2015年浙江省高考数学试卷（理科）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分2015年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学（理科）

1.（5分）（2015•浙江）已知集合$P=\{x|x^2-2x\geqslant 0\}$，$Q=\{x|1<x\leqslant 2\}$，则（$\complement_R P$）∩Q=（　　）

A.[0，1）

B.（0，2]

C.（1，2）

D.[1，2]

解析：由P中不等式变形得：x（x－2）≥0，

解得：x≤0或x≥2，即P=（－∞，0]∪[2，+∞），

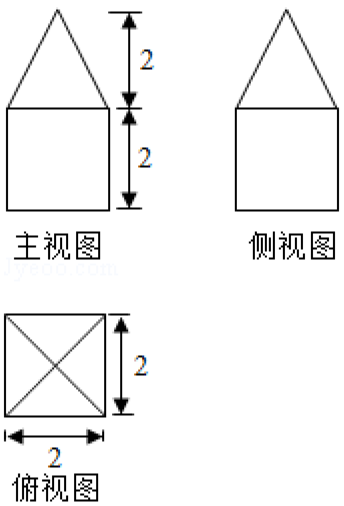
∴$\complement_R P$=（0，2），

∵Q=（1，2]，

∴（$\complement_R P$）∩Q=（1，2），

答案：C．

2.（5分）（2015•浙江）某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是（　　）



A. $8cm^3$

B. $12cm^3$

C. $\frac{32}{3}cm^3$

D. $\frac{40}{3}cm^3$

解析：由三视图可知几何体是下部为棱长为2的正方体，上部是底面为边长2的正方形奥为2的正四棱锥，

所求几何体的体积为：$2^3+\frac{1}{3}\times 2\times 2\times 2=\frac{32}{3}cm^3$.

答案：C

3．（5 分）（2015•浙江）已知$\{a_n\}$是等差数列，公差 d 不为零，前 n 项和是S_n，若a_3，a_4，a_8成等比数列，则（　　）

A. $a_1d>0$，$dS_4>0$

B. $a_1d<0$，$dS_4<0$

C. $a_1d>0$，$dS_4<0$

D. $a_1d<0$，$dS_4>0$

解析：设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，则$a_3=a_1+2d$，$a_4=a_1+3d$，$a_8=a_1+7d$，

由a_3，a_4，a_8成等比数列，得$(a_1+3d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d)$，整理得：

$3a_1d=-5d^2$.

∵$d\neq 0$，∴ $d=-\frac{3}{5}a_1$，

∴ $a_1d=-\frac{3}{5}a_1^2<0$，

$dS_4=-\frac{3}{5}a_1\left(4a_1+\frac{4\times 3\left(-\frac{3}{5}a_1\right)}{2}\right)=-\frac{3}{5}a_1\left(4a_1-\frac{18}{5}a_1\right)=-\frac{6a_1^2}{25}<0.$

答案：B

4．（5 分）（2015•浙江）命题“$\forall n\in N^*$，$f(n)\in N^*$且$f(n)\leq n$”的否定形式是（　　）

A. $\forall n\in N^*$，$f(n)\notin N^*$且$f(n)>n$

B. $\forall n\in N^*$，$f(n)\notin N^*$或$f(n)>n$

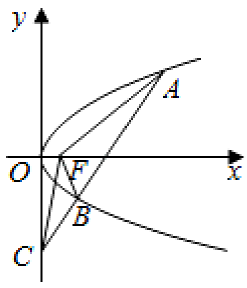
C. $\exists n_0\in N^*$，$f(n_0)\notin N^*$且$f(n_0)>n_0$

D. $\exists n_0\in N^*$，$f(n_0)\notin N^*$或$f(n_0)>n$

解析：命题为全称命题，则命题的否定为：$\exists n_0\in N^*$，$f(n_0)\notin N^*$或$f(n_0)>n_0$，

答案：D

5．（5 分）（2015•浙江）如图，设抛物线$y^2=4x$的焦点为 F，不经过焦点的直线上有三个不同的点 A，B，C，其中点 A，B 在抛物线上，点 C 在 y 轴上，则△BCF 与△ACF 的面积之比是（　　）



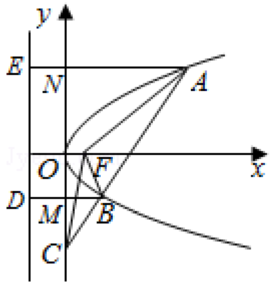
A. $\frac{|BF|-1}{|AF|-1}$

B. $\frac{|BF|^2-1}{|AF|^2-1}$

C. $\frac{|BF|+1}{|AF|+1}$

D. $\dfrac{|BF|^2+1}{|AF|^2+1}$

解析：如图所示，抛物线的准线 DE 的方程为 x=－1，



过 A，B 分别作 AE⊥DE 于 E，交 y 轴于 N，BD⊥DE 于 E，交 y 轴于 M，

由抛物线的定义知 BF=BD，AF=AE，则|BM|=|BD|－1=|BF|－1，|AN|=|AE|－1=|AF|－1，

则 $\dfrac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle ACF}}=\dfrac{|BC|}{|AC|}=\dfrac{|BM|}{|AN|}=\dfrac{|BF|-1}{|AF|-1}$，

答案：A

6.（5 分）（2015•浙江）设 A，B 是有限集，定义：d（A，B）=card（A∪B）－card（A∩B），其中 card（A）表示有限集 A 中的元素个数（　　）

命题①：对任意有限集 A，B，“A≠B”是“d（A，B）＞0”的充分必要条件；

命题②：对任意有限集 A，B，C，d（A，C）≤d（A，B）+d（B，C）

A. 命题①和命题②都成立

B. 命题①和命题②都不成立

C. 命题①成立，命题②不成立

D. 命题①不成立，命题②成立

解析：命题①：对任意有限集 A，B，若“A≠B”，则 A∪B≠A∩B，则 card（A∪B）＞card（A∩B），故“d（A，B）＞0”成立，

若 d（A，B）＞0”，则 card（A∪B）＞card（A∩B），则 A∪B≠A∩B，故 A≠B 成立，故命题①成立，

命题②，d（A，B）=card（A∪B）－card（A∩B），d（B，C）=card（B∪C）－card（B∩C），

∴d（A，B）+d（B，C）=card（A∪B）－card（A∩B）+card（B∪C）－card（B∩C）=[card（A∪B）+card（B∪C）]－[card（A∩B）+card（B∩C）]

≥card（A∪C）－card（A∩C）=d（A，C），故命题②成立，

答案：A

7.（5 分）（2015•浙江）存在函数 f（x）满足，对任意 x∈R 都有（　　）

A. f（sin2x）=sinx

B. f（sin2x）=x^2+x

C. f（x^2+1）=|x+1|

D. f（x^2+2x）=|x+1|

解析：A. 取 x=0，则 sin2x=0，

∴f（0）=0；

取 x=$\frac{\pi}{2}$，则 sin2x=0，

∴f（0）=1；

∴f（0）=0，和 1，不符合函数的定义；

∴不存在函数 f（x），对任意 x∈R 都有 f（sin2x）=sinx；

B.取 x=0，则 f（0）=0；

取 x=π，则 f（0）=$\pi^2+\pi$；

∴f（0）有两个值，不符合函数的定义；

∴该选项错误；

C.取 x=1，则 f（2）=2，取 x=－1，则 f（2）=0；

这样 f（2）有两个值，不符合函数的定义；

∴该选项错误；

D.令|x+1|=t，t≥0，则 f（t^2－1）=t；

令 t^2－1=x，则 t=$\sqrt{x+1}$；

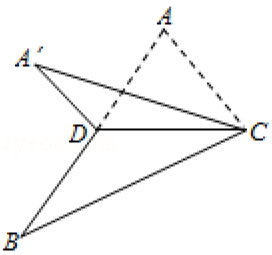
∴$f(x)=\sqrt{x+1}$；

即存在函数 f（x）=$\sqrt{x+1}$，对任意 x∈R，都有 f（x^2+2x）=|x+1|；

∴该选项正确.

答案：D

8.（5 分）（2015•浙江）如图，已知△ABC，D 是 AB 的中点，沿直线 CD 将△ACD 折成△A′CD，所成二面角 A′－CD－B 的平面角为 α，则（　　）



A.∠A′DB≤α

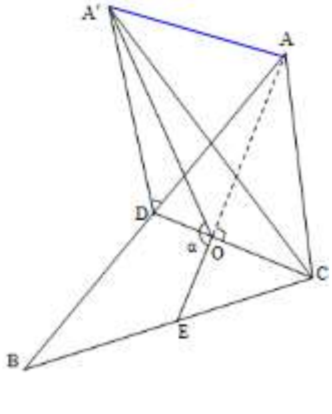
B.∠A′DB≥α

C.∠A′CB≤α

D.∠A′CB≥α

解析：①当 AC=BC 时，∠A′DB=α；

②当 AC≠BC 时，如图，点 A′投影在 OE 上，



α=∠A′OE，连结 AA′，

易得∠ADA′＜∠AOA′，

∴∠A′DB＞∠A′OE，即∠A′DB＞α
综上所述，∠A′DB⩾α，
答案：B

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

9.（6 分）（2015•浙江）双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$的焦距是______，渐近线方程是________.

解析：双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$中，$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$，

∴焦距是$2c=2\sqrt{3}$，渐近线方程是$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

答案：$2\sqrt{3}$；$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

10.（6 分）（2015•浙江）已知函数$f(x)=\begin{cases}x+\frac{2}{x}-3，x\geqslant 1\\ \lg(x^2+1)，x<1\end{cases}$，则$f(f(-3))=$_______，$f(x)$的最小值是_______.

解析：∵$f(x)=\begin{cases}x+\frac{2}{x}-3，x\geqslant 1\\ \lg(x^2+1)，x<1\end{cases}$，

∴$f(-3)=\lg 10=1$，
则$f(f(-3))=f(1)=0$，
当$x\geqslant 1$时，$f(x)=x+\frac{2}{x}-3\geqslant 2\sqrt{2}-3$，即最小值$2\sqrt{2}-3$，
当$x<1$时，$f(x)=\lg(x^2+1)<\lg 2$无最小值，
故$f(x)$的最小值是$2\sqrt{2}-3$.
答案：0；$2\sqrt{2}-3$.

11.（6 分）（2015•浙江）函数$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$的最小正周期是______，单调递减区间是__________.
解析：化简可得$f(x)=\sin^2x+\sin x\cos x+1$
$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x+1$
$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$，
∴原函数的最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，
由$2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$可得$k\pi+\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{7\pi}{8}$，

∴函数的单调递减区间为$[k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{7\pi}{8}]$（k∈Z）

答案：π；$[k\pi+\frac{3\pi}{8}, k\pi+\frac{7\pi}{8}]$（k∈Z）

12．（4 分）（2015•浙江）若 $a=\log_4 3$，则 $2^a+2^{-a}=$________.

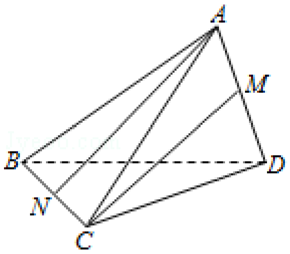
解析：∵$a=\log_4 3$，可知 $4^a=3$，

即 $2^a=\sqrt{3}$，

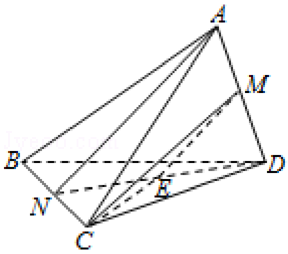
所以 $2^a+2^{-a}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

13．（4 分）（2015•浙江）如图，三棱锥 A－BCD 中，AB=AC=BD=CD=3，AD=BC=2，点 M，N 分别是 AD，BC 的中点，则异面直线 AN，CM 所成的角的余弦值是________.



解析：连结 ND，取 ND 的中点为：E，连结 ME，则 ME∥AN，异面直线 AN，CM 所成的角就是∠EMC，



∵$AN=2\sqrt{2}$，

∴$ME=\sqrt{2}=EN$，$MC=2\sqrt{2}$，

又∵EN⊥NC，∴$EC=\sqrt{EN^2+NC^2}=\sqrt{3}$，

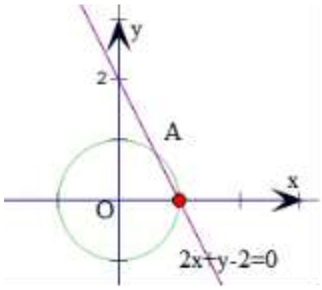
∴$\cos\angle EMC=\frac{EM^2+MC^2-EC^2}{2EM\cdot MC}=\frac{2+8-3}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{7}{8}$.

答案：$\frac{7}{8}$

14．（4 分）（2015•浙江）若实数 x，y 满足 $x^2+y^2\leqslant 1$，则 $|2x+y-2|+|6-x-3y|$ 的最小值是________.

解析：由 $x^2+y^2\leqslant 1$，可得 $6-x-3y>0$，即 $|6-x-3y|=6-x-3y$，

如图直线 $2x+y-2=0$ 将圆 $x^2+y^2=1$ 分成两部分，



在直线的上方（含直线），即有 $2x+y-2\geqslant 0$，即 $|2+y-2|=2x+y-2$，
此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=(2x+y-2)+(6-x-3y)=x-2y+4$，
利用线性规划可得在 A（$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）处取得最小值 3；
在直线的下方（含直线），即有 $2x+y-2\leqslant 0$，
即 $|2+y-2|=-(2x+y-2)$，
此时 $|2x+y-2|+|6-x-3y|=-(2x+y-2)+(6-x-3y)=8-3x-4y$，
利用线性规划可得在 A（$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$）处取得最小值 3.
综上可得，当 $x=\frac{3}{5}$，$y=\frac{4}{5}$时，$|2x+y-2|+|6-x-3y|$的最小值为 3.
答案：3

15.（6 分）（2015•浙江）已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$是空间单位向量，$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}$，若空间向量$\overrightarrow{b}$满足$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=2$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=\frac{5}{2}$，且对于任意 x，y∈R，

$|\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})|\geqslant|\overrightarrow{b}-(x_0\overrightarrow{e_1}+y_0\overrightarrow{e_2})|=1$（$\overrightarrow{x_0，y_0\in R)}$，则 x_0=________，y_0=_______，$|\overrightarrow{b}|$=_________.

解析：∵$\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}=|\overrightarrow{e_1}||\overrightarrow{e_2}|\cos<\overrightarrow{e_1}，\overrightarrow{e_2}>=\cos<\overrightarrow{e_1}，\overrightarrow{e_2}>=\frac{1}{2}$

∴$<\overrightarrow{e_1}，\overrightarrow{e_2}>=\frac{\pi}{3}$，不妨设$\overrightarrow{e_1}$=（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，0），$\overrightarrow{e_2}$=（1，0，0），$\overrightarrow{b}$=（m，n，t），

则由题意可知$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}m+\frac{\sqrt{3}}{2}n=2$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{e_2}=m=\frac{5}{2}$，解得 $m=\frac{5}{2}$，$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\overrightarrow{b}$=（$\frac{5}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$，t），

∵$\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y，\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x，t)$，

∴$|\overrightarrow{b}-(x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2})|^2=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}x-y)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+t^2$

$=x^2+xy+y^2-4x-5y+t^2+7=(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$，

由题意当 $x=x_0=1$，$y=y_0=2$ 时，$(x+\frac{y-4}{2})^2+\frac{3}{4}(y-2)^2+t^2$取最小值 1，

此时 $t^2=1$，故 $|\vec{b}|=\sqrt{(\frac{5}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+t^2}=2\sqrt{2}$

答案：1；2；$2\sqrt{2}$

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16.（14 分）（2015•浙江）在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $A=\frac{\pi}{4}$，$b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$.

(1) 求 tanC 的值；

(2) 若△ABC 的面积为 3，求 b 的值.

解析：

(1) 由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$，已知 $b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$. 可得 $b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}$，$a=\frac{\sqrt{10}}{4}c$. 利用余弦定理可得 cosC. 可得 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}$，即可得出 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}$.

(2) 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=3$，可得 c，即可得出 b.

答案：

(1) ∵$A=\frac{\pi}{4}$，∴由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{4}$，

∴$b^2-a^2=\sqrt{2}bc-c^2$，

又 $b^2-a^2=\frac{1}{2}c^2$.

∴$\sqrt{2}bc-c^2=\frac{1}{2}c^2$.

∴$\sqrt{2}b=\frac{3}{2}c$. 可得 $b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}$，

∴$a^2=b^2-\frac{1}{2}c^2=\frac{5}{8}c^2$，即 $a=\frac{\sqrt{10}}{4}c$.

∴$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{5}{8}c^2+\frac{9}{8}c^2-c^2}{2\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

∵C∈（0，π），

∴$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∴$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=2$.

(2) ∵ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}c\times\frac{3\sqrt{2}}{4}c\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=3$，

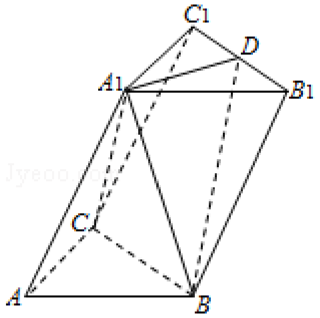
解得 $c=2\sqrt{2}$.

$\therefore b=\frac{3\sqrt{2}c}{4}=3.$

17.（15分）（2015•浙江）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=2$，$A_1A=4$，A_1 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点，D 是 B_1C_1 的中点.

(1)证明：$A_1D\perp$ 平面 A_1BC；

(2)求二面角 A_1-BD-B_1 的平面角的余弦值.



解析：

(1)以 BC 中点 O 为坐标原点，以 OB、OA、OA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建系，通过 $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 及线面垂直的判定定理即得结论；

(2)所求值即为平面 A_1BD 的法向量与平面 B_1BD 的法向量的夹角的余弦值的绝对值的相反数，计算即可.

答案：

(1)证明：如图，以 BC 中点 O 为坐标原点，以 OB、OA、OA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建系.

则 $BC=\sqrt{2}AC=2\sqrt{2}$，$A_1O=\sqrt{AA_1^2-AO^2}=\sqrt{14}$，

易知 $A_1(0,0,\sqrt{14})$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(-\sqrt{2},0,0)$，

$A(0,\sqrt{2},0)$，$D(0,-\sqrt{2},\sqrt{14})$，$B_1(\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{14})$，

$\overrightarrow{A_1D}=(0,-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{BD}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{14})$，

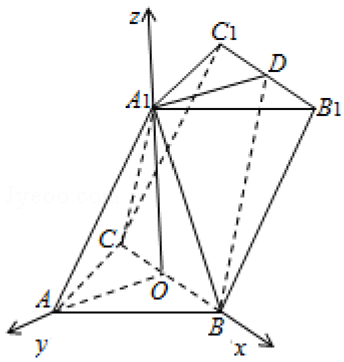
$\overrightarrow{B_1D}=(-\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-2\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{OA_1}=(0,0,\sqrt{14})$，

$\because \overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0$，$\therefore A_1D\perp OA_1$，

又$\because \overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$\therefore A_1D\perp BC$，

又$\because OA_1\cap BC=O$，$\therefore A_1D\perp$ 平面 A_1BC；

(2)设平面 A_1BD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，



由$\begin{cases}\overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{A_1D}=0\\ \overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\sqrt{2}y=0\\ -\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0\end{cases}$，

取 z=1，得$\overrightarrow{m}$=（$\sqrt{7}$，0，1），

设平面 B_1BD 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（x，y，z），

由$\begin{cases}\overrightarrow{n}\bullet\overrightarrow{B_1D}=0\\ \overrightarrow{n}\bullet\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\sqrt{14}z=0\\ -\sqrt{2}x=0\end{cases}$，

取 z=1，得$\overrightarrow{n}$=（0，$\sqrt{7}$，1），

∴$\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{8}$,

又∵该二面角为钝角，

∴二面角 A_1-BD-B_1 的平面角的余弦值为$-\dfrac{1}{8}$.

18.（15 分）（2015•浙江）已知函数 f（x）=x^2+ax+b（a，b∈R），记 M（a，b）是|f（x）|在区间[－1，1]上的最大值.

(1)证明：当|a|≥2 时，M（a，b）≥2；

(2)当 a，b 满足 M（a，b）≤2 时，求|a|+|b|的最大值.

解析：

(1)明确二次函数的对称轴，区间的端点值，由 a 的范围明确函数的单调性，结合已知以及三角不等式变形所求得到证明；

(2)讨论 a=b=0 以及分析 M(a,b)≤2 得到－3≤a+b≤1 且－3≤b－a≤1,进一步求出|a|+|b|的求值.

答案：

(1)由已知可得 f(1)=1+a+b，f(-1)=1－a+b，对称轴为 $x=-\dfrac{a}{2}$,

因为|a|≥2，所以 $-\dfrac{a}{2}\leqslant-1$或 $-\dfrac{a}{2}\geqslant1$，

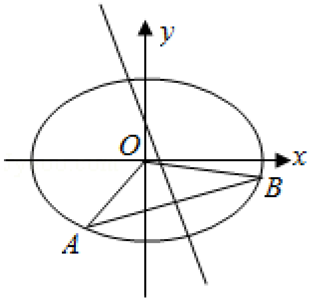
所以函数 f（x）在[－1，1]上单调，

所以M（a，b）=max{|f（1），|f（－1）|}=max{|1+a+b|，|1－a+b|}，

所以M（a，b）$\geqslant\frac{1}{2}$（|1+a+b|+|1－a+b|）$\geqslant\frac{1}{2}$|（1+a+b）－（1－a+b）|$\geqslant\frac{1}{2}$|2a|≥2；

(2)当a=b=0时，|a|+|b|=0又|a|+|b|≥0，所以0为最小值，符合题意；
又对任意x∈[－1，1].有－2≤x^2+ax+b≤2得到－3≤a+b≤1且－3≤b－a≤1，易知|a|+|b|=max{|a－b|，|a+b|}=3，在b=－1，a=2时符合题意，
所以|a|+|b|的最大值为3.

19.（15分）（2015•浙江）已知椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上两个不同的点A，B关于直线y=mx+$\frac{1}{2}$对称.
(1)求实数m的取值范围；
(2)求△AOB面积的最大值（O为坐标原点）.



解析：
(1)由题意，可设直线AB的方程为x=－my+n，代入椭圆方程可得（m^2+2）y^2－2mny+n^2－2=0，设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.可得△>0，设线段AB的中点P（x_0，y_0），利用中点坐标公式及其根与系数的可得P，代入直线y=mx+$\frac{1}{2}$，可得$n=-\frac{m^2+2}{2m}$，代入△>0，即可解出.

(2)直线AB与x轴交点横坐标为n，可得$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|n||y_1-y_2|$，再利用均值不等式即可得出.

答案：
(1)由题意，可设直线AB的方程为x=－my+n，代入椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，可得（m^2+2）y^2－2mny+n^2－2=0，
设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.由题意，△=4m^2n^2－4（m^2+2）（n^2－2）=8（m^2－n^2+2）>0，

设线段AB的中点P（x_0，y_0），则$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{mn}{m^2+2}$.$x_0$=－m×$\frac{mn}{m^2+2}$+n=$\frac{2n}{m^2+2}$，

由于点P在直线y=mx+$\frac{1}{2}$上，∴$\frac{mn}{m^2+2}=\frac{2mn}{m^2+2}+\frac{1}{2}$，

∴$n=-\frac{m^2+2}{2m}$，代入△>0，可得3m^4+4m^2－4>0，

解得$m^2>\frac{2}{3}$，∴$m<-\frac{\sqrt{6}}{3}$或$m>\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(2)直线AB与x轴交点横坐标为n，

$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|n||y_1-y_2|=\frac{1}{2}|n|\cdot\frac{\sqrt{8(m^2-n^2+2)}}{m^2+2}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{n^2(m^2-n^2+2)}{(m^2+2)^2}}$,

由均值不等式可得：$n^2(m^2-n^2+2)\leqslant(\frac{n^2+m^2-n^2+2}{2})^2=\frac{(m^2+2)^2}{4}$,

$\therefore S_{\triangle AOB}\leqslant\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,当且仅当 $n^2=m^2-n^2+2$,即 $2n^2=m^2+2$,又∵ $n=-\frac{m^2+2}{2m}$,解得 $m=\pm\sqrt{2}$,

当且仅当 $m=\pm\sqrt{2}$时，$S_{\triangle AOB}$取得最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.（15 分）（2015•浙江）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{1}{2}$且 $a_{n+1}=a_n-a_n^2$（$n\in N^*$）

(1)证明：$1\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant2$（$n\in N^*$）;

(2)设数列$\{a_n^2\}$的前 n 项和为 S_n，证明$\frac{1}{2(n+2)}\leqslant\frac{S_n}{n}\leqslant\frac{1}{2(n+1)}$（$n\in N^*$）.

解析：

(1)通过题意易得 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$($n\in N^*$),利用 $a_n-a_{n+1}=a_n^2$可得$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant1$,利用$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_n-a_n^2}$

$=\frac{1}{1-a_n}\leqslant2$，即得结论;

(2)通过 $a_n^2=a_n-a_{n+1}$ 累加得 $S_n=\frac{1}{2}-a_{n+1}$，利用数学归纳法可证明$\frac{1}{1+n}\geqslant a_n\geqslant\frac{1}{2n}$（$n\geqslant2$），从

而$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}}{n}\geqslant\frac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}\geqslant\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}}{n}$，化简即得结论.

答案：

(1)由题意可知：$0<a_n\leqslant\frac{1}{2}$（$n\in N^*$），

又∵$a_2=a_1-a_1^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$,

$\therefore\frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$,

又∵$a_n-a_{n+1}=a_n^2$,

$\therefore a_n>a_{n+1}$,

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1$，

$\therefore \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n}{a_n-a_n^{\ 2}}=\dfrac{1}{1-a_n}\leqslant 2$，

$\therefore 1\leqslant \dfrac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 2$（$n\in N^*$）；

(2)由已知，$a_n^{\ 2}=a_n-a_{n+1}$，$a_{n-1}^{\ 2}=a_{-1}-a_n$，…，$a_1^{\ 2}=a_1-a_2$，

累加，得 $S_n=a_n^{\ 2}+a_{n-1}^{\ 2}+\cdots+a_1^{\ 2}=a_1-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}-a_{n+1}$，

易知当 n=1 时，要证式子显然成立；

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}$.

下面证明：$\dfrac{1}{1+n}\geqslant a_n\geqslant \dfrac{1}{2n}$（$n\geqslant 2$）.

易知当 n=2 时成立，假设当 n=k 时也成立，则 $a_{k+1}=-\left(a_k-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$,

由二次函数单调性知：$a_{n+1}\geqslant -\left(\dfrac{1}{2k}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2k-1}{4k^2}\geqslant \dfrac{1}{2(k+1)}$，

$a_{n+1}\leqslant -\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{k}{(k+1)^2}\leqslant \dfrac{1}{k+2}$,

$\therefore \dfrac{1}{2(k+1)}\leqslant \dfrac{1}{a_{k+1}}\leqslant \dfrac{1}{k+2}$，即当 n=k+1 时仍然成立，

故对 $n\geqslant 2$，均有 $\dfrac{1}{1+n}\geqslant a_n\geqslant \dfrac{1}{2n}$,

$\therefore \dfrac{1}{2(n+1)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}}{n}\geqslant \dfrac{\frac{1}{2}-a_{n+1}}{n}\geqslant \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}}{n}=\dfrac{1}{2(n+2)}$,

即 $\dfrac{1}{2(n+2)}\leqslant \dfrac{S_n}{n}\leqslant \dfrac{1}{2(n+1)}$（$n\in N^*$）.