

2018 年江苏省盐城中学等五校中考一模数学

一、选择题(本大题共有 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题所给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将正确选项的字母代号填写在答题纸相应位置上)

1. -2 的相反数是()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

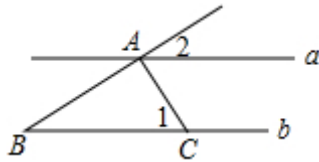
C. -2

D. 2

解析: -2 的相反数是 2 .

答案: D

2. 如图, 直线 $a \parallel b$, $AC \perp AB$, AC 与直线 a, b 分别相交于 A, C , 若 $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 1$ 的度数为()



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

解析: \because 直线 $a \parallel b$, $\angle 2 = 30^\circ$,

$$\therefore \angle B = \angle 2 = 30^\circ,$$

又 $\because AC \perp AB$,

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

答案: C

3. 下列计算正确的是()

A. $2a \times 3a = 5a$

B. $(-2a)^3 = -6a^3$

C. $6a \div 2a = 3a$

D. $(-a^3)^2 = a^6$

解析: (A) 原式 $= 6a^2$, 故 A 错误;

(B) 原式 $= -8a^3$, 故 B 错误;

(C) 原式 $= 3$, 故 C 错误.

答案: D

4. 数据 21、12、18、16、20、21 的众数和中位数分别是()

A. 21 和 19

B. 21 和 17

C. 20 和 19

D. 20 和 18

解析: 在这一组数据中 21 是出现次数最多的, 故众数是 21;

数据按从小到大排列: 12、16、18、20、21、21, 中位数是 $(18+20) \div 2 = 19$, 故中位数为 19.

答案: A

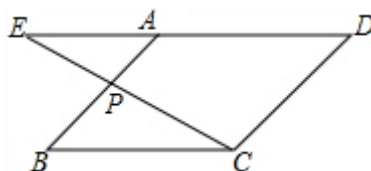
5. 如图，几何体是由 3 个大小完全一样的正方体组成的，它的左视图是()



- A.
- B.
- C.
- D.

解析：如图，几何体是由 3 个大小完全一样的正方体组成的，它的左视图是 .
 答案：D

6. 如图，点 P 是 $\square ABCD$ 边 AB 上的一点，射线 CP 交 DA 的延长线于点 E，则图中相似的三角形有()

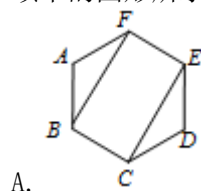


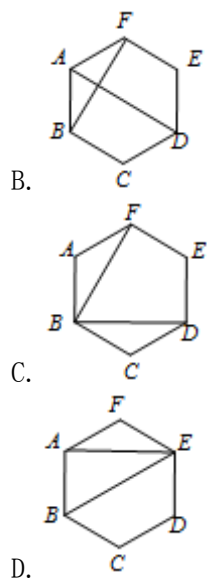
- A. 0 对
 B. 1 对
 C. 2 对
 D. 3 对

解析：∵ 四边形 ABCD 是平行四边形，
 $\therefore AB \parallel DC, AD \parallel BC,$
 $\therefore \triangle EAP \sim \triangle EDC, \triangle EAP \sim \triangle CBP,$
 $\therefore \triangle EDC \sim \triangle CBP,$
 故有 3 对相似三角形.

答案：D

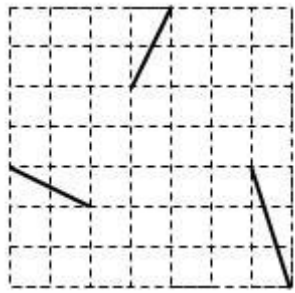
7. 小亮同学以四种不同的方式连接正六边形 ABCDEF 的两条对角线，连接后的情形如图，选项中的图形所示，则如图图形不是轴对称图形()





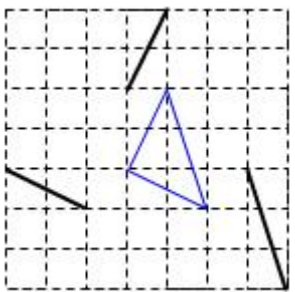
解析：A、是轴对称图形，故此选项错误；
 B、是轴对称图形，故此选项错误；
 C、是轴对称图形，故此选项错误；
 D、不是轴对称图形，故此选项正确。
 答案：D

8. 如图，将网格中的三条线段沿网格线平移后组成一个首尾相接的三角形，至少需要移动 ()



- A. 8 格
- B. 9 格
- C. 11 格
- D. 12 格

解析：如图所示：将网格中的三条线段沿网格线平移后组成一个首尾相接的三角形，至少需要移动 $4+3+2=9$ 格。



答案：B

二、填空题(本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分. 不需写出解答过程，请将答案直接写在答题纸相应位置上)

9. 比较大小： $\sqrt{2}$ _____ 1. (填 “>”、“=” 或 “<”)

解析: $(\sqrt{2})^2 = 2$, $1^2 = 1$,

$\therefore 2 > 1$,

$\therefore \sqrt{2} > 1$.

答案: $>$

10. 2017 年端午小长假的第一天, 永州市共接待旅客约 275 000 人次, 请将 275 000 用科学记数法表示为_____.

解析: 将 275 000 用科学记数法表示为 2.75×10^5 ,

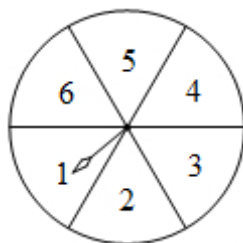
答案: 2.75×10^5

11. 因式分解: $x^2 - 2x + (x - 2) =$ _____.

解析: 原式 $= x(x - 2) + (x - 2) = (x + 1)(x - 2)$.

答案: $(x + 1)(x - 2)$

12. 如图, 转盘中 6 个扇形的面积相等, 任意转动转盘 1 次, 当转盘停止转动时, 指针指向的数小于 5 的概率为_____.



解析: \because 共 6 个数, 小于 5 的有 4 个,

$\therefore P(\text{小于 } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

答案: $\frac{2}{3}$

13. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值是_____.

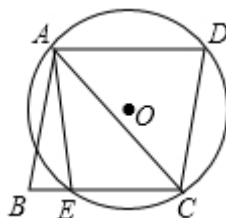
解析: \because 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 有两个相等的实数根,

$\therefore \Delta = (-2)^2 - 4m = 4 - 4m = 0$,

解得: $m = 1$.

答案: 1

14. 如图, 四边形 ABCD 是菱形, $\odot O$ 经过点 A、C、D, 与 BC 相交于点 E, 连接 AC、AE. 若 $\angle D = 78^\circ$, 则 $\angle EAC =$ _____.



解析: \because 四边形 ABCD 是菱形, $\angle D = 78^\circ$,

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle DCB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle D) = 51^\circ$,

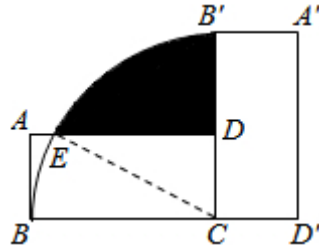
\because 四边形 AECD 是圆内接四边形,

$\therefore \angle AEB = \angle D = 78^\circ$,

$\therefore \angle EAC = \angle AEB - \angle ACE = 27^\circ$.

答案：27

15. 如图，将矩形 ABCD 绕点 C 沿顺时针方向旋转 90° 到矩形 $A'B'CD'$ 的位置， $AB=2$ ， $AD=4$ ，则阴影部分的面积为_____.



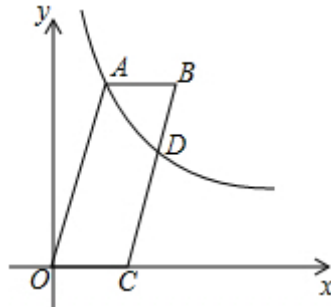
解析：∵ 四边形 ABCD 是矩形，
 $\therefore AD=BC=4$ ， $CD=AB=2$ ， $\angle BCD=\angle ADC=90^\circ$ ，
 $\therefore CE=BC=4$ ，
 $\therefore CE=2CD$ ，
 $\therefore \angle DEC=30^\circ$ ，
 $\therefore \angle DCE=60^\circ$ ，

由勾股定理得： $DE=2\sqrt{3}$ ，

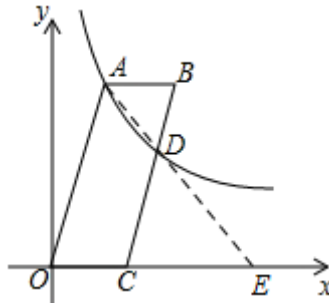
\therefore 阴影部分的面积是 $S=S_{\text{扇形}CEB'} - S_{\triangle CDE} = \frac{60\pi \times 4^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。

答案： $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

16. 如图，四边形 OABC 是平行四边形，点 C 在 x 轴上，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A(5, 12)，且与边 BC 交于点 D。若 $AB=BD$ ，则点 D 的坐标为_____.



解析：解法 1：如图，连接 AD 并延长，交 x 轴于 E，



由 A(5, 12)，可得 $AO = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ ，

$\therefore BC=13$ ，
 $\therefore AB \parallel CE$ ， $AB=BD$ ，
 $\therefore \angle CED = \angle BAD = \angle ADB = \angle CDE$ ，
 $\therefore CD=CE$ ，

∴ AB+CE=BD+CD=13, 即 OC+CE=13,

∴ OE=13,

∴ E(13, 0),

由 A(5, 12), E(13, 0), 可得 AE 的解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{39}{2}$,

∴ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A(5, 12),

∴ $k = 12 \times 5 = 60$,

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{60}{x}$,

解方程组 $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{39}{2} \\ y = \frac{60}{x} \end{cases}$, 可得 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 8 \\ y = \frac{15}{2} \end{cases}$,

∴ 点 D 的坐标为 $(8, \frac{15}{2})$.

解法 2: ∴ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 A(5, 12),

∴ $k = 12 \times 5 = 60$,

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{60}{x}$,

设 $D(m, \frac{60}{m})$,

由题可得 OA 的解析式为 $y = \frac{12}{5}x$, $AO \parallel BC$,

∴ 可设 BC 的解析式为 $y = \frac{12}{5}x + b$,

把 $D(m, \frac{60}{m})$ 代入, 可得 $\frac{12}{5}m + b = \frac{60}{m}$,

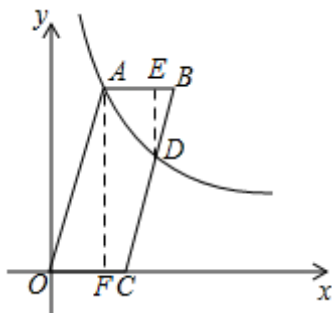
∴ $b = \frac{60}{m} - \frac{12}{5}m$,

∴ BC 的解析式为 $y = \frac{12}{5}x + \frac{60}{m} - \frac{12}{5}m$,

令 $y = 0$, 则 $x = m - \frac{25}{m}$, 即 $OC = m - \frac{25}{m}$,

∴ 平行四边形 ABCO 中, $AB = m - \frac{25}{m}$,

如图所示, 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E, 过 A 作 $AF \perp OC$ 于 F, 则 $\triangle DEB \sim \triangle AFO$,



$$\therefore \frac{DB}{DE} = \frac{AO}{AF}, \text{ 而 } AF=12, DE=12 - \frac{60}{m}, OA=\sqrt{5^2+12^2}=13,$$

$$\therefore DB=13 - \frac{65}{m},$$

$$\therefore AB=DB,$$

$$\therefore m - \frac{25}{m} = 13 - \frac{65}{m},$$

解得 $m_1=5, m_2=8,$

又 $\because D$ 在 A 的右侧, 即 $m>5,$

$$\therefore m=8,$$

$$\therefore D \text{ 的坐标为 } (8, \frac{15}{2}).$$

$$\text{答案: } (8, \frac{15}{2})$$

三、解答题(本大题共有 11 小题, 共 102 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、推理过程或演算步骤)

17. 计算: $-2^2 + \sqrt[3]{-8} + \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ.$

解析: 根据乘方的意义、立方根的定义、特殊角的三角函数值化简计算即可.

$$\text{答案: 原式} = -4 - 2 + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -4 - 2 + 1$$

$$= -5.$$

18. 解不等式组 $\begin{cases} 2x \geq -9 - x \\ 5x - 1 > 3(x + 1) \end{cases}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.

解析: 分别求出各不等式的解集, 再求出其公共解集, 并在数轴上表示出来即可.

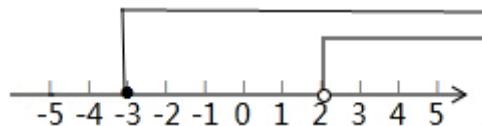
$$\text{答案: } \begin{cases} 2x \geq -9 - x \text{ ①} \\ 5x - 1 > 3(x + 1) \text{ ②} \end{cases},$$

由①得, $x \geq -3,$

由②得 $x > 2,$

故此不等式组的解集为 $x > 2,$

在数轴上表示为:



19. 先化简, 再求值: $(1 - \frac{1}{x+2}) \div \frac{x^2+2x+1}{2x+4}$, 其中 $x = \sqrt{2} - 1.$

解析: 根据分式的减法和除法可以化简题目中的式子, 再将 x 的值代入即可解答本题.

$$\text{答案: } (1 - \frac{1}{x+2}) \div \frac{x^2+2x+1}{2x+4}$$

$$= \frac{x+2-1}{x+2} \cdot \frac{2(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}$$

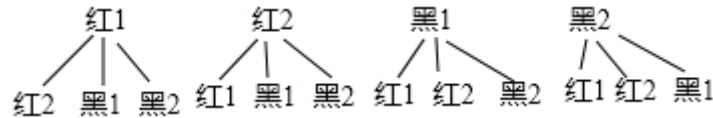
$$= \frac{2}{x+1},$$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时, 原式 = $\frac{2}{\sqrt{2} - 1 + 1} = \sqrt{2}$.

20. 甲、乙、丙、丁四人玩扑克牌游戏, 他们先取出两张红心和两张黑桃共四张扑克牌, 洗匀后背面朝上放在桌面上, 每人抽取其中一张, 拿到相同颜色的即为游戏搭档, 现甲、乙两人各抽取了一张, 求两人恰好成为游戏搭档的概率. (请用“画树状图”或“列表”等方法写出分析过程)

解析: 利用列举法即可列举出所有各种可能的情况, 然后利用概率公式即可求解.

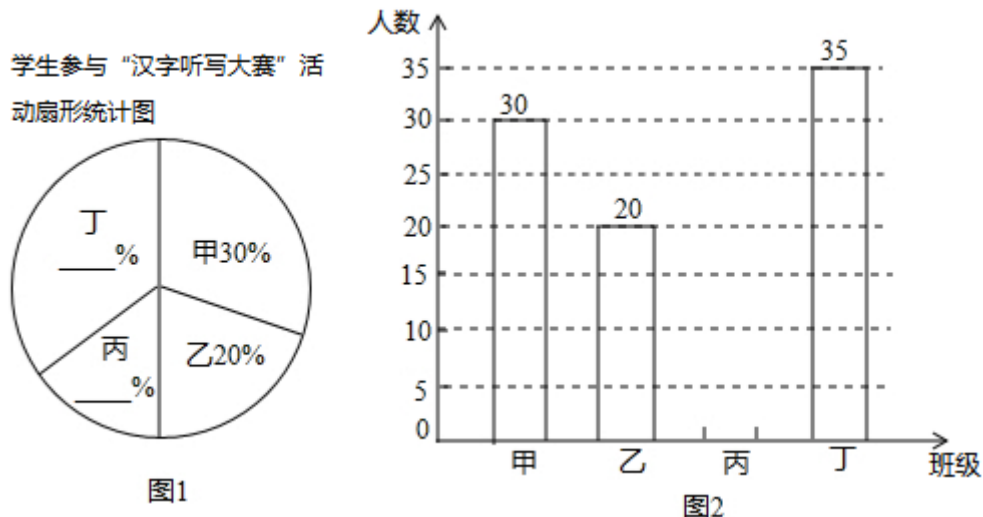
答案: 根据题意画图如下:



共有 12 中情况, 从 4 张牌中任意摸出 2 张牌花色相同颜色 4 种可能, 所以两人恰好成为游戏搭档的概率 = $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

21. 某中学开展“汉字听写大赛”活动, 为了解学生的参与情况, 在该校随机抽取了四个班级学生进行调查, 将收集的数据整理并绘制成图 1 和图 2 两幅尚不完整的统计图, 请根据图中的信息, 解答下列问题:

- (1) 这四个班参与大赛的学生共_____人;
- (2) 请你补全两幅统计图;
- (3) 求图 1 中甲班所对应的扇形圆心角的度数;
- (4) 若四个班级的学生总数是 160 人, 全校共 2000 人, 请你估计全校的学生中参与这次活动的大约有多少人.



解析: (1) 根据乙班参赛 30 人, 所占比为 20%, 即可求出这四个班总人数;

(2) 根据丁班参赛 35 人, 总人数是 100, 即可求出丁班所占的百分比, 再用整体 1 减去其它所占的百分比, 即可得出丙所占的百分比, 再乘以参赛得总人数, 即可得出丙班参赛得人数, 从而补全统计图;

(3) 根据甲班所占的百分比, 再乘以 360° , 即可得出答案;

(4) 根据样本估计总体, 可得答案.

答案: (1) 这四个班参与大赛的学生数是:

$30 \div 30\% = 100$ (人);

故答案为 100;

(2) 丁所占的百分比是: $\frac{35}{100} \times 100\% = 35\%$,

丙所占的百分比是: $1 - 30\% - 20\% - 35\% = 15\%$,

则丙班的人数是: $100 \times 15\% = 15$ (人);

如图:

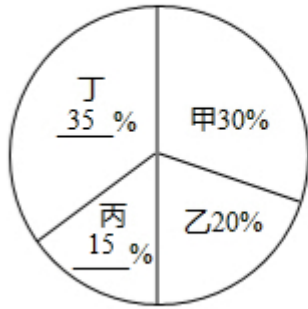


图1

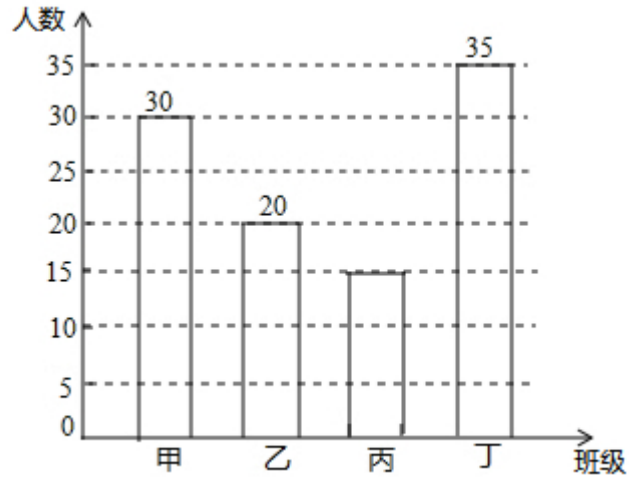


图2

(3) 甲班级所对应的扇形圆心角的度数是: $30\% \times 360^\circ = 108^\circ$;

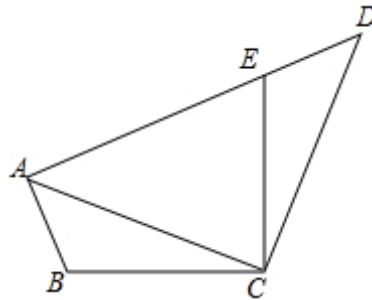
(4) 根据题意得: $2000 \times \frac{100}{160} = 1250$ (人).

答: 全校的学生中参与这次活动的大约有 1250 人.

22. 如图, 已知在四边形 ABCD 中, 点 E 在 AD 上, $\angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle D$, $BC = CE$.

(1) 求证: $AC = CD$;

(2) 若 $AC = AE$, 求 $\angle DEC$ 的度数.



解析: (1) 根据同角的余角相等可得到 $\angle 3 = \angle 5$, 结合条件可得到 $\angle 1 = \angle D$, 再加上 $BC = CE$, 可证得结论;

(2) 根据 $\angle ACD = 90^\circ$, $AC = CD$, 得到 $\angle 2 = \angle D = 45^\circ$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle 4 = \angle 6 = 67.5^\circ$, 由平角的定义得到 $\angle DEC = 180^\circ - \angle 6 = 112.5^\circ$.

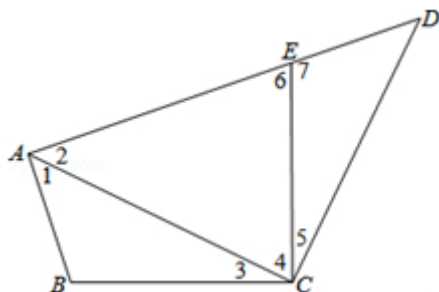
答案: $\because \angle BCE = \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5$,

$\therefore \angle 3 = \angle 5$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 中,
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle D \\ \angle 3 = \angle 5 \\ BC = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC$ (AAS),
 $\therefore AC=CD$;
 (2) $\because \angle ACD=90^\circ$, $AC=CD$,
 $\therefore \angle 2=\angle D=45^\circ$,
 $\because AE=AC$,
 $\therefore \angle 4=\angle 6=67.5^\circ$,
 $\therefore \angle DEC=180^\circ - \angle 6=112.5^\circ$.



23. 实践操作

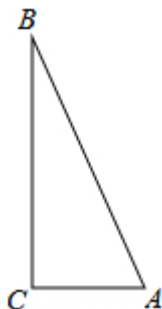
如图， $\triangle ABC$ 是直角三角形， $\angle ACB=90^\circ$ ，利用直尺和圆规按下列要求作图，并在图中标明相应的字母。(保留作图痕迹，不写作法)

- (1) 作 $\angle BAC$ 的平分线，交 BC 于点 O ;
- (2) 以 O 为圆心， OC 为半径作圆.

综合运用

在你所作的图中，

- (1) AB 与 $\odot O$ 的位置关系是_____；(直接写出答案)
- (2) 若 $AC=5$, $BC=12$, 求 $\odot O$ 的半径.

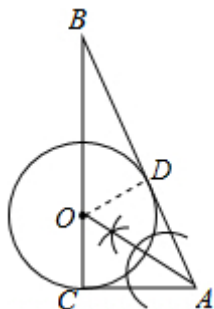


解析：实践操作：根据题意画出图形即可；

综合运用：(1) 根据角平分线上的点到角两边的距离相等可得 AB 与 $\odot O$ 的位置关系是相切；

(2) 首先根据勾股定理计算出 AB 的长，再设半径为 x ，则 $OC=OD=x$ ， $BO=(12-x)$ 再次利用勾股定理可得方程 $x^2+8^2=(12-x)^2$ ，再解方程即可.

答案：实践操作，如图所示：



综合运用：

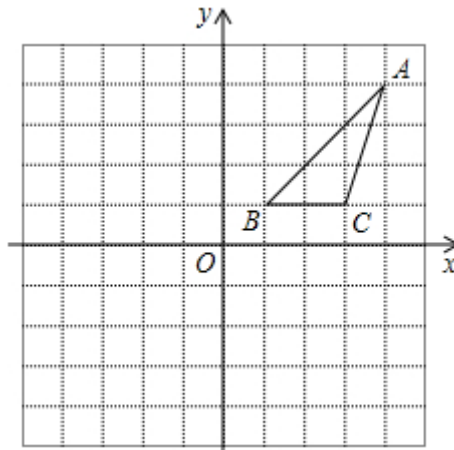
- (1) AB 与 $\odot O$ 的位置关系是相切.
- $\because AO$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore DO=CO$,
 $\because \angle ACB=90^\circ$,
 $\therefore \angle ADO=90^\circ$,
 $\therefore AB$ 与 $\odot O$ 的位置关系是相切;
 (2) $\because AC=5, BC=12$,
 $\therefore AD=5, AB=\sqrt{5^2+12^2}=13$,
 $\therefore DB=AB-AD=13-5=8$,
 设半径为 x , 则 $OC=OD=x, BO=(12-x)$
 $x^2+8^2=(12-x)^2$,
 解得: $x=\frac{10}{3}$.

答: $\odot O$ 的半径为 $\frac{10}{3}$.

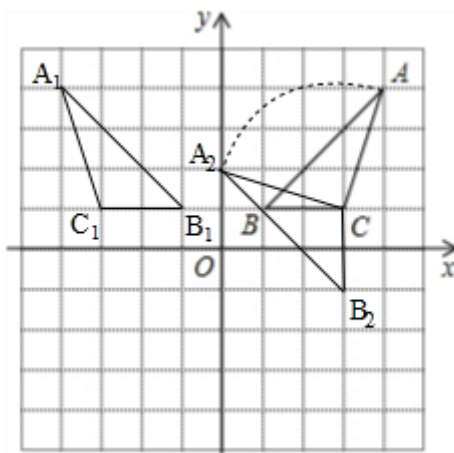
24. 在正方形网格中, 建立如图所示的平面直角坐标系 xOy , $\triangle ABC$ 的三个顶点都在格点上, 点 A 的坐标 $(4, 4)$, 请解答下列问题:

- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$, 并写出点 A_1, B_1, C_1 的坐标;
- (2) 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° , 画出旋转后的 $\triangle A_2B_2C_2$, 并求出点 A 到 A_2 的路径长.



解析: (1) 分别作出点 A, B, C 关于 y 轴的对称点, 再顺次连接可得;
 (2) 分别作出点 A, B 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到其对应点, 再顺次连接可得, 绕后利用弧长公式计算可得答案.

答案: (1) 如图所示, $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求,



$A_1(-4, 4), B_1(-1, 1), C_1(-3, 1)$;

(2) 如图所示, $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求,

$$\because CA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \angle ACA_2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{点 A 到 } A_2 \text{ 的路径长为 } \frac{90 \cdot \pi \cdot \sqrt{10}}{180} = \frac{\sqrt{10}}{2} \pi.$$

25. 某地 2014 年为做好“精准扶贫”，投入资金 1280 万元用于异地安置，并规划投入资金逐年增加，2016 年在 2014 年的基础上增加投入资金 1600 万元.

(1) 从 2014 年到 2016 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为多少？

(2) 在 2016 年异地安置的具体实施中，该地计划投入资金不低于 500 万元用于优先搬迁租房奖励，规定前 1000 户(含第 1000 户)每户每天奖励 8 元，1000 户以后每户每天补助 5 元，按租房 400 天计算，试求今年该地至少有多少户享受到优先搬迁租房奖励？

解析：(1) 设年平均增长率为 x ，根据：2014 年投入资金 $\times (1 + \text{增长率})^2 = 2016$ 年投入资金，列出方程求解可得；

(2) 设今年该地有 a 户享受到优先搬迁租房奖励，根据：前 1000 户获得的奖励总数 + 1000 户以后获得的奖励总和 ≥ 500 万，列不等式求解可得.

答案：(1) 设该地投入异地安置资金的年平均增长率为 x ，根据题意，

$$\text{得：} 1280(1+x)^2 = 1280 + 1600,$$

$$\text{解得：} x = 0.5 \text{ 或 } x = -2.5 \text{ (舍)},$$

答：从 2014 年到 2016 年，该地投入异地安置资金的年平均增长率为 50%；

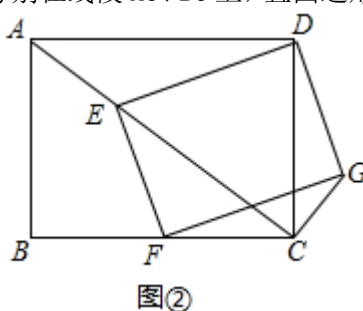
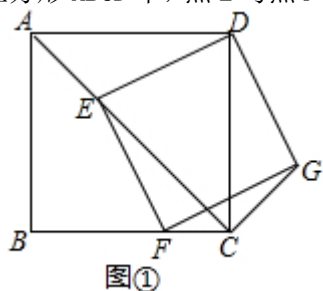
(2) 设今年该地有 a 户享受到优先搬迁租房奖励，根据题意，

$$\text{得：} 1000 \times 8 \times 400 + (a - 1000) \times 5 \times 400 \geq 5000000,$$

$$\text{解得：} a \geq 1900,$$

答：今年该地至少有 1900 户享受到优先搬迁租房奖励.

26. 如图①，在正方形 ABCD 中，点 E 与点 F 分别在线段 AC、BC 上，且四边形 DEFG 是正方形.



(1) 试探究线段 AE 与 CG 的关系，并说明理由.

(2) 如图②若将条件中的四边形 ABCD 与四边形 DEFG 由正方形改为矩形， $AB=3$ ， $BC=4$.

① 线段 AE、CG 在 (1) 中的关系仍然成立吗？若成立，请证明，若不成立，请写出你认为正确的关系，并说明理由.

② 当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，求 CG 的长.

解析：(1) 如图 1，根据 SAS 证明 $\triangle ADE \cong \triangle DGC$ ，可得 $AE=CG$ ，及 $\angle ACG=90^\circ$ ，则 $AG \perp AC$ ，所以 $AE \perp CG$ ；

(2) ① 如图 2，连接 EG、DF 交于点 O，连接 OC，根据矩形的性质和直角三角形斜边中线的性质得： $OE=OF=OG=OD=OC$ ，可知 D、E、F、C、G 在以点 O 为圆心的圆上，根据直径所对的圆周角是直角得， $\angle ECG=90^\circ$ ，再证明 $\triangle ADE \sim \triangle CDG$ ，得 $\frac{CG}{AE} = \frac{DC}{AD} = \frac{3}{4}$ ；

$$\text{得 } \frac{CG}{AE} = \frac{DC}{AD} = \frac{3}{4};$$

② 先根据 $\frac{CG}{AE} = \frac{3}{4}$ ，设 $CG=3x$ ， $AE=4x$ ，

分三种情况：

(i) 当 $ED=EC$ 时，如图 3，根据等腰三角形三线合一的性质和中位线定理可得 x 的值，从而计算 CG 的长；

(ii) 当 $DE=DC=3$ 时，如图 4，证明 $\triangle CDH \sim \triangle CAD$ ，列比例式可得 CH 的长，从而根据 $AE=4x=AC$

- $2CH = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$, 求得 x 的值, 同理可得 CG 的长;

(iii) 当 $CD=CE=3$ 时, 如图 5, 根据 $AE=2$, 可得 x 的值, 同理可得 CG 的长.

答案: (1) $AE=CG$, $AE \perp CG$,

理由是: 如图 1,

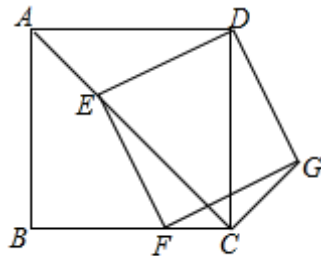


图1

\because 四边形 $EFGD$ 是正方形,

$\therefore DE=DG$, $\angle EDC + \angle CDG = 90^\circ$,

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$\therefore AB=CD$, $\angle ADE + \angle EDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE = \angle CDG$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG$,

$\therefore AE=CG$, $\angle DCG = \angle DAE = 45^\circ$,

$\because \angle ACD = 45^\circ$,

$\therefore \angle ACG = 90^\circ$,

$\therefore CG \perp AC$, 即 $AE \perp CG$;

(2) ①位置关系保持不变, 数量关系变为 $\frac{CG}{AE} = \frac{3}{4}$;

理由是: 如图 2, 连接 EG 、 DF 交于点 O , 连接 OC ,

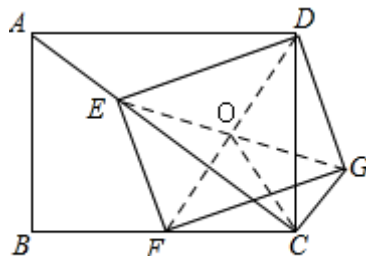


图2

\because 四边形 $EFGD$ 是矩形,

$\therefore OE=OF=OG=OD$,

$\text{Rt} \triangle DGF$ 中, $OG=OF$,

$\text{Rt} \triangle DCF$ 中, $OC=OF$,

$\therefore OE=OF=OG=OD=OC$,

$\therefore D$ 、 E 、 F 、 C 、 G 在以点 O 为圆心的圆上,

$\because \angle DGF = 90^\circ$,

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\because DF=EG$,

$\therefore EG$ 也是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ECG = 90^\circ$, 即 $AE \perp CG$,

$\therefore \angle DCG + \angle ECD = 90^\circ$,

$\because \angle DAC + \angle ECD = 90^\circ$,

$\therefore \angle DAC = \angle DCG$,

$\because \angle ADE = \angle CDG$,

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CDG$,

$$\therefore \frac{CG}{AE} = \frac{DC}{AD} = \frac{3}{4};$$

$$\textcircled{2} \text{由} \textcircled{1} \text{知: } \frac{CG}{AE} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{设 } CG=3x, AE=4x,$$

分三种情况:

(i) 当 $ED=EC$ 时, 如图 3, 过 E 作 $EH \perp CD$ 于 H, 则 $EH \parallel AD$,

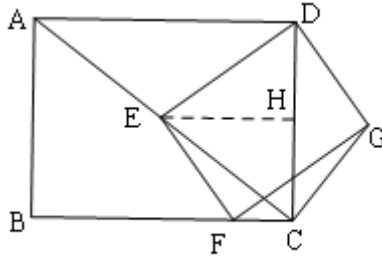


图3

$$\therefore DH=CH,$$

$$\therefore AE=EC=4x,$$

由勾股定理得: $AC=5$,

$$\therefore 8x=5,$$

$$x = \frac{5}{8},$$

$$\therefore CG=3x = \frac{15}{8};$$

(ii) 当 $DE=DC=3$ 时, 如图 4, 过 D 作 $DH \perp AC$ 于 H,

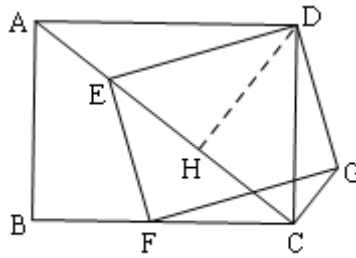


图4

$$\therefore EH=CH,$$

$$\therefore \angle CDH = \angle CAD, \angle CHD = \angle CDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDH \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{CD}{CA} = \frac{CH}{CD},$$

$$\therefore \frac{3}{5} = \frac{CH}{3}, CH = \frac{9}{5},$$

$$\therefore AE = 4x = AC - 2CH = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5},$$

$$x = \frac{7}{20},$$

$$\therefore CG = 3x = \frac{21}{20},$$

(iii) 当 $CD=CE=3$ 时, 如图 5,

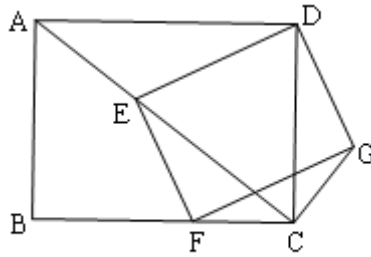


图5

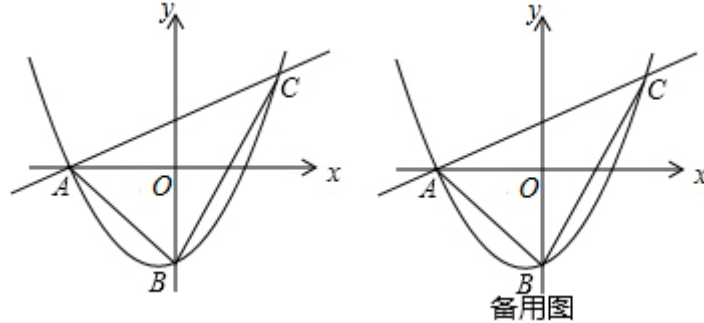
$$\therefore AE=4x=5-3=2,$$

$$x=\frac{1}{2},$$

$$\therefore CG=3x=\frac{3}{2},$$

综上所述，当 $\triangle CDE$ 为等腰三角形时，CG的长为 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{21}{20}$ 或 $\frac{15}{8}$ 。

27. 已知，如图，二次函数 $y=ax^2+bx-6$ 的图象分别与x轴与y轴相交于点A(-6, 0)、点B，点C(6, 6)也在函数图象上。



(1) 求该二次函数的解析式。

(2) 动点P从点B出发，沿着y轴的正方向运动，是否存在某一位置使得 $\angle OAP+\angle OAC=45^\circ$ ？若存在，请求出点P的坐标；若不存在，请说明理由。

(3) 点Q为直线AC下方抛物线上一点，当以点A、B、C、Q为顶点的四边形的面积最大时，求出点Q的坐标。

解析：(1) 利用待定系数法求抛物线解析式；

(2) 如图1，当点P在OB上，作 $PH\perp AB$ 于H，直线AC交y轴于D，设 $P(0, t)$ ，先利用待定系数法得到直线AC的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$ ，再确定 $D(0, 3)$ ， $B(0, -6)$ ，利用 $\triangle OAB$ 为等腰

直角三角形得到 $AB=6\sqrt{2}$ ， $\angle OAB=45^\circ$ ，利用 $\triangle PBH$ 为等腰直角三角形得到 $PH=BH=\frac{\sqrt{2}}{2}(t+6)$ ，

接着证明 $Rt\triangle PAH\sim Rt\triangle DAO$ ，利用相似比可求出t，从而得到此时P点坐标；然后利用对称性确定刚求出的点关于x轴的对称点也满足条件；

(3) 作 $QM\parallel y$ 轴交直线AC于点M，连接DQ，设 $Q(x, \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-6)$ ($-6 < x < 6$)，则 $M(x, \frac{1}{2}x+3)$ 则 $MQ=-\frac{1}{4}x^2+9$ ，讨论：当 $0\leq x < 6$ 时，如图2， $S_{\text{四边形}ABQC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDQ}+S_{\triangle QDC}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x+54$ ；当 $-6 < x < 0$ 时，如图3， $S_{\text{四边形}AQBC}=S_{\triangle CBD}+S_{\triangle BDQ}+S_{\triangle QDA}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x+54$ ，

然后分别利用二次函数的性质求出四边形的面积最大时对应的Q点坐标。

答案：(1)把A(-6, 0), C(6, 6)代入 $y=ax^2+bx-6$ 得 $\begin{cases} 36a-6b-6=0 \\ 36a+6b-6=6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$,

\therefore 抛物线解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-6$;

(2)存在.

如图1, 当点P在OB上, 作 $PH\perp AB$ 于H, 直线AC交y轴于D, 设 $P(0, t)$,

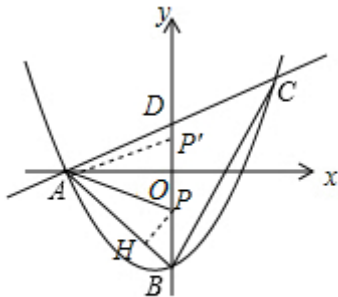


图1

设直线AC的解析式为 $y=mx+n$,

把A(-6, 0), C(6, 6)代入得 $\begin{cases} -6m+n=0 \\ 6m+n=6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} m=\frac{1}{2} \\ n=3 \end{cases}$,

\therefore 直线AC的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$,

当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{2}x+3=3$, 则 $D(0, 3)$,

当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-6$, 则 $B(0, -6)$,

$\therefore OA=OB=6$,

$\therefore \triangle OAB$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AB=6\sqrt{2}$, $\angle OAB=45^\circ$,

$\therefore \triangle PBH$ 为等腰直角三角形,

$\therefore PH=BH=\frac{\sqrt{2}}{2}(t+6)$,

$\therefore \angle OAP+\angle OAC=45^\circ$, $\angle OAP+\angle PAB=45^\circ$,

$\therefore \angle PAB=\angle OAC$,

$\therefore \text{Rt}\triangle PAH\sim\text{Rt}\triangle DAO$,

$\therefore \frac{PH}{OD}=\frac{AH}{OA}$, 即 $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(t+6)}{3}=\frac{6\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}(t+6)}{6}$, 解得 $t=-2$, 此时P点坐标为(0, -2),

点P关于x轴的对称点P'的坐标为(0, 2),

$\therefore \angle OAP'=\angle OAP$,

$\therefore \angle OAP'+\angle OAC=45^\circ$,

\therefore 点P'满足条件,

综上所述, P点坐标为(0, 2)或(0, -2);

(3)作 $QM\parallel y$ 轴交直线AC于点M, 连接DQ,

设 $Q(x, \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-6)$ ($-6<x<6$), 则 $M(x, \frac{1}{2}x+3)$

$$\therefore MQ = \frac{1}{2}x + 3 - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 6\right) = -\frac{1}{4}x^2 + 9,$$

当 $0 \leq x < 6$ 时, 如图 2,

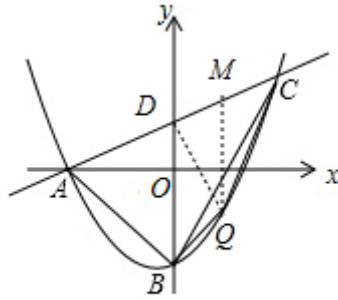


图2

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}ABQC} &= S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDQ} + S_{\triangle QDC} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + 9\right) \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 54 \\ &= -\frac{3}{4}(x-3)^2 + \frac{243}{4}, \end{aligned}$$

当 $x=3$ 时, $S_{\text{四边形}ABQC}$ 的最大值为 $\frac{243}{4}$, 此时 $Q(3, -\frac{9}{4})$,

当 $-6 < x < 0$ 时, 如图 3,

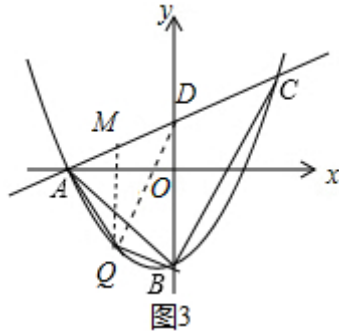


图3

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形}AQBC} &= S_{\triangle CBD} + S_{\triangle BDQ} + S_{\triangle QDA} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (-x) + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + 9\right) \\ &= -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + 54 \\ &= -\frac{3}{4}(x+3)^2 + \frac{243}{4}, \end{aligned}$$

当 $x=-3$ 时, $S_{\text{四边形}AQBC}$ 的最大值为 $\frac{243}{4}$, 此时 $Q(-3, -\frac{21}{4})$,

$\therefore Q$ 点的坐标为 $(3, -\frac{9}{4})$ 或 $(-3, -\frac{21}{4})$.