

## 2018 年新疆乌鲁木齐市中考真题数学

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分)每题的选项中只有项符合题目要求，请在答题卡的相应位置填涂正确选项.

1.  $-2$  的相反数是( )

A.  $-2$

B.  $-\frac{1}{2}$

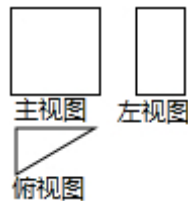
C.  $\frac{1}{2}$

D.  $2$

解析：直接利用相反数的定义进而分析得出答案.

答案：D.

2. 如图是某个几何体的三视图，该几何体是( )



A. 长方体

B. 正方体

C. 三棱柱

D. 圆柱

解析：A、长方体的三视图均为矩形，不符合题意；

B、正方体的三视图均为正方形，不符合题意；

C、三棱柱的主视图和左视图均为矩形，俯视图为三角形，符合题意；

D、圆柱的主视图和左视图均为矩形，俯视图为圆，不符合题意.

答案：C.

3. 下列运算正确的是( )

A.  $x^3+x^3=2x^6$

B.  $x^2 \cdot x^3=x^6$

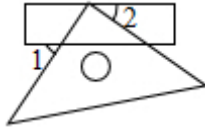
C.  $x^3 \div x=x^3$

D.  $(-2x^2)^3=-8x^6$

解析：根据合并同类项法则，同底数幂相乘，底数不变指数相加；同底数幂相除，底数不变指数相减；积的乘方法则：把每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；对各选项分析判断后利用排除法求解.

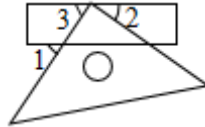
答案：D.

4. 如图把一个直角三角尺的直角顶点放在直尺的一边上，若  $\angle 1=50^\circ$ ，则  $\angle 2=( )$



- A.  $20^\circ$
- B.  $30^\circ$
- C.  $40^\circ$
- D.  $50^\circ$

解析：如图，



∵直尺对边互相平行，  
 ∴ $\angle 3 = \angle 1 = 50^\circ$ ，  
 ∴ $\angle 2 = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$ 。

答案：C.

5. 一个多边形的内角和是  $720^\circ$ ，这个多边形的边数是( )

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

解析：∵多边形的内角和公式为  $(n-2) \cdot 180^\circ$ ，

$$\therefore (n-2) \times 180^\circ = 720^\circ，$$

解得  $n=6$ ，

∴这个多边形的边数是 6.

答案：C.

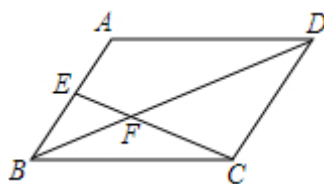
6. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，将点  $N(-1, -2)$  绕点  $O$  旋转  $180^\circ$ ，得到的对应点的坐标是( )

- A.  $(1, 2)$
- B.  $(-1, 2)$
- C.  $(-1, -2)$
- D.  $(1, -2)$

解析：根据题意可知点  $N$  旋转以后横纵坐标都互为相反数，从而可以解答本题.

答案：A.

7. 如图，在  $\square ABCD$  中， $E$  是  $AB$  的中点， $EC$  交  $BD$  于点  $F$ ，则  $\triangle BEF$  与  $\triangle DCB$  的面积比为( )



- A.  $\frac{1}{3}$   
 B.  $\frac{1}{4}$   
 C.  $\frac{1}{5}$   
 D.  $\frac{1}{6}$

解析：根据平行四边形的性质得出  $AB=CD$ ,  $AB \parallel CD$ , 根据相似三角形的判定得出  $\triangle BEF \sim \triangle DCF$ , 根据相似三角形的性质和三角形面积公式求出即可.

答案：D.

8. 甲、乙两名运动员参加射击预选赛. 他们的射击成绩(单位：环)如表所示：

	第一次	第二次	第三次	第四次	第五次
甲	7	9	8	6	10
乙	7	8	9	8	8

设甲、乙两人成绩的平均数分别为  $\bar{x}_甲$ ,  $\bar{x}_乙$ , 方差分别  $s_甲^2, s_乙^2$ , 为下列关系正确的是( )

- A.  $\bar{x}_甲 = \bar{x}_乙$ ,  $s_甲^2 > s_乙^2$   
 B.  $\bar{x}_甲 = \bar{x}_乙$ ,  $s_甲^2 < s_乙^2$   
 C.  $\bar{x}_甲 > \bar{x}_乙$ ,  $s_甲^2 > s_乙^2$   
 D.  $\bar{x}_甲 < \bar{x}_乙$ ,  $s_甲^2 < s_乙^2$

解析：分别计算平均数和方差后比较即可得到答案.

答案：A.

9. 宾馆有 50 间房供游客居住, 当每间房每天定价为 180 元时, 宾馆会住满; 当每间房每天的定价每增加 10 元时, 就会空闲一间房. 如果有游客居住, 宾馆需对居住的每间房每天支出 20 元的费用. 当房价定为多少元时, 宾馆当天的利润为 10890 元? 设房价定为  $x$  元. 则有( )

- A.  $(180+x-20)(50-\frac{x}{10})=10890$   
 B.  $(x-20)(50-\frac{x-180}{10})=10890$   
 C.  $x(50-\frac{x-180}{10})-50 \times 20=10890$   
 D.  $(x+180)(50-\frac{x}{10})-50 \times 20=10890$

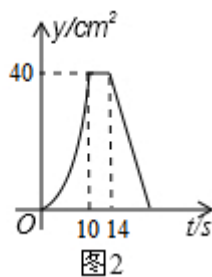
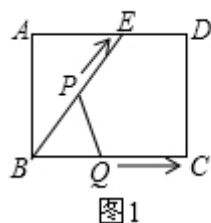
解析：设房价定为  $x$  元,

根据题意，得  $(x-20) \left(50 - \frac{x-180}{10}\right) = 10890$ .

答案：B.

10. 如图①，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 上一点，点 P 从点 B 沿折线 BE-ED-DC 运动到点 C 时停止；点 Q 从点 B 沿 BC 运动到点 C 时停止，速度均为每秒 1 个单位长度. 如果点 P、Q 同时开始运动，设运动时间为  $t$ ， $\triangle BPQ$  的面积为  $y$ ，已知  $y$  与  $t$  的函数图象如图②所示. 以下结论：

- ①  $BC=10$ ；②  $\cos \angle ABE = \frac{3}{5}$ ；③ 当  $0 \leq t \leq 10$  时， $y = \frac{2}{5} t^2$ ；④ 当  $t=12$  时， $\triangle BPQ$  是等腰三角形；  
⑤ 当  $14 \leq t \leq 20$  时， $y = 110 - 5t$  中正确的有 ( )



- A. 2 个  
B. 3 个  
C. 4 个  
D. 5 个

解析：根据题意，确定  $10 \leq t \leq 14$ ，PQ 的运动状态，得到 BE、BC、ED 问题可解.

答案：B.

二、填空题(本大题共 5 小题. 每小题 4 分. 共 20 分)把答案直接填在答题卡的相应位置处.

11. 一个不透明的口袋中，装有 5 个红球，2 个黄球，1 个白球，这些球除颜色外完全相同，从口袋中随机摸一个球，则摸到红球的概率是\_\_\_\_\_.

解析： $\because$  袋子中共有  $5+2+1=8$  个球，其中红球有 5 个，

$\therefore$  摸到红球的概率是  $\frac{5}{8}$ .

答案： $\frac{5}{8}$ .

12. 等式组  $\begin{cases} x+1 > 3(1-x) \\ \frac{1+2x}{3} \leq x \end{cases}$  的解集是\_\_\_\_\_.

解析：先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可.

答案： $x \geq 1$ .

13. 把抛物线  $y=2x^2-4x+3$  向左平移 1 个单位长度，得到的抛物线的解析式为\_\_\_\_\_.

解析：将原抛物线配方成顶点式，再根据“左加右减、上加下减”的规律求解可得.

答案： $y=2x^2+1$ .

14. 将半径为 12，圆心角为  $120^\circ$  的扇形围成一个圆锥的侧面，则此圆锥的底面圆的半径为 \_\_\_\_\_.

解析：设圆锥的底面圆的半径为  $r$ ，

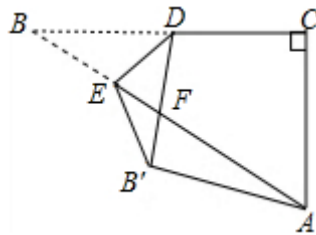
根据题意得  $2\pi \cdot r = \frac{120^\circ \pi \cdot 12}{180}$ ，

解得  $r=4$ ，

即这个圆锥的底面圆的半径为 4.

答案：4.

15. 如图，在  $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=2\sqrt{3}$ ， $AC=2$ ，点  $D$  是  $BC$  的中点，点  $E$  是边  $AB$  上一动点，沿  $DE$  所在直线把  $\triangle BDE$  翻折到  $\triangle B'DE$  的位置， $B'D$  交  $AB$  于点  $F$ . 若  $\triangle AB'F$  为直角三角形，则  $AE$  的长为 \_\_\_\_\_.



解析：利用三角函数的定义得到  $\angle B=30^\circ$ ， $AB=4$ ，再利用折叠的性质得  $DB=DC=\sqrt{3}$ ， $EB'=EB$ ，

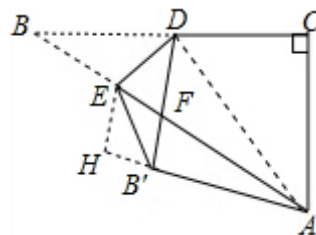
$\angle DB'E=\angle B=30^\circ$ ，设  $AE=x$ ，则  $BE=4-x$ ， $EB'=4-x$ ，讨论：当  $\angle AFB'=90^\circ$  时，则  $\therefore BF=\sqrt{3}$

$\cos 30^\circ = \frac{3}{2}$ ，则  $EF = \frac{3}{2} - (4-x) = x - \frac{5}{2}$ ，于是在  $Rt\triangle B'EF$  中利用  $EB' = 2EF$  得到  $4-x = 2(x - \frac{5}{2})$ ，

解方程求出  $x$  得到此时  $AE$  的长；当  $\angle FB'A=90^\circ$  时，作  $EH \perp AB'$  于  $H$ ，连接  $AD$ ，如图，证明

$Rt\triangle ADB' \cong Rt\triangle ADC$  得到  $AB' = AC = 2$ ，再计算出  $\angle EB'H = 60^\circ$ ，则  $B'H = \frac{1}{2}(4-x)$ ， $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(4-x)$ ，接着利用勾股定理得到  $\frac{3}{4}(4-x)^2 + [\frac{1}{2}(4-x) + 2]^2 = x^2$ ，方程求出  $x$  得到此时  $AE$  的长.



答案：3 或  $\frac{14}{5}$ .

三、解答题(本大题共 9 小题, 共 90 分)解答时应在答题卡的相应位置处写出文字说明、证明过程或演算过程.

16. 计算： $(\frac{1}{2})^{-1} - \sqrt[3]{-8} + |\sqrt{3}-2| + 2\sin 60^\circ$ .

解析：接利用负指数幂的性质以及绝对值的性质以及特殊角的三角函数值、立方根的性质分别化简得出答案.

答案：原式 $=2+2+2-\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6-\sqrt{3}+\sqrt{3}=6$ .

17. 先化简，再求值： $(x+1)(x-1)+(2x-1)^2-2x(2x-1)$ ，其中  $x=\sqrt{2}+1$ .

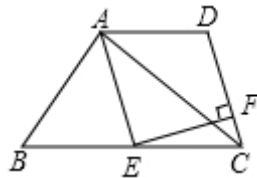
解析：先去括号，再合并同类项；最后把  $x$  的值代入即可.

答案：原式 $=x^2-1+4x^2-4x+1-4x^2+2x=x^2-2x$ ,

把  $x=\sqrt{2}+1$  代入，得：

原式 $=(\sqrt{2}+1)^2-2(\sqrt{2}+1)=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2=1$ .

18. 如图，在四边形 ABCD 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，E 是 BC 的中点， $AD\parallel BC$ ， $AE\parallel DC$ ， $EF\perp CD$  于点 F.



(1) 求证：四边形 AECD 是菱形；

(2) 若  $AB=6$ ， $BC=10$ ，求 EF 的长.

解析：(1) 根据平行四边形和菱形的判定证明即可；

(2) 根据菱形的性质和三角形的面积公式解答即可.

答案：(1)  $\because AD\parallel BC$ ， $AE\parallel DC$ ，

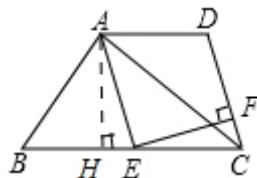
$\therefore$  四边形 AECD 是平行四边形，

$\because \angle BAC=90^\circ$ ，E 是 BC 的中点，

$\therefore AE=CE=\frac{1}{2}BC$ ，

$\therefore$  四边形 AECD 是菱形；

(2) 过 A 作  $AH\perp BC$  于点 H，



$\because \angle BAC=90^\circ$ ， $AB=6$ ， $BC=10$ ，

$\therefore AC=\sqrt{10^2-6^2}=8$ ，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot AC$ ，

$$\therefore AH = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5},$$

∵ 点 E 是 BC 的中点, BC=10, 四边形 AECD 是菱形,

$$\therefore CD=CE=5,$$

$$\therefore S_{\text{AECD}} = CE \cdot AH = CD \cdot EF,$$

$$\therefore EF = AH = \frac{24}{5}.$$

19. 某校组织学生去 9km 外的郊区游玩, 一部分学生骑自行车先走, 半小时后, 其他学生乘公共汽车出发, 结果他们同时到达. 已知公共汽车的速度是自行车速度的 3 倍, 求自行车的速度和公共汽车的速度分别是多少?

解析: 设自行车的速度为  $x$  km/h, 则公共汽车的速度为  $3x$  km/h, 根据时间=路程÷速度结合乘公共汽车比骑自行车少用  $\frac{1}{2}$  小时, 即可得出关于  $x$  的分式方程, 解之经检验即可得出结论.

答案: 设自行车的速度为  $x$  km/h, 则公共汽车的速度为  $3x$  km/h,

$$\text{根据题意得: } \frac{9}{x} - \frac{9}{3x} = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得: } x=12,$$

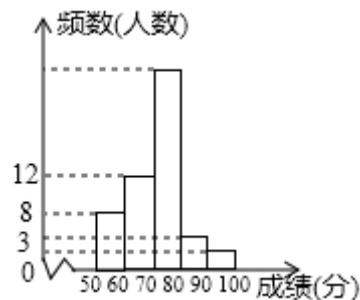
经检验,  $x=12$  是原分式方程的解,

$$\therefore 3x=36.$$

答: 自行车的速度是 12 km/h, 公共汽车的速度是 36 km/h.

20. 某中学 1000 名学生参加了“环保知识竞赛”, 为了了解本次竞赛成绩情况, 从中抽取了部分学生的成绩(得分取整数, 满分为 100 分)作为样本进行统计, 并制作了如图频数分布表和频数分布直方图(不完整且局部污损, 其中“■”表示被污损的数据). 请解答下列问题:

成绩分组	频数	频率
$50 \leq x < 60$	8	0.16
$60 \leq x < 70$	12	a
$70 \leq x < 80$	■	0.5
$80 \leq x < 90$	3	0.06
$90 \leq x < 100$	b	c
合计	■	1



(1) 写出 a, b, c 的值;

(2) 请估计这 1000 名学生中有多少人的竞赛成绩不低于 70 分;

(3) 在选取的样本中, 从竞赛成绩是 80 分以上(含 80 分)的同学中随机抽取两名同学参加环保知识宣传活动, 求所抽取的 2 名同学来自同一组的概率.

解析: (1) 利用  $50 \leq x < 60$  的频数和频率, 根据公式:  $\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{总数}}$  先计算出样本总人数, 再

分别计算出 a, b, c 的值;

(2) 先计算出竞赛分数不低于 70 分的频率, 根据样本估计总体的思想, 计算出 1000 名学生中竞赛成绩不低于 70 分的人数;

(3) 列树形图或列出表格，得到要求的所有情况和 2 名同学来自一组的情况，利用求概率公式计算出概率

答案：(1) 样本人数为： $8 \div 0.16 = 50$  (名)

$a = 12 \div 50 = 0.24$

$70 \leq x < 80$  的人数为： $50 \times 0.5 = 25$  (名)

$b = 50 - 8 - 12 - 25 - 3 = 2$  (名)

$c = 2 \div 50 = 0.04$

所以  $a = 0.24$ ,  $b = 2$ ,  $c = 0.04$ ;

(2) 在选取的样本中，竞赛分数不低于 70 分的频率是  $0.5 + 0.06 + 0.04 = 0.6$ ，根据样本估计总体的思想，有：

$1000 \times 0.6 = 600$  (人)

$\therefore$  这 1000 名学生中有 600 人的竞赛成绩不低于 70 分；

(3) 成绩是 80 分以上的同学共有 5 人，其中第 4 组有 3 人，不妨记为甲，乙，丙，第 5 组有 2 人，不妨记作 A，B

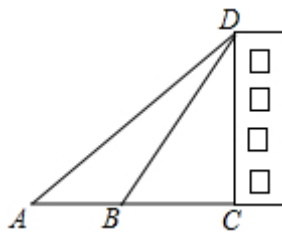
从竞赛成绩是 80 分以上(含 80 分)的同学中随机抽取两名同学，情形如树形图所示，共有 20 种情况：



抽取两名同学在同一组的有：甲乙，甲丙，乙甲，乙丙，丙甲，丙乙，AB，BA 共 8 种情况，

$\therefore$  抽取的 2 名同学来自同一组的概率  $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

21. 如图，小强想测量楼 CD 的高度，楼在围墙内，小强只能在围墙外测量，他无法测得观测点到楼底的距离，于是小强在 A 处仰望楼顶，测得仰角为  $37^\circ$ ，再往楼的方向前进 30 米至 B 处，测得楼顶的仰角为  $53^\circ$  (A, B, C 三点在一条直线上)，求楼 CD 的高度(结果精确到 0.1 米，小强的身高忽略不计).



解析：设  $CD = xm$ ，根据  $AC = BC - AB$ ，构建方程即可解决问题.

答案：设  $CD = xm$ ，

在  $Rt\triangle ACD$  中， $\tan \angle A = \frac{DC}{AC}$ ，

$\therefore AC = \frac{x}{\tan 37^\circ}$ ，

同法可得： $BC = \frac{x}{\tan 53^\circ}$ ，

$\therefore AC = BC - AB$ ，



$$\therefore \frac{x}{\tan 37^\circ} - \frac{x}{\tan 53^\circ} = 30,$$

解得  $x=52.3$ ,

答：楼 CD 的高度为 52.3 米.

22. 小明根据学习函数的经验，对  $y=x+\frac{1}{x}$  的图象与性质进行了探究.

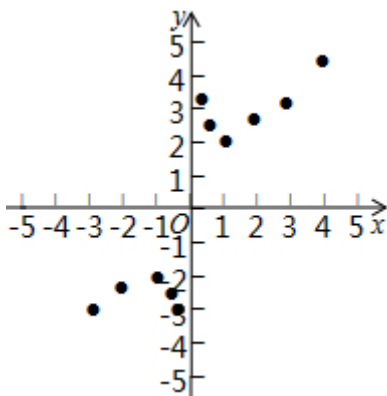
下面是小明的探究过程，请补充完整：

(1) 函数  $y=x+\frac{1}{x}$  的自变量  $x$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

(2) 下表列出  $y$  与  $x$  的几组对应值，请写出  $m, n$  的值： $m$ =\_\_\_\_， $n$ =\_\_\_\_\_；

$x$	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
$y$	...	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{10}{3}$	$m$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$n$	$\frac{17}{4}$	...

(3) 如图. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点，根据描出的点，画出该函数的图象；



(4) 结合函数的图象. 请完成：

①当  $y=-\frac{17}{4}$  时， $x$ =\_\_\_\_\_.

②写出该函数的一条性质\_\_\_\_\_.

③若方程  $x+\frac{1}{x}=t$  有两个不相等的实数根，则  $t$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

解析：(1) 由  $x$  在分母上，可得出  $x \neq 0$ ；

(2) 代入  $x=\frac{1}{3}$ 、3 求出  $m, n$  的值；

(3) 连点成线，画出函数图象；

(4) ①代入  $y=-\frac{17}{4}$ ，求出  $x$  值；

②观察函数图象，写出一条函数性质；

③观察函数图象，找出当  $x+\frac{1}{x}=t$  有两个不相等的实数根时  $t$  的取值范围 (亦可用根的判别式去求解).

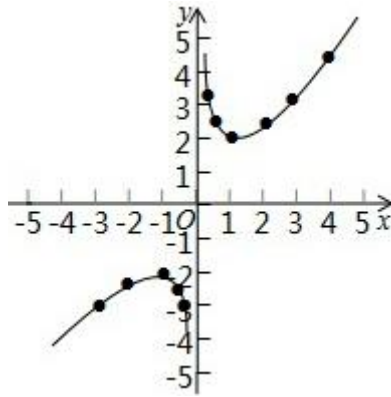
答案：(1)  $\because x$  在分母上，

$\therefore x \neq 0$ .

(2) 当  $x = \frac{1}{3}$  时， $y = x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ ；

当  $x = 3$  时， $y = x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ .

(3) 连点成线，画出函数图象.



(4) ① 当  $y = -\frac{17}{4}$  时，有  $x + \frac{1}{x} = -\frac{17}{4}$ ，

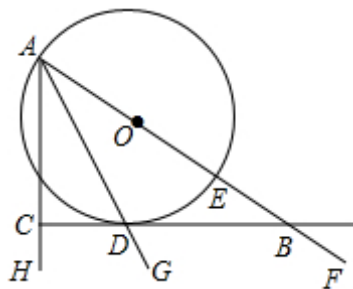
解得： $x_1 = -4$ ， $x_2 = -\frac{1}{4}$ .

② 观察函数图象，可知：函数图象在第一、三象限且关于原点对称.

③  $\because x + \frac{1}{x} = t$  有两个不相等的实数根，

$\therefore t < -2$  或  $t > 2$ .

23. 如图，AG 是  $\angle HAF$  的平分线，点 E 在 AF 上，以 AE 为直径的  $\odot O$  交 AG 于点 D，过点 D 作 AH 的垂线，垂足为点 C，交 AF 于点 B.



(1) 求证：直线 BC 是  $\odot O$  的切线；

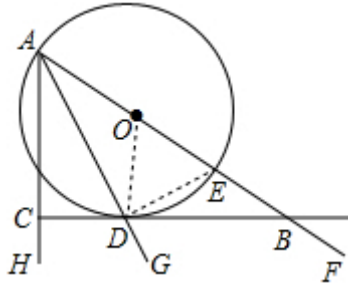
(2) 若  $AC = 2CD$ ，设  $\odot O$  的半径为  $r$ ，求 BD 的长度.

解析：(1) 根据角平分线的定义和同圆的半径相等可得  $OD \parallel AC$ ，证明  $OD \perp CB$ ，可得结论；

(2) 在  $Rt\triangle ACD$  中，设  $CD = a$ ，则  $AC = 2a$ ， $AD = \sqrt{5}a$ ，证明  $\triangle ACD \sim \triangle ADE$ ，表示  $a = \frac{4r}{5}$ ，由平

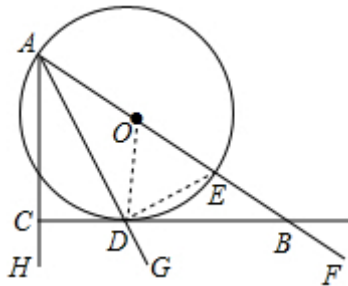
行线分线段成比例定理得： $\frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AD}$ ，代入可得结论.

答案：(1) 证明：连接 OD，



$\because$  AG 是  $\angle HAF$  的平分线,  
 $\therefore \angle CAD = \angle BAD$ ,  
 $\because OA = OD$ ,  
 $\therefore \angle OAD = \angle ODA$ ,  
 $\therefore \angle CAD = \angle ODA$ ,  
 $\therefore OD \parallel AC$ ,  
 $\because \angle ACD = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ODB = \angle ACD = 90^\circ$ , 即  $OD \perp CB$ ,  
 $\therefore D$  在  $\odot O$  上,  
 $\therefore$  直线 BC 是  $\odot O$  的切线;

(2) 解: 在  $Rt\triangle ACD$  中, 设  $CD = a$ , 则  $AC = 2a$ ,  $AD = \sqrt{5}a$ ,  
 连接 DE,

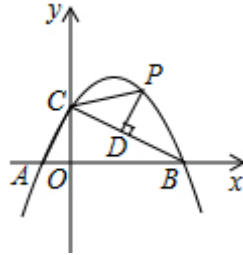


$\because$  AE 是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle ADE = 90^\circ$ ,  
 由  $\angle CAD = \angle BAD$ ,  $\angle ACD = \angle ADE = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle ADE$ ,  
 $\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AD}$ ,  
 即  $\frac{\sqrt{5}a}{2r} = \frac{2a}{\sqrt{5}a}$ ,  
 $\therefore a = \frac{4r}{5}$ ,

由(1)知:  $OD \parallel AC$ ,  
 $\therefore \frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AD}$ , 即  $\frac{BD}{BD + a} = \frac{r}{2a}$ ,

$$\therefore a = \frac{4r}{5}, \text{ 解得 } BD = \frac{4}{3}r.$$

24. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 抛物线  $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$  经过点  $A(-2, 0)$ ,  $B(8, 0)$ .



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点  $C$  是抛物线与  $y$  轴的交点, 连接  $BC$ , 设点  $P$  是抛物线上在第一象限内的点,  $PD \perp BC$ , 垂足为点  $D$ .

① 是否存在点  $P$ , 使线段  $PD$  的长度最大? 若存在, 请求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由;

② 当  $\triangle PDC$  与  $\triangle COA$  相似时, 求点  $P$  的坐标.

解析: (1) 直接把点  $A(-2, 0)$ ,  $B(8, 0)$  代入抛物线的解析式中列二元一次方程组, 解出可得结论;

(2) 先得直线  $BC$  的解析式为:  $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ,

① 如图 1, 作辅助线, 先说明  $Rt\triangle PDE$  中,  $PD = PE \cdot \sin \angle PED = PE \cdot \sin \angle OCB = \frac{2\sqrt{5}}{5}PE$ , 则当

线段  $PE$  最长时,  $PD$  的长最大, 设  $P(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4)$ , 则  $E(t, -\frac{1}{2}t + 4)$ , 表示  $PE$  的长, 配

方后可得  $PE$  的最大值, 从而得  $PD$  的最大值;

② 先根据勾股定理的逆定理可得  $\angle ACB = 90^\circ$ , 则  $\triangle COA \sim \triangle BOC$ ,

所以当  $\triangle PDC$  与  $\triangle COA$  相似时, 就有  $\triangle PDC$  与  $\triangle BOC$  相似, 分两种情况:

(I) 若  $\angle PCD = \angle CBO$  时, 即  $Rt\triangle PDC \sim Rt\triangle COB$ ,

(II) 若  $\angle PCD = \angle BCO$  时, 即  $Rt\triangle PDC \sim Rt\triangle BOC$ ,

分别求得  $P$  的坐标即可.

答案: (1) 把  $A(-2, 0)$ ,  $B(8, 0)$  代入抛物线  $y = -\frac{1}{4}x^2 + bx + c$ ,

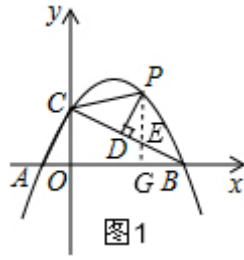
$$\text{得: } \begin{cases} -1 - 2b + c = 0 \\ -16 + 8b + c = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = 4 \end{cases}$$

$\therefore$  抛物线的解析式为:  $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ ;

(2) 由 (1) 知  $C(0, 4)$ ,  $\therefore B(8, 0)$ ,

易得直线  $BC$  的解析式为:  $y = -\frac{1}{2}x + 4$ ,

①如图1，过P作PG⊥x轴于G，PG交BC于E，



Rt△BOC 中，OC=4，OB=8，

$$\therefore BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

在 Rt△PDE 中， $PD = PE \cdot \sin \angle PED = PE \cdot \sin \angle OCB = \frac{2\sqrt{5}}{5} PE$ ，

∴当线段 PE 最长时，PD 的长最大，

设  $P(t, \frac{1}{4}t^2 + 3t + 4)$ ，则  $E(t, -\frac{1}{2}t + 4)$ ，

$$\therefore PG = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4, EG = -\frac{1}{2}t + 4,$$

$$\therefore PE = PG - EG = (-\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4) - (-\frac{1}{2}t + 4) = -\frac{1}{4}t^2 + 2t = -\frac{1}{4}(t-4)^2 + 4, (0 < t < 8),$$

当  $t=4$  时，PE 有最大值是 4，此时  $P(4, 6)$ ，

$$\therefore PD = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times 4 = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

即当  $P(4, 6)$  时，PD 的长度最大，最大值是  $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ；

②∵A(-2, 0)，B(8, 0)，C(0, 4)，

$$\therefore OA=2, OB=8, OC=4,$$

$$\therefore AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20, AB^2 = (2+8)^2 = 100, BC^2 = 4^2 + 8^2 = 80,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle COA \sim \triangle BOC,$$

当△PDC 与△COA 相似时，就有△PDC 与△BOC 相似，

∴相似三角形的对应角相等，

$$\therefore \angle PCD = \angle CBO \text{ 或 } \angle PCD = \angle BCO,$$

(I) 若  $\angle PCD = \angle CBO$  时，即  $\text{Rt}\triangle PDC \sim \text{Rt}\triangle COB$ ，

此时  $CP \parallel OB$ ，

$$\therefore C(0, 4),$$

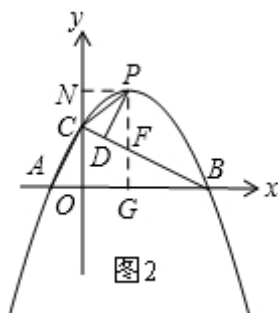
$$\therefore y_P = 4,$$

$$\therefore \frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + 4 = 4,$$

解得： $x_1=6, x_2=0$ (舍)，

即  $\text{Rt}\triangle PDC \sim \text{Rt}\triangle COB$  时,  $P(6, 4)$ ;

(II) 若  $\angle PCD = \angle BCO$  时, 即  $\text{Rt}\triangle PDC \sim \text{Rt}\triangle BOC$ ,  
如图 2, 过  $P$  作  $x$  轴的垂线  $PG$ , 交直线  $BC$  于  $F$ ,



$\therefore PF \parallel OC$ ,

$\therefore \angle PFC = \angle BCO$ ,

$\therefore \angle PCD = \angle PFC$ ,

$\therefore PC = PF$ ,

设  $P(n, \frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + 4)$ , 则  $PF = -\frac{1}{4}n^2 + 2n$ ,

过  $P$  作  $PN \perp y$  轴于  $N$ ,

$\text{Rt}\triangle PNC$  中,  $PC^2 = PN^2 + CN^2 = PF^2$ ,

$\therefore n^2 + (\frac{1}{4}n^2 + \frac{3}{2}n + 4 - 4)^2 = (-\frac{1}{4}n^2 + 2n)^2$ ,

解得:  $n = 3$ ,

即  $\text{Rt}\triangle PDC \sim \text{Rt}\triangle BOC$  时,  $P(3, \frac{25}{4})$ ;

综上所述, 当  $\triangle PDC$  与  $\triangle COA$  相似时, 点  $P$  的坐标为  $(6, 4)$  或  $(3, \frac{25}{4})$ .