

2018 年湖南省娄底市中考试卷数学

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分, 每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的, 请把你认为符合题目要求的选项填涂在答题卡上相应题号下的方框里)

1. 2018 的相反数是()

- A. $\frac{1}{2018}$
- B. 2018
- C. -2018
- D. $-\frac{1}{2018}$

解析: 2018 的相反数是: -2018.

答案: C

2. 一组数据-3, 2, 2, 0, 2, 1 的众数是()

- A. -3
- B. 2
- C. 0
- D. 1

解析: 这组数据中 2 出现次数最多, 有 3 次, 所以众数为 2.

答案: B

3. 随着我国综合国力的提升, 中华文化影响日益增强, 学中文的外国人越来越多, 中文已成为美国居民的第二外语, 美国常讲中文的人口约有 210 万, 请将“210 万”用科学记数法表示为()

- A. 0.21×10^7
- B. 2.1×10^6
- C. 21×10^5
- D. 2.1×10^7

解析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

210 万 = 2.1×10^6 .

答案: B

4. 下列运算正确的是()

- A. $a^2 \cdot a^5 = a^{10}$
- B. $(3a^3)^2 = 6a^6$
- C. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- D. $(a+2)(a-3) = a^2 - a - 6$

解析：A、原式= a^7 ，不符合题意；

B、原式= $9a^6$ ，不符合题意；

C、原式= $a^2+2ab+b^2$ ，不符合题意；

D、原式= a^2-a-6 ，符合题意.

答案：D

5. 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+3)x+k=0$ 的根的情况是()

A. 有两不相等实数根

B. 有两相等实数根

C. 无实数根

D. 不能确定

解析： $\Delta=(k+3)^2-4\times k=k^2+2k+9=(k+1)^2+8$,

$\because (k+1)^2\geq 0, \therefore (k+1)^2+8>0$, 即 $\Delta>0$, 所以方程有两个不相等的实数根.

答案：A

6. 不等式组 $\begin{cases} 2-x\geq x-2, \\ 3x-1>-4 \end{cases}$ 的最小整数解是()

A. -1

B. 0

C. 1

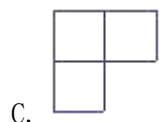
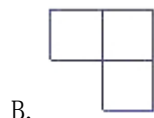
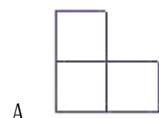
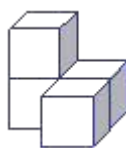
D. 2

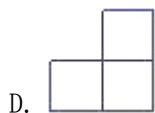
解析：解不等式 $2-x\geq x-2$, 得： $x\leq 2$,

解不等式 $3x-1>-4$, 得： $x>-1$, 则不等式组的解集为 $-1<x\leq 2$, 所以不等式组的最小整数解为 0.

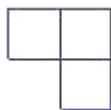
答案：B

7. 如图所示立体图形的俯视图是()





解析：从上边看立体图形得到俯视图即可得立体图形的俯视图如下.



答案：B

8. 函数 $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是()

- A. $x > 2$
- B. $x \geq 2$
- C. $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$
- D. $x \neq 3$

解析：根据题意得：
$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x-3 \neq 0, \end{cases}$$
 解得： $x \geq 2$ 且 $x \neq 3$.

答案：C

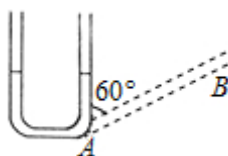
9. 将直线 $y=2x-3$ 向右平移 2 个单位,再向上平移 3 个单位后,所得的直线的表达式为()

- A. $y=2x-4$
- B. $y=2x+4$
- C. $y=2x+2$
- D. $y=2x-2$

解析：根据平移的性质“左加右减，上加下减”，即可找出平移后的直线解析式. $y=2(x-2)-3+3=2x-4$ ，化简，得 $y=2x-4$.

答案：A

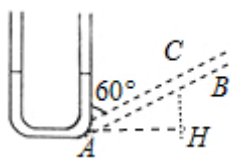
10. 如图，往竖直放置的在 A 处由短软管连接的粗细均匀细管组成的“U”形装置中注入一定量的水，水面高度为 6cm，现将右边细管绕 A 处顺时针方向旋转 60° 到 AB 位置，则 AB 中水柱的长度约为()



- A. 4cm
- B. $6\sqrt{3}$ cm
- C. 8cm
- D. 12cm

解析：AB 中水柱的长度为 AC，CH 为此时水柱的高，设 $CH=x$ ，竖直放置时短软管的底面积为

S,



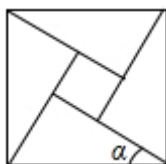
$\because \angle BAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\therefore AC = 2CH = x$,

\therefore 细管绕 A 处顺时针方向旋转 60° 到 AB 位置时, 底面积为 $2S$,

$\therefore x \cdot S + x \cdot 2S = 6 \cdot S + 6 \cdot S$, 解得 $x = 4$, $\therefore AC = 2x = 8$, 即 AB 中水柱的长度约为 8cm.

答案: C

11. 如图, 由四个全等的直角三角形围成的大正方形的面积是 169, 小正方形的面积为 49, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ ()



A. $\frac{5}{13}$

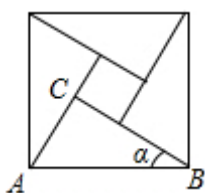
B. $-\frac{5}{13}$

C. $\frac{7}{13}$

D. $-\frac{7}{13}$

解析: \because 小正方形面积为 49, 大正方形面积为 169,

\therefore 小正方形的边长是 7, 大正方形的边长是 13,



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 即 $AC^2 + (7 + AC)^2 = 13^2$,

整理得, $AC^2 + 7AC - 60 = 0$, 解得 $AC = 5$, $AC = -12$ (舍去), $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12$,

$$\therefore \sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}, \cos \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}, \therefore \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{5}{13} - \frac{12}{13} = -\frac{7}{13}.$$

答案: D

12. 已知: $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例: $[3.9] = 3$, $[-1.8] = -2$. 令关于 k 的函数 $f(k) =$

$$\left[\frac{k+1}{4} \right] - \left[\frac{k}{4} \right] \quad (k \text{ 是正整数}). \text{ 例: } f(3) = \left[\frac{3+1}{4} \right] - \left[\frac{3}{4} \right] = 1. \text{ 则下列结论错误的是 ()}$$

- A. $f(1)=0$
- B. $f(k+4)=f(k)$
- C. $f(k+1) \geq f(k)$
- D. $f(k)=0$ 或 1

解析: $f(1) = \left[\frac{1+1}{4} \right] - \left[\frac{1}{4} \right] = 0 - 0 = 0$, 故选项 A 正确;

$f(k+4) = \left[\frac{k+4+1}{4} \right] - \left[\frac{k+4}{4} \right] = \left[\frac{k+1}{4} + 1 \right] - \left[\frac{k}{4} + 1 \right] = \left[\frac{k+1}{4} \right] - \left[\frac{k}{4} \right] = f(k)$, 故选项 B 正确;

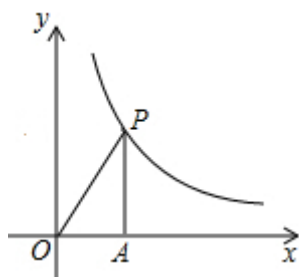
C、当 $k=3$ 时, $f(3+1) = \left[\frac{4+1}{4} \right] - \left[\frac{4}{4} \right] = 1 - 1 = 0$, 而 $f(3) = 1$, 故选项 C 错误;

D、当 $k=3+4n$ (n 为自然数) 时, $f(k)=1$, 当 k 为其它的正整数时, $f(k)=0$, 所以 D 选项的结论正确.

答案: C

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分).

13. 如图, 在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, 点 P 是反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 图象上的一点, $PA \perp x$ 轴于点 A , 则 $\triangle POA$ 的面积为_____.

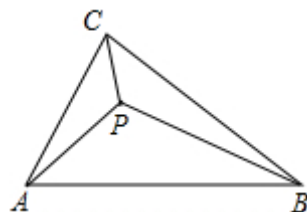


解析: \because 点 P 是反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 图象上的一点, $PA \perp x$ 轴于点 A ,

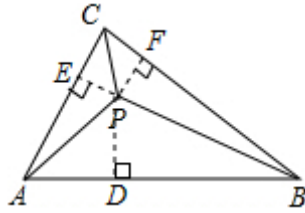
$\therefore \triangle POA$ 的面积为: $\frac{1}{2} AO \cdot PA = \frac{1}{2} xy = 1$.

答案: 1

14. 如图, P 是 $\triangle ABC$ 的内心, 连接 PA 、 PB 、 PC , $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 . 则 S_1 _____ $S_2 + S_3$. (填 “ $<$ ” 或 “ $=$ ” 或 “ $>$ ”)



解析: 过 P 点作 $PD \perp AB$ 于 D , 作 $PE \perp AC$ 于 E , 作 $PF \perp BC$ 于 F ,



∵P 是△ABC 的内心，∴PD=PE=PF，

$$\because S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot PD, S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot PF, S_3 = \frac{1}{2} AC \cdot PE, AB < BC + AC, \therefore S_1 < S_2 + S_3.$$

答案：<

15. 从 2018 年高中一年级学生开始，湖南省全面启动高考综合改革，学生学习完必修课程后，可以根据高校相关专业的选课要求和自身兴趣、志向、优势，从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物 6 个科目中，自主选择 3 个科目参加等级考试. 学生 A 已选物理，还从思想政治、历史、地理 3 个文科科目中选 1 科，再从化学、生物 2 个理科科目中选 1 科. 若他选思想政治、历史、地理的可能性相等，选化学、生物的可能性相等，则选修地理和生物的概率为_____.

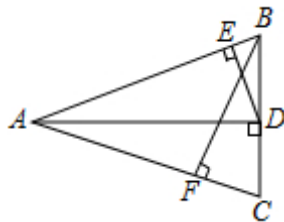
解析：画树状图如下：



由树状图可知，共有 6 种等可能结果，其中选修地理和生物的只有 1 种结果，所以选修地理和生物的概率为 $\frac{1}{6}$.

答案： $\frac{1}{6}$

16. 如图，△ABC 中，AB=AC，AD⊥BC 于 D 点，DE⊥AB 于点 E，BF⊥AC 于点 F，DE=3cm，则 BF=_____cm.



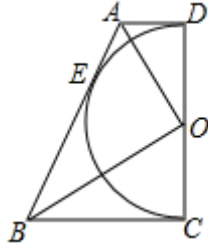
解析：在 Rt△ADB 与 Rt△ADC 中， $\begin{cases} AB = AC, \\ AD = AD, \end{cases} \therefore \text{Rt}\triangle ADB \cong \text{Rt}\triangle ADC,$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \times \frac{1}{2} AB \cdot DE = AB \cdot DE = 3AB,$$

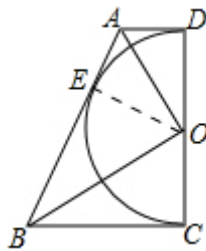
$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BF, \therefore \frac{1}{2} AC \cdot BF = 3AB, \because AC = AB, \therefore \frac{1}{2} BF = 3, \therefore BF = 6.$$

答案：6.

17. 如图，已知半圆 O 与四边形 $ABCD$ 的边 AD 、 AB 、 BC 都相切，切点分别为 D 、 E 、 C ，半径 $OC=1$ ，则 $AE \cdot BE=$ _____.



解析：如图连接 OE 。



∵ 半圆 O 与四边形 $ABCD$ 的边 AD 、 AB 、 BC 都相切，切点分别为 D 、 E 、 C ，
 ∴ $OE \perp AB$ ， $AD \perp CD$ ， $BC \perp CD$ ， $\angle OAD = \angle OAE$ ， $\angle OBC = \angle OBE$ ， $\therefore AD \parallel BC$ ，
 ∴ $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$ ， $\therefore \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$ ， $\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，
 ∴ $\angle OAE + \angle AOE = 90^\circ$ ， $\angle AOE + \angle BOE = 90^\circ$ ， $\therefore \angle EAO = \angle EOB$ ，
 ∴ $\angle AEO = \angle OEB = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle AEO \sim \triangle OEB$ ， $\therefore \frac{AE}{OE} = \frac{OE}{BE}$ ， $\therefore AE \cdot BE = OE^2 = 1$.

答案：1

18. 设 a_1, a_2, a_3, \dots 是一列正整数，其中 a_1 表示第一个数， a_2 表示第二个数，依此类推， a_n 表示第 n 个数 (n 是正整数). 已知 $a_1=1$ ， $4a_n=(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2$ ，则 $a_{2018}=$ _____.

解析：∵ $4a_n=(a_{n+1}-1)^2-(a_n-1)^2$ ， $\therefore (a_{n+1}-1)^2=(a_n-1)^2+4a_n=(a_n+1)^2$ ，
 ∴ a_1, a_2, a_3, \dots 是一列正整数， $\therefore a_{n+1}-1=a_n+1$ ， $\therefore a_{n+1}=a_n+2$ ，
 ∴ $a_1=1$ ， $\therefore a_2=3$ ， $a_3=5$ ， $a_4=7$ ， $a_5=9$ ， \dots ， $\therefore a_n=2n-1$ ， $\therefore a_{2018}=4035$.

答案：4035.

三、解答题(本大题共 2 小题，每小题 6 分，共 12 分)

19. 计算： $(\pi - 3.14)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left|-\frac{1}{2}\right| + 4\cos 30^\circ$.

解析：根据零指数幂、负整数指数幂、绝对值和特殊角的三角函数值可以解答本题.

答案： $(\pi - 3.14)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left|-\frac{1}{2}\right| + 4\cos 30^\circ$

$$= 1 + 9 - 2\sqrt{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 9 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 10.$$

20. 先化简，再求值： $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1}\right) \div \frac{x}{x^2+2x+1}$ ，其中 $x = \sqrt{2}$ 。

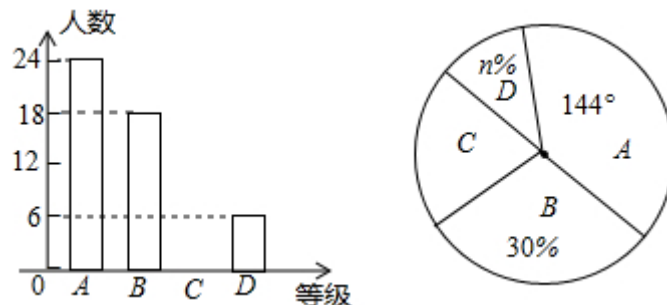
解析：原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值。

答案：原式 = $\frac{x-1+1}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x} = \frac{x+1}{x-1}$ ，

当 $x = \sqrt{2}$ 时，原式 = $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3 + 2\sqrt{2}$ 。

四、解答题(本大题共 2 小题，每小题 8 分，共 16 分)

21. 为了取得扶贫工作的胜利，某市对扶贫工作人员进行了扶贫知识的培训与测试，随机抽取了部分人员的测试成绩作为样本，并将成绩划分为 A、B、C、D 四个不同的等级，绘制成不完整统计图如图，请根据图中的信息，解答下列问题：



(1) 求样本容量；

(2) 补全条形图，并填空： $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 若全市有 5000 人参加了本次测试，估计本次测试成绩为 A 级的人数为多少？

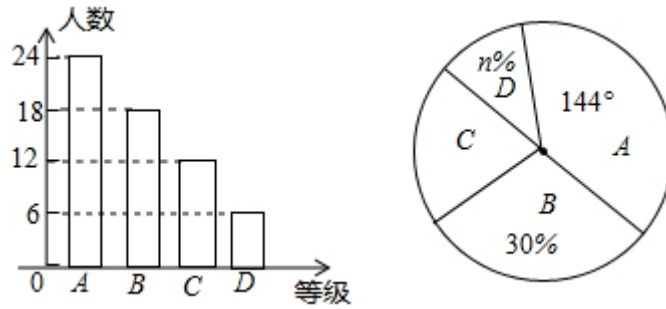
解析：(1) 用 B 等级人数除以其所占百分比可得；

(2) 总人数减去 A、B、D 人数求得 C 的人数即可补全条形图，用 D 等级人数除以总人数可得 n 的值；

(3) 总人数乘以样本中 A 等级人数所占比例即可得。

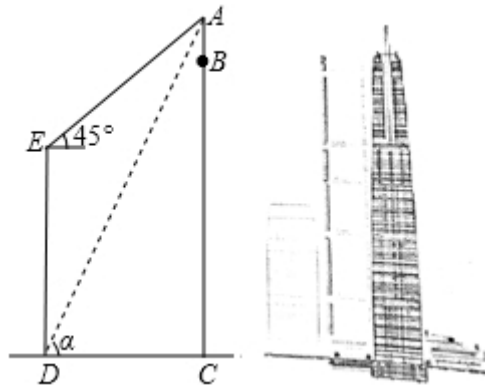
答案：(1) 样本容量为 $18 \div 30\% = 60$ ；

(2) C 等级人数为 $60 - (24 + 18 + 6) = 12$ 人， $n\% = \frac{6}{60} \times 100\% = 10\%$ ，补全图形如下：



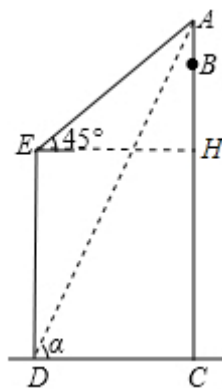
(3) 估计本次测试成绩为 A 级的人数为 $5000 \times \frac{24}{60} = 2000$ 人.

22. 如图, 长沙九龙仓国际金融中心主楼 BC 高达 452m, 是目前湖南省第一高楼, 和它处于同一水平面上的第二高楼 DE 高 340m, 为了测量高楼 BC 上发射塔 AB 的高度, 在楼 DE 底端 D 点测得 A 的仰角为 α , $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, 在顶端 E 点测得 A 的仰角为 45° , 求发射塔 AB 的高度.



解析: 作 $EH \perp AC$ 于 H, 设 $AC=24x$, 根据正弦的定义求出 AD, 根据勾股定理求出 CD, 根据题意列出方程求出 x, 结合图形计算即可.

答案: 作 $EH \perp AC$ 于 H, 则四边形 EDCH 为矩形, $\therefore EH=CD$,



设 $AC=24x$, 在 $Rt\triangle ADC$ 中, $\sin \alpha = \frac{24}{25}$, $\therefore AD=25x$,

由勾股定理得, $CD = \sqrt{AD^2 - AC^2} = 7x$, $\therefore EH=7x$,

在 $Rt\triangle AEH$ 中, $\angle AEH=45^\circ$, $\therefore AH=EH=7x$,

由题意得, $24x=7x+340$, 解得, $x=20$, 则 $AC=24x=480$, $\therefore AB=AC-BC=480-452=28$,

答：发射塔 AB 的高度为 28m.

五、解答题(本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分)

23. “绿水青山，就是金山银山”. 某旅游景区为了保护环境，需购买 A、B 两种型号的垃圾处理设备共 10 台. 已知每台 A 型设备日处理能力为 12 吨；每台 B 型设备日处理能力为 15 吨；购回的设备日处理能力不低于 140 吨.

(1) 请你为该景区设计购买 A、B 两种设备的方案；

(2) 已知每台 A 型设备价格为 3 万元，每台 B 型设备价格为 4.4 万元. 厂家为了促销产品，规定货款不低于 40 万元时，则按 9 折优惠；问：采用(1)设计的哪种方案，使购买费用最少，为什么？

解析：(1) 设购买 A 种设备 x 台，则购买 B 种设备 $(10-x)$ 台，根据购回的设备日处理能力不低于 140 吨列出不等式 $12x+15(10-x) \geq 140$ ，求出解集，再根据 x 为正整数，得出 $x=1, 2, 3$. 进而求解即可；

(2) 分别求出各方案实际购买费用，比较即可求解.

答案：(1) 设购买 A 种设备 x 台，则购买 B 种设备 $(10-x)$ 台，

根据题意，得 $12x+15(10-x) \geq 140$ ，解得 $x \leq 3\frac{1}{3}$ ，

$\because x$ 为正整数， $\therefore x=1, 2, 3$. \therefore 该景区有三种设计方案：

方案一：购买 A 种设备 1 台，B 种设备 9 台；

方案二：购买 A 种设备 2 台，B 种设备 8 台；

方案三：购买 A 种设备 3 台，B 种设备 7 台；

(2) 各方案购买费用分别为：

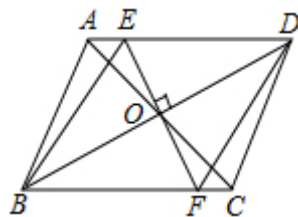
方案一： $3 \times 1 + 4.4 \times 9 = 42.6 > 40$ ，实际付款： $42.6 \times 0.9 = 38.34$ (万元)；

方案二： $3 \times 2 + 4.4 \times 8 = 41.2 > 40$ ，实际付款： $41.2 \times 0.9 = 37.08$ (万元)；

方案三： $3 \times 3 + 4.4 \times 7 = 39.8 < 40$ ，实际付款： 39.8 (万元)；

$\because 37.08 < 38.34 < 39.8$ ， \therefore 采用(1)设计的第二种方案，使购买费用最少.

24. 如图，已知四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 相交于点 O，且 $OA=OC$ ， $OB=OD$ ，过 O 点作 $EF \perp BD$ ，分别交 AD、BC 于点 E、F.



(1) 求证： $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ；

(2) 判断四边形 BEDF 的形状，并说明理由.

解析：(1) 首先证明四边形 ABCD 是平行四边形，再利用 ASA 证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ ；

(2) 结论：四边形 BEDF 是菱形. 根据邻边相等的平行四边形是菱形即可证明；

答案：(1) $\because OA=OC$ ， $OB=OD$ ，

\therefore 四边形 ABCD 是平行四边形， $\therefore AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle EAO = \angle FCO$ ，

$$\text{在}\triangle AOE\text{和}\triangle COF\text{中,}\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO, \\ OA = OC, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases} \therefore \triangle AOE \cong \triangle COF.$$

(2) 结论: 四边形 BEDF 是菱形,

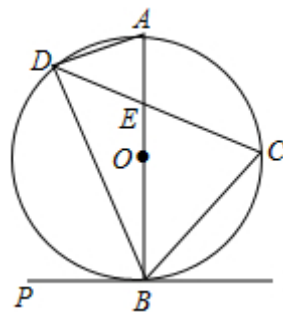
$\because \triangle AOE \cong \triangle COF, \therefore AE = CF,$

$\because AD = BC, \therefore DE = BF, \because DE \parallel BF, \therefore$ 四边形 BEDF 是平行四边形,

$\because OB = OD, EF \perp BD, \therefore EB = ED, \therefore$ 四边形 BEDF 是菱形.

六、解答题(本大题共 2 小题, 每小题 10 分, 共 20 分)

25. 如图, C、D 是以 AB 为直径的 $\odot O$ 上的点, $AC = BC$, 弦 CD 交 AB 于点 E.



(1) 当 PB 是 $\odot O$ 的切线时, 求证: $\angle PBD = \angle DAB$;

(2) 求证: $BC^2 - CE^2 = CE \cdot DE$;

(3) 已知 $OA = 4$, E 是半径 OA 的中点, 求线段 DE 的长.

解析: (1) 由 AB 是 $\odot O$ 的直径知 $\angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$, 由 PB 是 $\odot O$ 的切线知 $\angle PBD + \angle ABD = 90^\circ$, 据此可得答案;

(2) 连接 OC, 设圆的半径为 r, 则 $OA = OB = OC = r$, 证 $\triangle ADE \sim \triangle CBE$ 得 $DE \cdot CE = AE \cdot BE = r^2 - OE^2$,

由 $AC = BC$ 知 $\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ$, 根据勾股定理知 $CE^2 = OE^2 + r^2$ 、 $BC^2 = 2r^2$, 据此得 $BC^2 - CE^2 = r^2 - OE^2$, 从而得证;

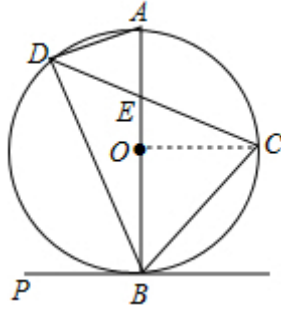
(3) 先求出 $BC = 4\sqrt{2}$ 、 $CE = 2\sqrt{5}$, 根据 $BC^2 - CE^2 = CE \cdot DE$ 计算可得.

答案: (1) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, 即 $\angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$,

$\because PB$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle ABP = 90^\circ$, 即 $\angle PBD + \angle ABD = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD = \angle PBD$;

(2) $\because \angle A = \angle C$ 、 $\angle AED = \angle CEB$, $\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$, $\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AE}{CE}$, 即 $DE \cdot CE = AE \cdot BE$,

如图, 连接 OC,



设圆的半径为 r ，则 $OA=OB=OC=r$ ，则 $DE \cdot CE=AE \cdot BE=(OA-OE)(OB+OE)=r^2-OE^2$ ，

$\because AC=BC$ ， $\therefore \angle AOC=\angle BOC=90^\circ$ ， $\therefore CE^2=OE^2+OC^2=OE^2+r^2$ ， $BC^2=BO^2+CO^2=2r^2$ ，

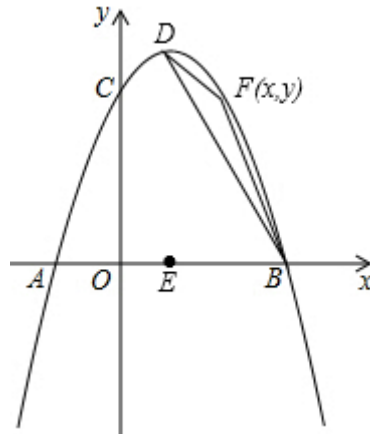
则 $BC^2-CE^2=2r^2-(OE^2+r^2)=r^2-OE^2$ ， $\therefore BC^2-CE^2=DE \cdot CE$ ；

(3) $\because OA=4$ ， $\therefore OB=OC=OA=4$ ， $\therefore BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=4\sqrt{2}$ ，

又 $\because E$ 是半径 OA 的中点， $\therefore AE=OE=2$ ，则 $CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ，

$\because BC^2-CE^2=DE \cdot CE$ ， $\therefore (4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2 = DE \cdot 2\sqrt{5}$ ，解得： $DE=\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 。

26. 如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与两坐标轴相交于点 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ ， D 是抛物线的顶点， E 是线段 AB 的中点。



(1) 求抛物线的解析式，并写出 D 点的坐标；

(2) $F(x, y)$ 是抛物线上的动点：

① 当 $x > 1$ ， $y > 0$ 时，求 $\triangle BDF$ 的面积的最大值；

② 当 $\angle AEF = \angle DBE$ 时，求点 F 的坐标。

解析：(1) 根据点 A 、 B 、 C 的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线的解析式，再利用配方法即可求出抛物线顶点 D 的坐标；

(2) ① 过点 F 作 $FM \parallel y$ 轴，交 BD 于点 M ，根据点 B 、 D 的坐标，利用待定系数法可求出直线 BD 的解析式，根据点 F 的坐标可得出点 M 的坐标，利用三角形的面积公式可得出 $S_{\triangle BDF} = -x^2 + 4x - 3$ ，再利用二次函数的性质即可解决最值问题；

② 过点 E 作 $EN \parallel BD$ 交 y 轴于点 N ，交抛物线于点 F_1 ，在 y 轴负半轴取 $ON' = ON$ ，连接 EN' ，射线 EN' 交抛物线于点 F_2 ，则 $\angle AEF_1 = \angle DBE$ 、 $\angle AEF_2 = \angle DBE$ ，根据 $EN \parallel BD$ 结合点 E 的坐标

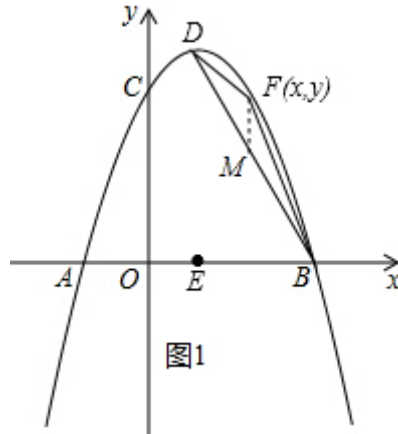
可求出直线 EF_1 的解析式，联立直线 EF_1 、抛物线的解析式成方程组，通过解方程组即可求出点 F_1 的坐标，同理可求出点 F_2 的坐标，此题得解。

答案：(1) 将 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$,

$$\begin{cases} a - b + c = 0, \\ 9a + 3b + c = 0, \\ c = 3, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ c = 3, \end{cases} \therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + 2x + 3.$$

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$, \therefore 顶点 D 的坐标为 $(1, 4)$.

(2) ① 过点 F 作 $FM \parallel y$ 轴，交 BD 于点 M ，如图 1 所示。



设直线 BD 的解析式为 $y=mx+n$ ($m \neq 0$),

将 $(3, 0)$ 、 $(1, 4)$ 代入 $y=mx+n$,

$$\begin{cases} 3m + n = 0, \\ m + n = 4, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} m = -2, \\ n = 6, \end{cases} \therefore \text{直线 } BD \text{ 的解析式为 } y = -2x + 6.$$

\therefore 点 F 的坐标为 $(x, -x^2 + 2x + 3)$,

\therefore 点 M 的坐标为 $(x, -2x + 6)$,

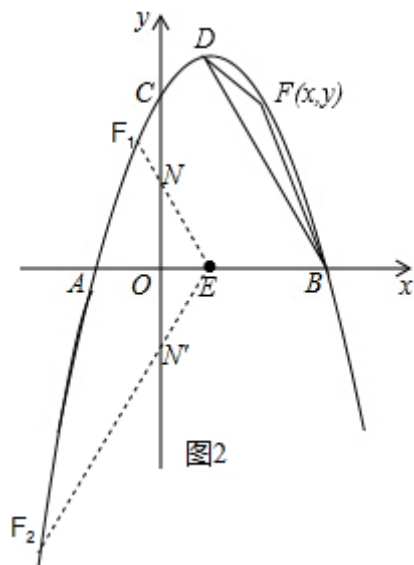
$\therefore FM = -x^2 + 2x + 3 - (-2x + 6) = -x^2 + 4x - 3$,

$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{1}{2} FM \cdot (y_B - y_D) = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$.

$\therefore -1 < 0$,

\therefore 当 $x=2$ 时， $S_{\triangle BDF}$ 取最大值，最大值为 1.

② 过点 E 作 $EN \parallel BD$ 交 y 轴于点 N ，交抛物线于点 F_1 ，在 y 轴负半轴取 $ON' = ON$ ，连接 EN' ，射线 EN' 交抛物线于点 F_2 ，如图 2 所示。



$\because EF_1 \parallel BD, \therefore \angle AEF_1 = \angle DBE.$

$\because ON = ON', EO \perp NN', \therefore \angle AEF_2 = \angle AEF_1 = \angle DBE.$

$\because E$ 是线段 AB 的中点, $A(-1, 0), B(3, 0), \therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, 0).$

设直线 EF_1 的解析式为 $y = -2x + b_1,$

将 $E(1, 0)$ 代入 $y = -2x + b_1, -2 + b_1 = 0,$ 解得: $b_1 = 2, \therefore$ 直线 EF_1 的解析式为 $y = -2x + 2.$

联立直线 EF_1 、抛物线解析式成方程组,
$$\begin{cases} y = -2x + 2, \\ y = -x^2 + 2x + 3, \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{5}, \\ y_1 = 2\sqrt{5} - 2, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 + \sqrt{5}, \\ y_2 = -2\sqrt{5} - 2 \end{cases} \quad (\text{舍去}),$$

\therefore 点 F_1 的坐标为 $(2 - \sqrt{5}, 2\sqrt{5} - 2).$

当 $x=0$ 时, $y = -2x + 2 = 2,$

\therefore 点 N 的坐标为 $(0, 2),$

\therefore 点 N' 的坐标为 $(0, -2).$

同理, 利用待定系数法可求出直线 EF_2 的解析式为 $y = 2x - 2.$

联立直线 EF_2 、抛物线解析式成方程组,
$$\begin{cases} y = 2x - 2, \\ y = -x^2 + 2x + 3, \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{5}, \\ y_1 = -2\sqrt{5} - 2, \end{cases} \begin{cases} x_2 = \sqrt{5}, \\ y_2 = 2\sqrt{5} - 2 \end{cases} \quad (\text{舍去}),$$

\therefore 点 F_2 的坐标为 $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - 2).$

综上所述: 当 $\angle AEF = \angle DBE$ 时, 点 F 的坐标为 $(2 - \sqrt{5}, 2\sqrt{5} - 2)$ 或 $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - 2).$