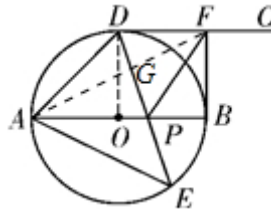
$\therefore OD \perp CD$,

$\because \angle AED = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOD = 2\angle AED = 90^\circ$, 即 $\angle ODF = \angle AOD$,

$\therefore CD \parallel AB$.

(2) ①连接 AF 与 DP 交于点 G , 如图所示,

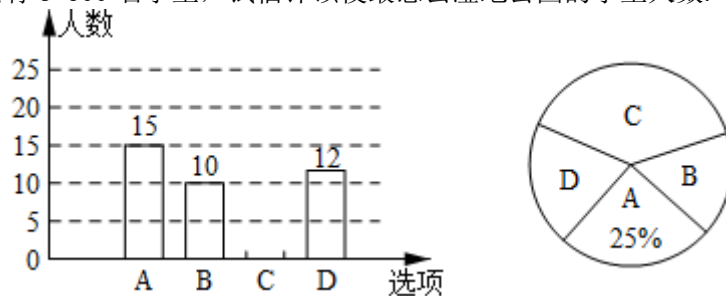


∵ 四边形 ADFP 是菱形, $\angle AED=45^\circ$, $OA=OD$,
 $\therefore AF \perp DP$, $\angle AOD=90^\circ$, $\angle DAG=\angle PAG$,
 $\therefore \angle AGE=90^\circ$, $\angle DAO=45^\circ$,
 $\therefore \angle EAG=45^\circ$, $\angle DAG=\angle PEG=22.5^\circ$,
 $\therefore \angle EAD=\angle DAG+\angle EAG=22.5^\circ+45^\circ=67.5^\circ$,
 答案: 67.5°

② ∵ 四边形 BDFP 是正方形,
 $\therefore BF=FD=DP=PB$,
 $\angle DPB=\angle PBF=\angle BFD=\angle FDP=90^\circ$,
 \therefore 此时点 P 与点 O 重合,
 \therefore 此时 DE 是直径,
 $\therefore \angle EAD=90^\circ$.
 答案: 90°

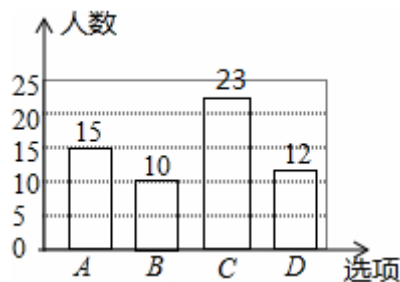
18. 为了丰富同学们的课余生活, 某学校将举行“亲近大自然”户外活动. 现随机抽取了部分学生进行主题为“你最想去的景点是”的问卷调查, 要求学生只能从“A(绿博园), B(人民公园), C(湿地公园), D(森林公园)”四个景点中选择一项, 根据调查结果, 绘制了如下两幅不完整的统计图.

- (1) 本次共调查了多少名学生?
- (2) 补全条形统计图;
- (3) 若该学校共有 3 600 名学生, 试估计该校最想去湿地公园的学生人数.



解析: (1) 由 A 的人数及其人数占被调查人数的百分比可得;
 (2) 根据各项目人数之和等于总数可得 C 选项的人数;
 (3) 用样本中最想去湿地公园的学生人数占被调查人数的比例乘总人数即可.

答案: (1) 本次调查的样本容量是 $15 \div 25\% = 60$;
 (2) 选择 C 的人数为: $60 - 15 - 10 - 12 = 23$ (人),
 补全条形图如图:



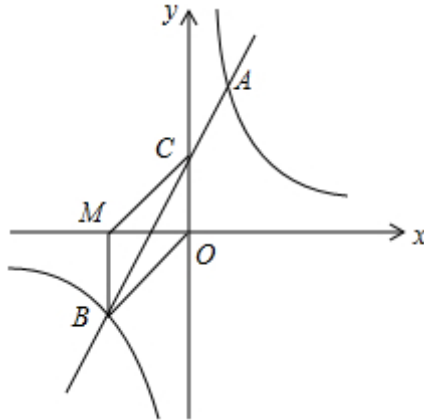
(3) $\frac{23}{60} \times 3600 = 1380$ (人).

答：估计该校最想去湿地公园的学生人数约有 1380 人.

19. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y=mx+n$ ($m \neq 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于第一、三象限内的 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，过点 B 作 $BM \perp x$ 轴，垂足为 M， $BM=OM$ ， $OB=2\sqrt{2}$ ，点 A 的纵坐标为 4.

(1) 求该反比例函数和一次函数的解析式；

(2) 连接 MC，求四边形 MBOC 的面积.



解析：(1) 根据题意可以求得点 B 的坐标，从而可以求得反比例函数的解析式，进而求得点 A 的坐标，从而可以求得一次函数的解析式；

(2) 根据 (1) 中的函数解析式可以求得点 C，点 M、点 B、点 O 的坐标，从而可以求得四边形 MBOC 的面积.

答案：(1) 由题意可得，

$$BM=OM, OB=2\sqrt{2},$$

$$\therefore BM=OM=2,$$

$$\therefore \text{点 B 的坐标为 } (-2, -2),$$

设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$,

$$\text{则 } -2 = \frac{k}{-2}, \text{ 得 } k=4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{4}{x},$$

$$\therefore \text{点 A 的纵坐标是 4,}$$

$$\therefore 4 = \frac{4}{x}, \text{ 得 } x=1,$$

$$\therefore \text{点 A 的坐标为 } (1, 4),$$

$$\therefore \text{一次函数 } y=mx+n \text{ (} m \neq 0 \text{) 的图象过点 A(1, 4)、点 B(-2, -2),}$$

$$\therefore \begin{cases} m+n=4 \\ -2m+n=-2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} m=2 \\ n=2 \end{cases},$$

即一次函数的解析式为 $y=2x+2$;

$$(2) \therefore y=2x+2 \text{ 与 y 轴交与点 C,}$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标为 } (0, 2),$$

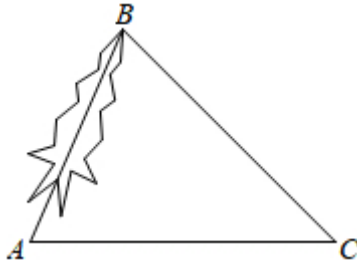
$$\therefore \text{点 B(-2, -2), 点 M(-2, 0), 点 O(0, 0),}$$

$$\therefore OM=2, OC=2, MB=2,$$

$$\therefore \text{四边形 MBOC 的面积是: } \frac{OM \cdot OC}{2} + \frac{OM \cdot MB}{2} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 4.$$

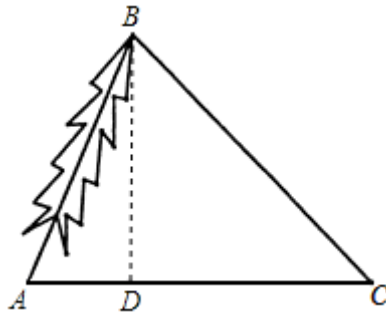
20. 为了对一棵倾斜的古杉树 AB 进行保护，需测量其长度，如图，在地面上选取一点 C，测

得 $\angle ACB=45^\circ$, $AC=24\text{m}$, $\angle BAC=66.5^\circ$, 求这棵古杉树 AB 的长度. (结果精确到 0.1m . 参考数据: $\sin 66.5^\circ \approx 0.92$, $\cos 66.5^\circ \approx 0.40$, $\tan 66.5^\circ \approx 2.30$)



解析: 过 B 点作 $BD \perp AC$ 于 D . 分别在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 和 $\text{Rt}\triangle CDB$ 中, 用 BD 表示出 AD 和 CD , 再根据 $AC=AD+CD=24\text{m}$, 列出方程求解即可.

答案: 如图, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D .



$\because \angle ACB=45^\circ$,

$\therefore BD=DC$.

设 $AB=x\text{m}$.

\because 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD=AB \cos 66.5^\circ \approx 0.4x$,

$\frac{24}{1.32} \cdot BD = AB \sin 66.5^\circ \approx 0.92x$,

$\therefore DC \approx 0.92x$,

$\therefore 0.4x + 0.92x = 24$, 解得 $x \approx 18.2$,

答: 这棵古杉树 AB 的长度约为 18.2m .

21. 某商店欲购进一批跳绳, 若同时购进 A 种跳绳 10 根和 B 种跳绳 7 根, 则共需 395 元, 若同时购进 A 种跳绳 5 根和 B 种跳绳 3 根, 共需 185 元.

(1) 求 A 、 B 两种跳绳的单价各是多少?

(2) 若该商店准备同时购进这两种跳绳共 100 根, 且 A 种跳绳的数量不少于跳绳总数的 $\frac{2}{5}$.

若每根 A 种跳绳的售价为 26 元, 每根 B 种跳绳的价为 30 元, 问: 该商店应如何进货才可获取最大利润, 并求出最大利润.

解析: (1) 设 A 种跳绳的单价为 x 元, B 种跳绳的单价为 y 元. 构建方程组即可解决问题;

(2) 根据一次函数, 利用一次函数的性质即可解决问题;

答案: (1) 设 A 种跳绳的单价为 x 元, B 种跳绳的单价为 y 元.

根据题意, 得
$$\begin{cases} 10x + 7y = 395 \\ 5x + 3y = 185 \end{cases}$$

解之, 得
$$\begin{cases} x = 22 \\ y = 25 \end{cases}$$

答: A 种跳绳的单价为 22 元, B 种跳绳的单价为 25 元.

(2) 设购进 A 种跳绳 a 根, 则 B 种跳绳 $(100 - a)$ 根, 该商店的利润为 w 元

则 $w = (26 - 22)a + (30 - 25)(100 - a) = -a + 500$,

$\because -1 < 0$, $\therefore a$ 取最小值时, w 取最大值,

又 $\because a \geq 40$, 且 a 为整数,
 \therefore 当 $a=40$ 时, $w_{\text{最大}} = -40 + 500 = 460$ (元),
 此时, $100 - 40 = 60$,
 所以该商店购进 A 种跳绳 40 根, B 种跳绳 60 根时,
 可获得最大利润, 最大利润为 460 元.

22. 【问题发现】

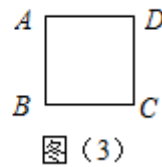
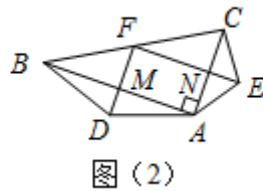
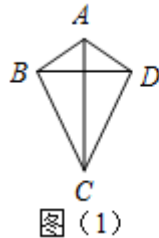
(1) 如图(1)四边形 ABCD 中, 若 $AB=AD$, $CB=CD$, 则线段 BD, AC 的位置关系为_____;

【拓展探究】

(2) 如图(2)在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 F 为斜边 BC 的中点, 分别以 AB, AC 为底边, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 外部作等腰三角形 ABD 和等腰三角形 ACE, 连接 FD, FE, 分别交 AB, AC 于点 M, N. 试猜想四边形 FMAN 的形状, 并说明理由;

【解决问题】

(3) 如图(3)在正方形 ABCD 中, $AB=2\sqrt{2}$, 以点 A 为旋转中心将正方形 ABCD 旋转 60° , 得到正方形 $AB'C'D'$, 请直接写出 BD' 平方的值.



解析: (1) 依据点 A 在线段 BD 的垂直平分线上, 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上, 即可得出 AC 垂直平分 BD;

(2) 根据 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 F 为斜边 BC 的中点, 可得 $AF=CF=BF$, 再根据等腰三角形 ABD 和等腰三角形 ACE, 即可得到 $AD=DB$, $AE=CE$, 进而得出 $\angle AMF = \angle MAN = \angle ANF = 90^\circ$, 即可判定四边形 AMFN 是矩形;

(3) 分两种情况: ①以点 A 为旋转中心将正方形 ABCD 逆时针旋转 60° , ②以点 A 为旋转中心将正方形 ABCD 顺时针旋转 60° , 分别依据旋转的性质以及勾股定理, 即可得到结论.

答案: (1) $\because AB=AD$, $CB=CD$,

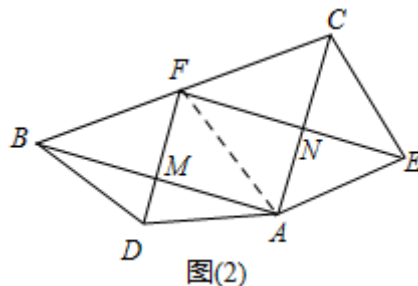
\therefore 点 A 在线段 BD 的垂直平分线上, 点 C 在线段 BD 的垂直平分线上,

\therefore AC 垂直平分 BD,

故答案为: AC 垂直平分 BD;

(2) 四边形 FMAN 是矩形. 理由:

如图 2, 连接 AF,



\because $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 点 F 为斜边 BC 的中点,

$\therefore AF=CF=BF$,

又 \because 等腰三角形 ABD 和等腰三角形 ACE,

$\therefore AD=DB$, $AE=CE$,

\therefore 由(1)可得, $DF \perp AB$, $EF \perp AC$,

又 $\because \angle BAC=90^\circ$,

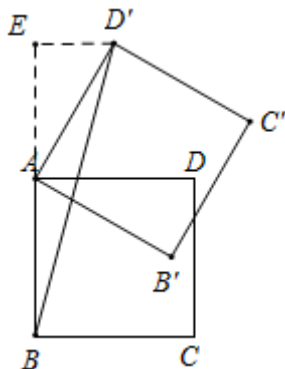
$\therefore \angle AMF = \angle MAN = \angle ANF = 90^\circ$,

\therefore 四边形 AMFN 是矩形;

(3) BD' 的平方为 $16+8\sqrt{3}$ 或 $16-8\sqrt{3}$.

分两种情况:

①以点 A 为旋转中心将正方形 ABCD 逆时针旋转 60° ,



如图所示: 过 D' 作 $D'E \perp AB$, 交 BA 的延长线于 E,

由旋转可得, $\angle DAD' = 60^\circ$,

$\therefore \angle EAD' = 30^\circ$,

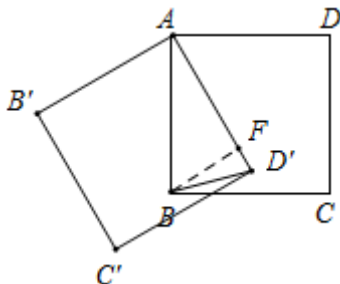
$\therefore AB = 2\sqrt{2} = AD'$,

$\therefore D'E = \frac{1}{2}AD' = \sqrt{2}$, $AE = \sqrt{6}$,

$\therefore BE = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$,

\therefore Rt $\triangle BD'E$ 中, $BD'^2 = D'E^2 + BE^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = 16 + 8\sqrt{3}$

②以点 A 为旋转中心将正方形 ABCD 顺时针旋转 60° ,



如图所示: 过 B 作 $BF \perp AD'$ 于 F,

旋转可得, $\angle DAD' = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAD' = 30^\circ$,

$\therefore AB = 2\sqrt{2} = AD'$,

$\therefore BF = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$, $AF = \sqrt{6}$,

$\therefore D'F = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$,

\therefore Rt $\triangle BD'F$ 中, $BD'^2 = BF^2 + D'F^2 = (\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{6})^2 = 16 - 8\sqrt{3}$

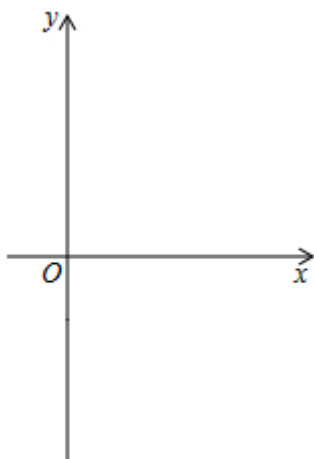
综上所述, BD' 的长度为 $16 + 8\sqrt{3}$ 或 $16 - 8\sqrt{3}$.

23. 在平面直角坐标系 xOy 中(如图), 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 线经过点 $A(2, 2)$, 对称轴是直线 $x=1$, 顶点为 B.

(1) 求这条抛物线的解析式和点 B 的坐标;

(2) 点 M 在对称轴上, 且位于顶点上方, 设它的纵坐标为 m, 连接 AM, 用含 m 的代数式表示 $\angle AMB$ 的正切值;

(3) 将该抛物线向上或向下平移, 使得新抛物线的顶点 C 在 x 轴上. 原抛物线上一点 P 平移后的对应点为 Q, 如果 $OP=OQ$, 求点 Q 的坐标.



解析：(1) 依据抛物线的对称轴方程可求得 b 的值，然后将点 A 的坐标代入 $y = -x^2 + 2x + c$ 可求得 c 的值；

(2) 过点 A 作 $AC \perp BM$ ，垂足为 C ，从而可得到 $AC=1$ ， $MC=m-2$ ，最后利用锐角三角函数的定义求解即可；

(3) 由平移后抛物线的顶点在 x 轴上可求得平移的方向和距离，故此 $QP=3$ ，然后由点 $QO=PO$ ， $QP \parallel y$ 轴可得到点 Q 和 P 关于 x 对称，可求得点 Q 的纵坐标，将点 Q 的纵坐标代入平移后的解析式可求得对应的 x 的值，则可得到点 Q 的坐标。

答案：(1) \because 抛物线的对称轴为 $x=1$ ，

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 即 } \frac{-b}{2 \times (-1)} = 1, \text{ 解得 } b=2.$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + c.$$

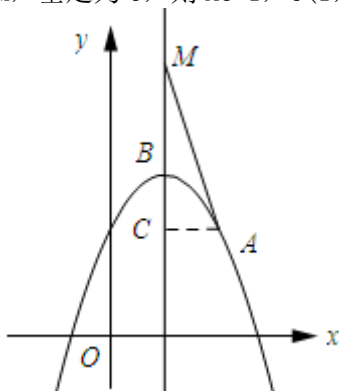
将 $A(2, 2)$ 代入得： $-4 + 4 + c = 2$ ，解得： $c=2$ 。

\therefore 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 2$ 。

配方得： $y = -(x-1)^2 + 3$ 。

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $(1, 3)$ 。

(2) 如图所示：过点 A 作 $AC \perp BM$ ，垂足为 C ，则 $AC=1$ ， $C(1, 2)$ 。



$$\therefore M(1, m), C(1, 2),$$

$$\therefore MC = m - 2.$$

$$\therefore \tan \angle AMB = \frac{AC}{CM} = \frac{1}{m-2}.$$

(3) \because 抛物线的顶点坐标为 $(1, 3)$ ，平移后抛物线的顶点坐标在 x 轴上，

\therefore 抛物线向下平移了 3 个单位。

\therefore 平移后抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x - 1$ ， $PQ=3$ 。

$\because OP=OQ$ ，

\therefore 点 O 在 PQ 的垂直平分线上。

又 $\because QP \parallel y$ 轴，

\therefore 点 Q 与点 P 关于 x 轴对称。

∴点 Q 的纵坐标为 $-\frac{3}{2}$.

将 $y = -\frac{3}{2}$ 代入 $y = -x^2 + 2x - 1$ 得: $-x^2 + 2x - 1 = -\frac{3}{2}$, 解得: $x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$ 或 $x = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$.

∴点 Q 的坐标为 $(\frac{2 + \sqrt{6}}{2}, -\frac{3}{2})$ 或 $(\frac{2 - \sqrt{6}}{2}, -\frac{3}{2})$.