2006年普通高等学校招生全国统一考试(重庆卷)

数学试题卷（理工农医类）

数学试题（理工农医类）共5页，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1.答题前，务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡规定的位置上。

2.答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其他答案标号。

3.答非选择题时，必须使0.5毫米黑色墨水签字笔，将答案书写在答题止规定的位置上。

4.所有题目必须在答题卡上作答，在试题卷上答题无效。

5.考试结束，监考员将试题卷和答题卡一并收回。

参考公式：

如果事件 A、B 互斥，那么 $P（A+B）-P(A)+P(B)$.

如果事件 A、B 相互独立，那么 $P(A\cdot B)-P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么 n 次独立事件重复试验中恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C^k_nP^k(1-P)^{n-k}$

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(\complement_u A)\cup(\complement_u B)=$

(A) $\{1,6\}$　　(B) $\{4,5\}$

(C) $\{1,2,3,4,5,7\}$　　(D) $\{1,2,3,6,7\}$

(2)在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_a+a_b=12$，S_N 是数列 $\{a_n\}$ 的前n项和，则 S_N 的值为

（A）48　　(B)54　　(C)60　　(D)66

(3)过坐标原点且与 $x^2 | y^2\ \ 4x | 2y+\frac{5}{2}=0$ 相切的直线的方程为

（A）$y=-3x$ 或 $y=\frac{1}{3}x$　　(B) $y=-3x$ 或 $y=-\frac{1}{3}x$

（C）$y=-3x$ 或 $y=-\frac{1}{3}x$　　(B) $y=3x$ 或 $y=\frac{1}{3}x$

(4)对于任意的直线 l 与平同 a,在平面 a 内必有直线 m,使 m 与 l

(A)平行　　（B）相交

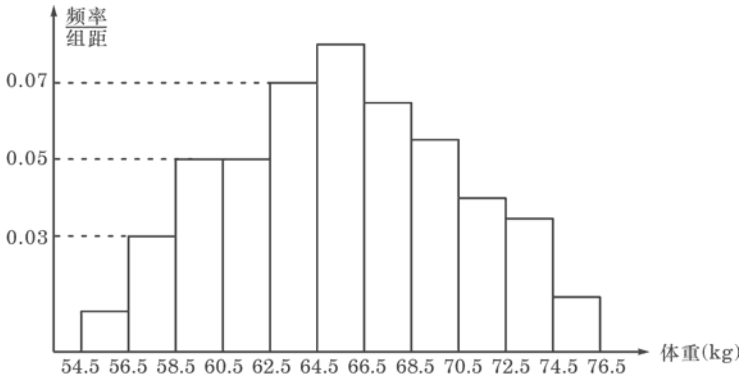
(C)垂直　　(D)互为异面直线

（5）若 $\left(3\sqrt{x}\quad\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中各项系数之和为64，则展开式的常数项为

(A)-540　　(B)

(c)162　　(D)540

(6)为了了解某地区高三学生的身体发育情况，抽查了该地区100名年龄为17.5岁－１８岁的男生体重(kg) ,得到频率分布直方图如下：



根据上图可得这 100 名学生中体重在〔56.5,64.5〕的学生人数是

(A)20　　(B)30

(C)40　　(D）50

(7)与向量 $a=\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$, $b-\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$的夹解相等，且模为 1 的向量是

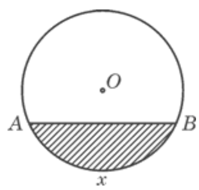
(A) $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$　　(B) $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$或$\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

（C）$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)$　　（D）$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right)$或$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3}\right)$

（８）将 5 名实习教师分配到高一年级的 3 个班实习，每班至少 1 名，最多 2 名，则不同的分配方案有

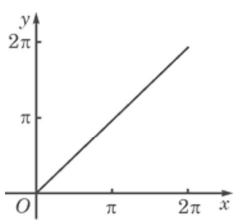
（A） ３０种　　（B） ９０种

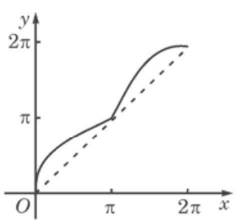
（C） １８０种　　（D） ２７０种

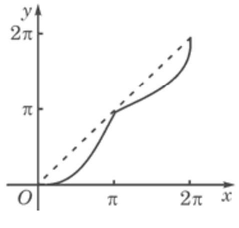


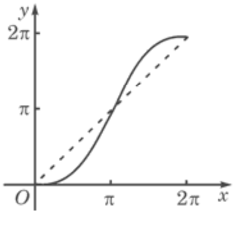
（９）如图所示，单位圆中弧 AB 的长为 x, $f(x)$表示弧 AB 与弦 AB 所围成的弓形面积的 2 倍，则函数 $y=f(x)$的图象是

题　（９）图









（10）若 $a, b, c>0$ 且 $a(a+b+c)+bc=4-2\sqrt{3}$，则 $2a+b+c$ 的最小值为

（A）$\sqrt{3}-1$　　　　(B) $\sqrt{3}+1$

(C) $2\sqrt{3}+2$　　　　(D) $2\sqrt{3}-2$

一、填空题：本大题共 6 小题，共 24 分，把答案填写在答题卡相应位置上

（11）复数复数 $\dfrac{1+2i}{3+\mathrm{i}^2}$ 的值是________.

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{2n^2-n-1}=$________.

(13)已知 $\alpha,\beta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{3}{5}$，$\sin\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{12}{13}$，则 $\mathrm{os}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

(14)在数列｛a_n｝中，若 $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+3\ (n\geqslant1)$，则该数列的通项 $a_n=$________.

(15)设 $a>0,n\neq1$，函数 $f(x)=a\lg^{(x2-2n+1)}$ 有最大值.则不等式 $\log_n(x^2-5x+7)>0$ 的解集为________.

(16)已知变量 x,y 满足约束条件 $1\leqslant x+y\leqslant4,-2\leqslant x-y\leqslant2$.若目标函数 $z=ax+y$(其中 $a>0$)仅在点(3,1)处取得最大值，则 a 的取值范围为__________.

二、解答题：本大题共 6 小题，共 7 6 分解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分 13 分）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\cos+\sin\omega r\cos\omega x+a$(其中 $\omega>0,a\in\mathbf{R}$)，且 $f(x)$的图象在 y 轴右侧的第一个高点的横坐标为 $\dfrac{x}{6}$.

（Ⅰ）求ω的值；

（Ⅱ）如果 $f(x)$在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上的最小值为 $\sqrt{3}$，求 a 的值.

（18）（本小题满分 13 分）

某大厦的一部电梯从底层出发后只能在第 18、19、20 层可以停靠.若该电梯在底层载有 5 位乘客，且每位乘客在这三层的每一层下电梯的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，用ξ表示这 5 位乘客在第 20 层下电梯的人数.求：

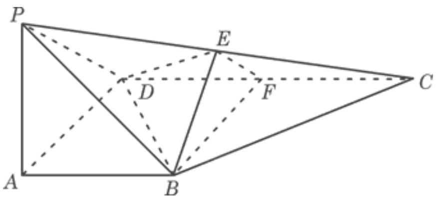
（Ⅰ）随机变量ξ的分布列；

（Ⅱ）随机变量ξ的期望.

（19）（本小题满分 13 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$\angle DAB$ 为直角，$AB\parallel CD,AD=CD=24B,E$、$F$ 分别为 PC、CD 的中点.

（Ⅰ）试证：CD⊥平面 BEF;
（Ⅱ）设 $PA=k\cdot AB$,且二面角 E-BD-C 的平面角大于 30°,求 k 的取值范围.



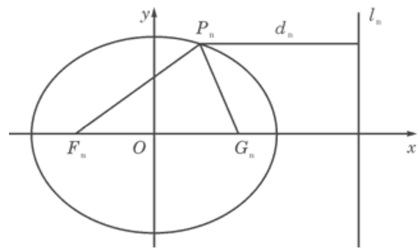
图(19)图

（20）(本小题满分 13 分)
已知函数 $f(x)=(x^2+bx+c)\mathrm{c}^x$,其中 $b,c\in\mathbf{R}$ 为常数.
（Ⅰ）若 $b^2>4(a-1)$,讨论函数 $f(x)$的单调性；
（Ⅱ）若 $b^2<4(c-1)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)-c}{x}=4$,试证：$-6\leqslant \mathrm{b}\leqslant 2$.

(21)(本小题满分 12 分)
已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)$满足 $f(f(x)-x^2+y\_=\mathrm{f}(x)-x^2+x$.
（Ⅰ）若 $f(2)$-3,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;
（Ⅱ）设有且仅有一个实数 x_0,使得 $\mathrm{f}(x_0)=x_{0,}$求函数 $f(x)$的解析表达式.

(22)(本小题满分 12 分)

已知一列椭圆 C_n:$x^2+\dfrac{y^2}{b_n^2}=1$. $0<\mathrm{b_n}<1$,n=1,2.….若椭圆 C 上有一点 P_n 使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d.是｜P_nF_n｜与｜P_nC_n｜的等差中项，其中 F_n、C_n分别是 C_n的左、右焦点.



图(2 2)图

（Ⅰ）试证：$b_n\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　($n\geqslant 1$);

（Ⅱ）取 $b_n=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，并用 S_A 表示 $\Delta P_nF_nG_n$ 的面积，试证：$S_1<S_1$ 且 $S_n<S_{n+3}$　($n\geqslant 3$).

（20）(本小题满分 13 分)
已知函数 $f(x)=(x^2+bx+c)\mathrm{c}^x$,其中 $b,c\in\mathbf{R}$ 为常数.
（Ⅰ）若 $b^2>4(a-1)$,讨论函数 $f(x)$的单调性；
（Ⅱ）若 $b^2<4(c-1)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x)-c}{x}=4$,试证：$-6\leqslant \mathrm{b}\leqslant 2$.

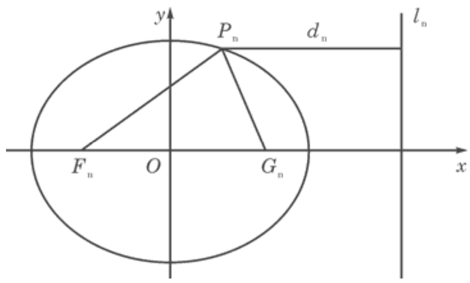
(21)(本小题满分 12 分)
已知定义域为 **R** 的函数 $f(x)$满足 $f(f(x)-x^2+y\_=\mathrm{f}(x)-x^2+x$.
（Ⅰ）若 $f(2)$-3,求 $f(1)$;又若 $f(0)=a$,求 $f(a)$;
（Ⅱ）设有且仅有一个实数 x_0,使得 $\mathrm{f}(x_0)=x_{0,}$求函数 $f(x)$的解析表达式.

(22)(本小题满分 12 分)

已知一列椭圆 C_n:$x^2+\dfrac{y^2}{b_n^2}=1$. $0<b_n<1$,n=1,2.….若椭圆 C 上有一点 P_n 使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d.是｜P_nF_n｜与｜P_nC_n｜的等差中项，其中 F_n、C_n 分别是 C_n 的左、右焦点.

（Ⅰ）试证：$b_n\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　($n\geqslant1$);

（Ⅱ）取 $b_n=\dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，并用 S_A 表示 $\Delta P_nF_nG_n$ 的面积，试证：$S_1<S_1$ 且 $S_n<S_{n+3}$　($n\geqslant3$).



图(２２)图

部分参考答案

(18)(本小题 13 分)

解法一：（Ⅰ） ξ 的所有可能值为 0 ， 1 ， 2 ， 3 ， 4 ， 5 .

由等可能性事件的概率公式得

$P(\xi=0)=\dfrac{2^5}{3^2}=\dfrac{32}{243}$，　　$P(\xi=1)=\dfrac{C_5^1\bullet 2^4}{3_5}=\dfrac{80}{243}$.

$P(\xi=2)=\dfrac{C_5^2\bullet 2^3}{3^5}==\dfrac{80}{243}$，　$P(\xi=3)=\dfrac{C_5^2\bullet 2^4}{3^5}=\dfrac{40}{243}$.

$P(\xi=4)=\dfrac{C_3^4\bullet 2}{3^5}==\dfrac{10}{243}$，　$P(\xi=5)=\dfrac{1}{3^5}=\dfrac{1}{243}$.

从而 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3	4	5
P	$\dfrac{32}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{80}{243}$	$\dfrac{40}{243}$	$\dfrac{10}{243}$	$\dfrac{1}{243}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 ξ 的期望为

$E\xi=0\times\dfrac{32}{243}+1\times\dfrac{80}{243}+2\times\dfrac{80}{243}+3\times\dfrac{40}{243}+4\times\dfrac{10}{243}+5\times\dfrac{1}{243}$

$=\dfrac{405}{243}=\dfrac{5}{3}$.

解法二：（Ⅰ）考察一位乘客是否在第 20 层下电梯为一次试验，这是 5 次独立重复试验.

故 $\xi - B\left(5,\dfrac{1}{3}\right)$,即有

$P(\xi=k)=C_5^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^b\left(\dfrac{2}{3}\right)^{5-k}$,$k$=0,1,2,3,4,5.

由此计算 ξ 的分布列如解法一.

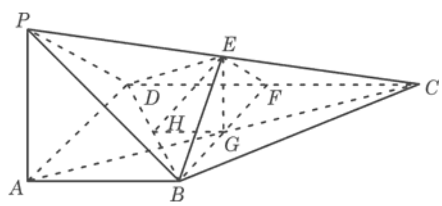
解法三：　（Ⅰ）同解法一或解二.

　　（Ⅱ）由对称性与等可能性，在三层的任一层下电梯的人数同分布，故期望值相等.

　　即 $3E\xi=5$,从而 $E\xi=\dfrac{5}{3}$.

（19）（本小题 13 分）

解法一：



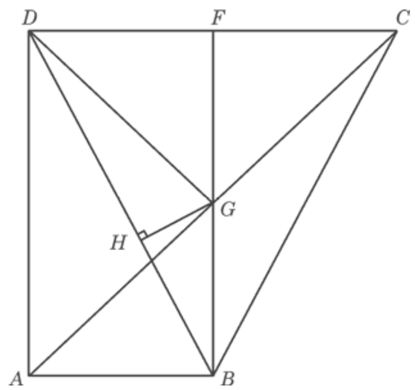
（Ⅰ）证：由已知 $DF\parallel$AB 且∠DAD 为直角，故 ABFD 是矩

形，从而 $CD\perp BF$.

又 $PA\perp$ 底面 ABCD,$CD\perp AD$，故由三垂线定理知 $CD\perp PD$.在△PDC 中，E、F 分别 PC、CD 的中点，故 $EF\parallel PD$,从而 $CD\perp EF$,由此得 $CD\perp$ 面 BEF.　　第（19）图 1

（Ⅱ）连结 AC 交 BF 于 G.易知 G 为 AC 的中点.连接 EG,则在△PAC 中易知 $EC\parallel PA$.又因 $PA\perp$ 底面 $ABCD$,故 $BC\perp$ 底面 $ABCD$.在底面 $ABCD$ 中，过 C 作 $GH\perp BD$,垂足为 H,连接 EH.由三垂线定理知 $EH\perp BD$.从而 $\angle EHG$ 为二面角 $E\text{-}BD\text{-}C$ 的平面角.

设 $AB=a$,则在△PAC 中，有



$BG=\frac{1}{2}PA=\frac{1}{2}ka$.

以下计算 GH，考察底面的平面图（如答(19)图 2 ）.连结 GD.

因 $S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot GH=\frac{1}{2}\mathrm{GB}\cdot OF$.

故 $GH=\frac{GB\bullet DF}{BD}$.

在 △ ABD 中，因为 AB = a,AD=2A, 得 $BD=\sqrt{5}$ a

第（19）图 2

而 $GB=\frac{1}{2}FB=\frac{1}{2}AD$-a.$DF$-$AB$,从而得

$$GH=\frac{GB\bullet DF}{BD}=\frac{a\bullet a}{\sqrt{5a}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a.$$

$$\text{因此 }\tan EHG=\frac{EG}{GH}=\frac{\frac{1}{2}ka}{\frac{\sqrt{5}}{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{2}k.$$

由 $k>0$ 知 $\angle EHG$ 是锐角，故要使 $\angle EHG>30°$，必须

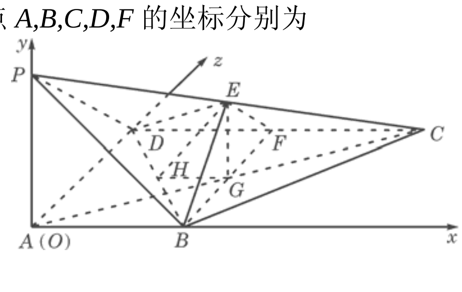
$$\frac{\sqrt{5}}{2}k>\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

解之得，k 的取值范围为 $k>\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

解法二：

（Ⅰ）如图，以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为：轴建立空间直角坐标系，设 $AB=a$,则易知点 A,B,C,D,F 的坐标分别为

$A(0,0,0)$,$B(a,0,0)$,$C(2a,2a,0)$,$D(0,2a,0)$,



$F(a,2a,0)$.

从而 $\overrightarrow{DC}=(2a,0,0)$, $\overrightarrow{BF}=(0,2a,0)$,

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BF}=0$,故 $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{BF}$.

设 $PA=b$,则 $P(0,0,b)$,而 E 为 PC 中点.故　　　　　第（19）3

$E\left(a,a,\dfrac{b}{2}\right)$.从而 $\overrightarrow{BE}=\left(0,a,\dfrac{b}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BE}=0$,故 $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{BE}$.

由此得 $CD\perp$ 面 BEF.

（Ⅱ）设 E 在 xOy 平面上的投影为 G，过 G 作 GH⊥BD 垂足为 H,由三垂线定理知 EH⊥BD.

从而∠EHG 为二面角 E-BD-C 的平面角.

由 PA＝k・AB 得 P(0,0,ka),E$\left(a,a,\dfrac{ka}{2}\right)$,G(a,a,0).

设 H(x,y,0)，则 $\overrightarrow{GH}=(x-a,y-a,0)$, $\overrightarrow{BD}=(-a,2a,0)$,

由 $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ 得=a(x-a)+2a(y-a)=0,即

x-2y=-a　　　①

又因 $\overrightarrow{BH}=(x,a,y,0)$,且 $\overrightarrow{BH}$ 与 $\overrightarrow{BD}$ 的方向相同，故 $\dfrac{x-a}{a}=\dfrac{y}{2a}$，即

2x+y=2a　　　②

由①②解得 $x=\dfrac{3}{5}a$,$y=\dfrac{4}{5}a$,从而 $\overrightarrow{GH}=\left(-\dfrac{2}{5}a,-\dfrac{1}{5}a,0\right)$，$|\overrightarrow{GH}|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$.

$$\tan EHG=\frac{|\overrightarrow{EC}|}{|\overrightarrow{GH}|}=\frac{\frac{Ka}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{2}k.$$

由 $k>0$ 知，EHC 是锐角，由∠EHC＞$30°$, 得 tanEHG＞tan$30°$, 即

$$\frac{\sqrt{5}}{2}k>\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故 k 的取值范围为 $k>\dfrac{2\sqrt{15}}{15}$.

(20)（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）求导得 $f'(x)=[x^2+(b+2)x+b+c]e^x$.

因 $b^2>4(c-1)$,故方程 $f'(x)=0$ 即 $x^2+(b+2)x+b+c=0$ 有两根；

$x_1=-\dfrac{b+c}{2}-\dfrac{\sqrt{b^2-4(c-1)}}{2}<x_2=-\dfrac{b+2}{2}+\dfrac{\sqrt{b^2-4(c-1)}}{2}$.

令 f'（x）＞0，解得 $x<x_1$ 或 $x>x_1$;
又令 f'（x）＞0，解得 $x_1<x<x_2$.
故当 $x\varepsilon$（-, x_1）时，$f(x)$是增函数，当 $x\varepsilon$（$x_{2,+}$）时，f(x)也是增函数，但当 $x\varepsilon$（x_1 ， x_2）时，f(x)是减函数.
（Ⅱ）易知 $f(0)=c,f(u)=b+c$,因此

$$\lim_{\to 0}\frac{f(x)-e}{x}=\lim_{\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f(0)=b+e.$$

所以，由已知条件得

$$\begin{cases} b+e=4 \\ b^2\leqslant 4(e-1), \end{cases}$$

因此 $b^{2+}4b-12\leqslant 0$.
解得$-6\leqslant b\leqslant 2$.
(21)（本小题 12 分）
解：（Ⅰ）因为对任意 $x\varepsilon R$，有 $f(f(x)-x^2+x)=f(x)-x^2+x$，所以
$f(f(2)-2^2+2)=f(2)-2^2+2$.
又由 $f(2)=3$，得 $f(3-2^2+2)-3-2^2+2$，即 $f(1)=1$.
若 $f(0)=a$，则 $f(a-0^2+0)=a-0^2+0$，即 $f(a)=a$.
（Ⅱ）因为对任意 $x\varepsilon R$，有 $f(f(x))-x^2+x)=f(x)-x^2+x$.
又因为有且只有一个实数 x_0,使得 $f(x_0)-x_0$.
所以对任意 $x\varepsilon R$，有 $f(x)-x^2+x=x_0$.

在上式中令 $x=x_0$,有 $f(x_0)-x_0^2+x_0=x_0$,

又因为 $f(x_0)-x_0$，所以 $x_0-x_0^2=0$，故 $x_0=0$ 或 $x_0=1$.

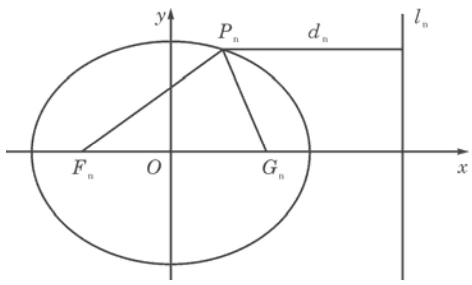
若 $x_0=0$，则 $f(x)-x^2+x=0$，即
$f(x)=x^2-x$.
但方程 $x^2-x=x$ 有两上不同实根，与题设条件矛质，故 $x_2\neq 0$.
若 $x_2=1$,则有 $f(x)-x^2+x=1$，即 $f(x)=x^2-x+1$.易验证该函数满足题设条件.
综上，所求函数为
$f(x)=x^2-x+1$（$x\in\mathbf{R}$）.

（22）（本小题 12 分）
证：（1）由题设及椭圆的几何性质有

$$2d_n=|P_nF_n|+|P_nG_n|=2,故d_n=1.$$

设 $t_n=\sqrt{1-b_n^2}$,则右准线方程为

$$l_n x=\frac{1}{e_x}.$$



因此，由题意 d_n 应满足

$$\frac{1}{e_x}-1\le d_n\le\frac{1}{e_x}+1.$$

即 $\begin{cases}\frac{1}{e_x}-1\le 1\\ 0<e_n<1\end{cases}$，解之得：$\frac{1}{2}\le e_n<1,$

即 $\frac{1}{2}\le e_n<1$，

从而对任意 $n\ge 1, b_n\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$

（II）设点 P_n的坐标为（x_n, f_n),则出d_n-1及椭圆方程易知

$$x_n=\frac{1}{e_n}-1,$$

$$y_n^2=b_n^2(1-x_n^2)=(1-c_n^2)(1-(\frac{1}{c_n}-1)^2)$$

得两极 $\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$，从而易知 f(c)在（$\frac{1}{2}$，$\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$）内是增函 数，而在（$\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$，1）内是减函数.

现在由题设取 $b_n=\frac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$,则$c_n=\sqrt{1-b_n^2}=\frac{n+1}{n+2}-1-\frac{1}{n+2}, c$, 是增数列.

又易知

$$c_2=\frac{3}{4}<\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}<\frac{4}{5}=c_n.$$

故由前已证，知 $S_1<S_2$，且$S_n<S_{n+1}(n\ge 3)$.