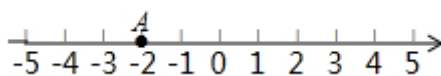


2018 年山东省青岛市中考模拟数学

一、选择题(共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

1. 如图示, 数轴上点 A 所表示的数的绝对值为()



- A. 2
- B. - 2
- C. ± 2
- D. 以上均不对

解析: 由数轴可得,
点 A 表示的数是 - 2,

$$\because |- 2|=2,$$

\therefore 数轴上点 A 所表示的数的绝对值为 2.

答案: A

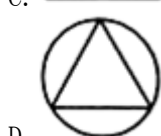
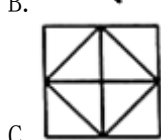
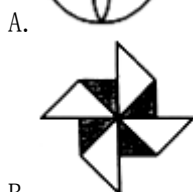
2. 根据习近平总书记在“一带一路”国际合作高峰论坛开幕式上的演讲, 中国将在未来 3 年向参与“一带一路”建设的发展中国家和国际组织提供 60000000000 元人民币援助, 建设更多民生项目. 其中数据 60000000000 用科学记数法表示为()

- A. 0.6×10^{10}
- B. 0.6×10^{11}
- C. 6×10^{10}
- D. 6×10^{11}

解析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 1 时, n 是非负数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数. 将 60000000000 用科学记数法表示为: 6×10^{10} .

答案: C

3. 下列图形中, 是轴对称图形, 但不是中心对称图形的是()



解析: A、是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故本选项错误;

B、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项错误;

C、是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故本选项错误;

D、是轴对称图形, 但不是中心对称图形, 故本选项正确.

答案：D

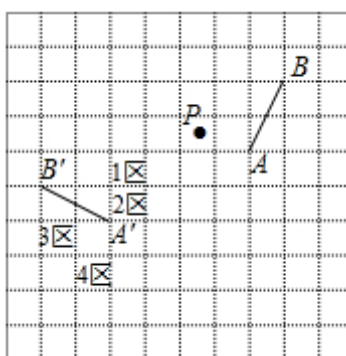
4. 计算 $(a^2b)^3 \cdot \frac{b^2}{a}$ 的结果是()

- A. a^5b^5
- B. a^4b^5
- C. ab^5
- D. a^5b^6

解析：根据积的乘方等于乘方的积，分式的乘法，可得，原式= $a^6b^3 \cdot \frac{b^2}{a} = a^5b^5$.

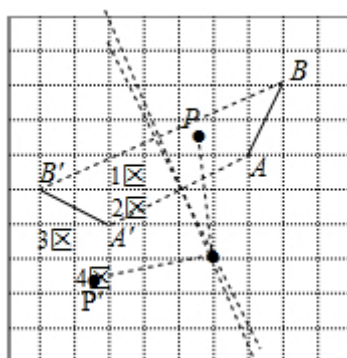
答案：A

5. 如图，网格纸上正方形小格的边长为 1. 图中线段 AB 和点 P 绕着同一个点做相同的旋转，分别得到线段 A'B' 和点 P'，则点 P' 所在的单位正方形区域是()



- A. 1 区
- B. 2 区
- C. 3 区
- D. 4 区

解析：如图，连接 AA'、BB'，分别作 AA'、BB' 的中垂线，两直线的交点即为旋转中心，



由图可知，线段 AB 和点 P 绕着同一个该点逆时针旋转 90° ，

\therefore 点 P 逆时针旋转 90° 后所得对应点 P' 落在 4 区.

答案：D

6. 某校美术社团为练习素描，他们第一次用 120 元买了若干本资料，第二次用 240 元在同一商家买同样的资料，这次商家每本优惠 4 元，结果比上次多买了 20 本. 求第一次买了多少本资料？若设第一次买了 x 本资料，列方程正确的是()

- A. $\frac{240}{x-20} - \frac{120}{x} = 4$
- B. $\frac{240}{x+20} - \frac{120}{x} = 4$

C. $\frac{120}{x} - \frac{240}{x-20} = 4$

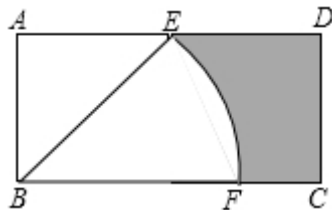
D. $\frac{120}{x} - \frac{240}{x+20} = 4$

解析：设他上月买了 x 本笔记本，则这次买了 $(x+20)$ 本，

根据题意得： $\frac{120}{x} - \frac{240}{x+20} = 4$.

答案：D

7. 如图，矩形 ABCD 的边 AB=1，BE 平分 $\angle ABC$ ，交 AD 于点 E，若点 E 是 AD 的中点，以点 B 为圆心，BE 长为半径画弧，交 BC 于点 F，则图中阴影部分的面积是()



A. $2 - \frac{\pi}{4}$

B. $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

C. $2 - \frac{\pi}{8}$

D. $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{8}$

解析：∵矩形 ABCD 的边 AB=1，BE 平分 $\angle ABC$ ，

∴ $\angle ABE = \angle EBF = 45^\circ$ ，AD // BC，

∴ $\angle AEB = \angle CBE = 45^\circ$ ，

∴ AB=AE=1，BE= $\sqrt{2}$ ，

∵点 E 是 AD 的中点，

∴ AE=ED=1，

∴图中阴影部分的面积= $S_{\text{矩形 ABCD}} - S_{\triangle ABE} - S_{\text{扇形 EBF}}$

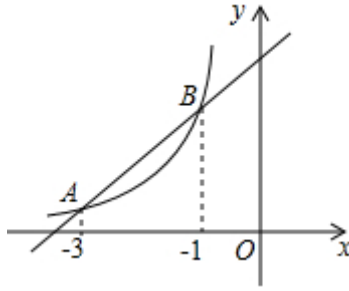
$$= 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{45\pi \times (\sqrt{2})^2}{360}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$$

答案：B

8. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 与一次函数 $y = x + 4$ 的图象交于 A、B 两点的横坐标分别为

- 3， - 1. 则关于 x 的不等式 $\frac{k}{x} < x + 4$ ($x < 0$) 的解集为()



- A. $x < -3$
- B. $-3 < x < -1$
- C. $-1 < x < 0$
- D. $x < -3$ 或 $-1 < x < 0$

解析：观察图象可知，当 $-3 < x < -1$ 时，一次函数的图象在反比例函数图象的上方，

∴关于 x 的不等式 $\frac{k}{x} < x+4 (x < 0)$ 的解集为： $-3 < x < -1$.

答案：B

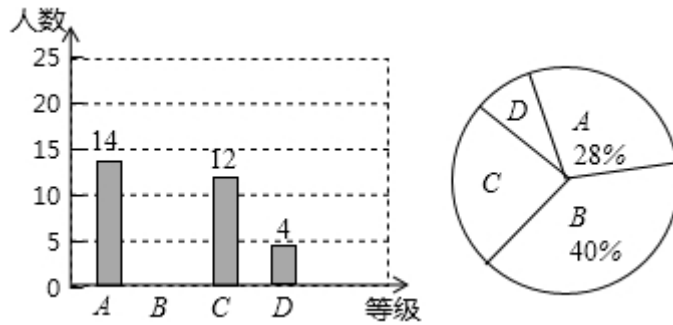
二、填空题：(本题满分 18 分，共有 6 道小题，每小题 3 分)

9. 计算 $\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的结果是_____.

解析：原式 $= 3\sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

答案： $\sqrt{3}$

10. 某校为了解本校九年级学生足球训练情况，随机抽查该年级若干名学生进行测试，然后把测试结果分为 4 个等级：A、B、C、D，并将统计结果绘制成两幅不完整的统计图. 该年级共有 700 人，估计该年级足球测试成绩为 D 等的人数为_____人.

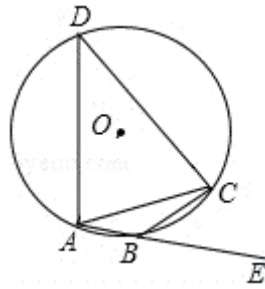


解析：∵总人数为 $14 \div 28\% = 50$ 人，

∴该年级足球测试成绩为 D 等的人数为 $700 \times \frac{4}{50} = 56$ (人).

答案： 56

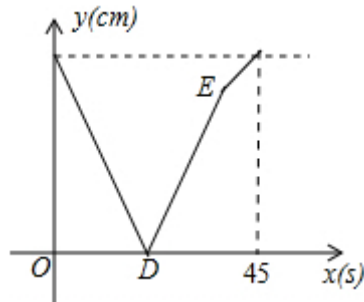
11. 如图，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ， $DA=DC$ ， $\angle CBE=50^\circ$ ，则 $\angle DAC$ 的大小为_____.



解析：∵ $\angle CBE=50^\circ$ ，
 ∴ $\angle ABC=180^\circ - \angle CBE=180^\circ - 50^\circ =130^\circ$ ，
 ∵ 四边形 ABCD 为 $\odot O$ 的内接四边形，
 ∴ $\angle D=180^\circ - \angle ABC=180^\circ - 130^\circ =50^\circ$ ，
 ∴ $DA=DC$ ，
 ∴ $\angle DAC = \frac{180^\circ - \angle D}{2} = 65^\circ$.

答案： 65°

12. 甲、乙两动点分别从线段 AB 的两端点同时出发，甲从点 A 出发，向终点 B 运动，乙从点 B 出发，向终点 A 运动. 已知线段 AB 长为 90cm，甲的速度为 2.5cm/s. 设运动时间为 x(s)，甲、乙两点之间的距离为 y(cm)，y 与 x 的函数图象如图所示，则图中线段 DE 所表示的函数关系式为____. (并写出自变量取值范围)



解析：∵ $\frac{90}{2.5} = 36$ (s)，观察图象可知乙的运动时间为 45s，

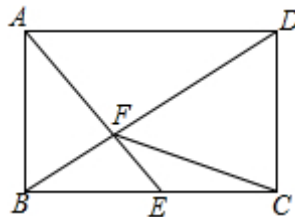
∴ 乙的速度 = $\frac{90}{45} = 2$ cm/s，

相遇时间 = $\frac{90}{2.5 + 2} = 20$ ，

∴ 图中线段 DE 所表示的函数关系式： $y = (2.5 + 2)(x - 20) = 4.5x - 90$ ($20 \leq x \leq 36$) .

答案： $y = 4.5x - 90$ ($20 \leq x \leq 36$)

13. 如图，在矩形 ABCD 中， $AB = \sqrt{2}$ ， E 是 BC 的中点， $AE \perp BD$ 于点 F，则 CF 的长是____.



解析：方法 1、∵ 四边形 ABCD 是矩形，

∴ $\angle ABE = \angle BAD = 90^\circ$ ，

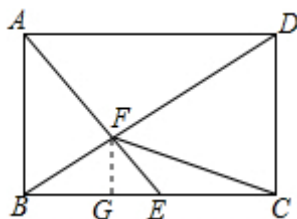
∵ $AE \perp BD$ ，

∴ $\angle AFB = 90^\circ$ ，

∴ $\angle BAF + \angle ABD = \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BAE = \angle ADB, \\
&\therefore \triangle ABE \sim \triangle ADB, \\
&\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{BE}, \\
&\because E \text{ 是 } BC \text{ 的中点}, \\
&\therefore AD = 2BE, \\
&\therefore 2BE^2 = AB^2 = 2, \\
&\therefore BE = 1, \\
&\therefore BC = 2, \\
&\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{3}, \quad BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6}, \\
&\therefore BF = \frac{AB \cdot BE}{AE} = \frac{\sqrt{6}}{3},
\end{aligned}$$

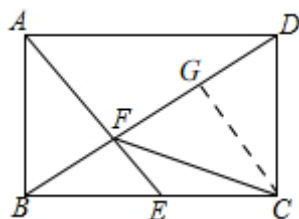
过 F 作 $FG \perp BC$ 于 G,



$$\begin{aligned}
&\therefore FG \parallel CD, \\
&\therefore \triangle BFG \sim \triangle BDC, \\
&\therefore \frac{FG}{CD} = \frac{BF}{BD} = \frac{BG}{BC}, \\
&\therefore FG = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad BG = \frac{2}{3}, \\
&\therefore CG = \frac{4}{3}, \\
&\therefore CF = \sqrt{FG^2 + CG^2} = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

故答案为: $\sqrt{2}$.

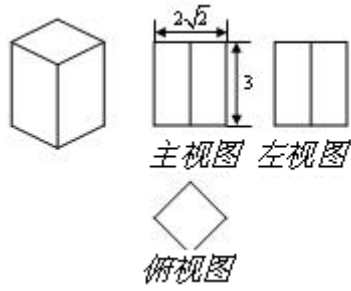
方法 2、如图,



$$\begin{aligned}
&\text{过点 } C \text{ 作 } CG \perp BD, \\
&\because AE \perp BD, \\
&\therefore \angle AFE = \angle CGD = 90^\circ, \quad EF \parallel CG, \\
&\because \text{点 } E \text{ 是 } BC \text{ 中点}, \\
&\therefore BF = FG, \\
&\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是矩形}, \\
&\therefore AB = CD = \sqrt{2}, \quad AB \parallel CD, \\
&\therefore \angle ABF = \angle CDG, \\
&\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDG, \\
&\therefore DG = BF = FG, \\
&\therefore CF = CD = \sqrt{2},
\end{aligned}$$

答案: $\sqrt{2}$

14. 一个长方体的三视图如图所示，若其俯视图为正方形，则这个长方体的体积为_____.



解析：设俯视图的正方形的边长为 a .

\because 其俯视图为正方形，正方形的对角线长为 $2\sqrt{2}$,

$\therefore a^2 + a^2 = (2\sqrt{2})^2$,

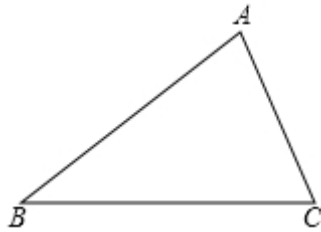
解得 $a^2 = 4$,

\therefore 这个长方体的体积为 $4 \times 3 = 12$.

答案：12

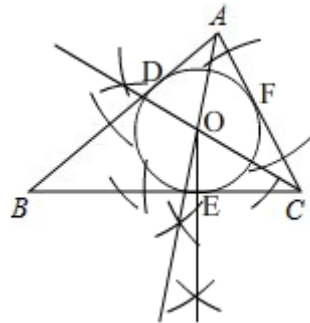
三、作图题(本题满分 4 分)用圆规、直尺作图，不写作法，但要保留作图痕迹.

15. 如图，已知 $\triangle ABC$ ， $\angle B = 40^\circ$. 在图中作出 $\triangle ABC$ 的内切圆 O ，并标出 $\odot O$ 与边 AB ， BC ， AC 的切点 D ， E ， F .



解析：直接利用基本作图即可得出结论.

答案：如图，



$\odot O$ 即为所求.

四、解答题(本题共有 9 道题，满分 74 分)

16. (1) 计算： $\left(a + 2 - \frac{3a-4}{a-2}\right) \div \frac{a^2-6a+9}{a-2}$

(2) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 . 求 m 的取值范围.

解析：(1) 利用通分、完全平方公式、分解因式等方法，将原式进行化简即可得出结论；

(2) 根据方程的系数结合根的判别式 $\Delta \geq 0$ ，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解之即可得出 m 的取值范围.

答案：(1) 原式 $= \left(\frac{a^2-4}{a-2} - \frac{3a-4}{a-2}\right) \div \frac{(a-3)^2}{a-2}$,

$$= \frac{a^2 - 3a}{a - 2} \times \frac{a - 2}{(a - 3)^2},$$

$$= \frac{a(a - 3)}{a - 2} \times \frac{a - 2}{(a - 3)^2},$$

$$= \frac{a}{a - 3}.$$

(2) ∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m + 4 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 .

$$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (m + 4) \geq 0,$$

解得: $m \leq 5$.

17. 若 n 是一个两位正整数, 且 n 的个位数字大于十位数字, 则称 n 为“两位递增数”(如 13, 35, 56 等). 在某次数学趣味活动中, 每位参加者需从由数字 1, 2, 3, 4, 5, 6 构成的所有的“两位递增数”中随机抽取 1 个数, 且只能抽取一次.

(1) 写出所有个位数字是 5 的“两位递增数”;

(2) 请用列表法或树状图, 求抽取的“两位递增数”的个位数字与十位数字之积能被 10 整除的概率.

解析: (1) 根据“两位递增数”定义可得;

(2) 画树状图列出所有“两位递增数”, 找到个位数字与十位数字之积能被 10 整除的结果数, 根据概率公式求解可得.

答案: (1) 根据题意所有个位数字是 5 的“两位递增数”是 15、25、35、45 这 4 个;

(2) 画树状图为:



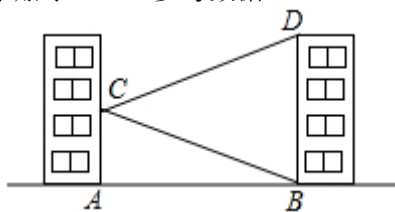
共有 15 种等可能的结果数, 其中个位数字与十位数字之积能被 10 整除的结果数为 3,

$$\text{所以个位数字与十位数字之积能被 10 整除的概率} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

18. 如图, 学校的实验楼对面是一幢教学楼, 小敏在实验楼的窗口 C 测得教学楼顶部 D 的仰角为 18° , 教学楼底部 B 的俯角为 20° , 量得实验楼与教学楼之间的距离 $AB = 30\text{m}$.

(1) 求 $\angle BCD$ 的度数.

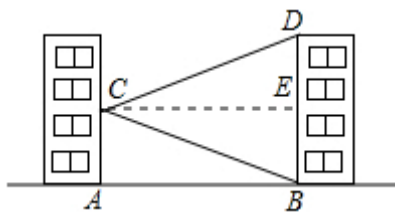
(2) 求教学楼的高 BD. (结果精确到 0.1m, 参考数据: $\tan 20^\circ \approx 0.36$, $\tan 18^\circ \approx 0.32$)



解析: (1) 过点 C 作 CE 与 BD 垂直, 根据题意确定出所求角度数即可;

(2) 在直角三角形 CBE 中, 利用锐角三角函数定义求出 BE 的长, 在直角三角形 CDE 中, 利用锐角三角函数定义求出 DE 的长, 由 BE + DE 求出 BD 的长, 即为教学楼的高.

答案: (1) 过点 C 作 $CE \perp BD$, 则有 $\angle DCE = 18^\circ$, $\angle BCE = 20^\circ$,



$\therefore \angle BCD = \angle DCE + \angle BCE = 18^\circ + 20^\circ = 38^\circ$;

(2) 由题意得: $CE = AB = 30\text{m}$,

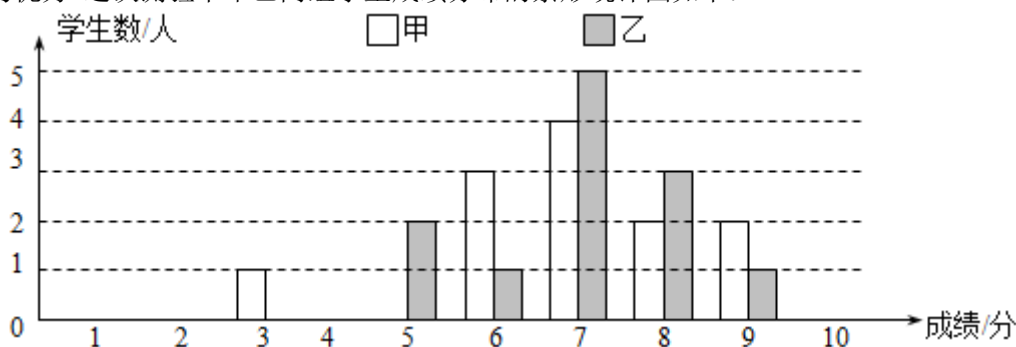
在 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中, $BE = CE \cdot \tan 20^\circ \approx 10.80\text{m}$,

在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $DE = CE \cdot \tan 18^\circ \approx 9.60\text{m}$,

\therefore 教学楼的高 $BD = BE + DE = 10.80 + 9.60 \approx 20.4\text{m}$,

则教学楼的高约为 20.4m .

19. 一次学科测验, 学生得分均为整数, 满分 10 分, 成绩达到 6 分以上为合格. 成绩达到 9 分为优秀. 这次测验中甲乙两组学生成绩分布的条形统计图如下:



(1) 请补充完成下面的成绩统计分析表:

	平均分	方差	中位数	合格率	优秀率
甲组	6.9	2.4		91.7%	16.7%
乙组		1.3		83.3%	8.3%

(2) 甲组学生说他们的合格率、优秀率均高于乙组, 所以他们的成绩好于乙组. 但乙组学生不同意甲组学生的说法, 认为他们组的成绩要高于甲组. 请你给出三条支持乙组学生观点的理由.

解析: (1) 本题需先根据中位数的定义, 再结合统计图得出它们的平均分和中位数即可求出答案.

(2) 本题需先根据统计图, 再结合它们的合格率、优秀率说出它们各自的观点是本题所求的答案.

答案: (1) 从统计图中可以看出:

甲组: 中位数 7;

乙组: 平均分 7, 中位数 7;

(2) ① 因为乙组学生的平均成绩高于甲组学生的平均成绩, 所以乙组学生的成绩好于甲组;

② 因为甲乙两组学生成绩的平均分相差不多, 而乙组学生的方差低于甲组学生的方差, 说明乙组学生成绩的波动性比甲组小, 所以乙组学生的成绩好于甲组;

③ 因为乙组 7 分(含 7 分)以上人数多于甲组 7 分(含 7 分)以上人数, 所以乙组学生的成绩好于甲组.

20. 江南农场收割小麦, 已知 1 台大型收割机和 3 台小型收割机 1 小时可以收割小麦 1.4 公顷, 2 台大型收割机和 5 台小型收割机 1 小时可以收割小麦 2.5 公顷.

(1) 每台大型收割机和每台小型收割机 1 小时收割小麦各多少公顷?

(2) 大型收割机每小时费用为 300 元, 小型收割机每小时费用为 200 元, 两种型号的收割机一共有 10 台, 要求 2 小时完成 8 公顷小麦的收割任务, 且总费用不超过 5400 元, 有几种方

案？请指出费用最低的一种方案，并求出相应的费用。

解析：(1) 设每台大型收割机 1 小时收割小麦 x 公顷，每台小型收割机 1 小时收割小麦 y 公顷，根据“1 台大型收割机和 3 台小型收割机 1 小时可以收割小麦 1.4 公顷，2 台大型收割机和 5 台小型收割机 1 小时可以收割小麦 2.5 公顷”，即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组，解之即可得出结论；

(2) 设大型收割机有 m 台，总费用为 w 元，则小型收割机有 $(10 - m)$ 台，根据总费用=大型收割机的费用+小型收割机的费用，即可得出 w 与 m 之间的函数关系式，由“要求 2 小时完成 8 公顷小麦的收割任务，且总费用不超过 5400 元”，即可得出关于 m 的一元一次不等式组，解之即可得出 m 的取值范围，依此可找出各方案，再结合一次函数的性质即可解决最值问题。

答案：(1) 设每台大型收割机 1 小时收割小麦 x 公顷，每台小型收割机 1 小时收割小麦 y 公顷，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} x + 3y = 1.4 \\ 2x + 5y = 2.5 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 0.5 \\ y = 0.3 \end{cases}.$$

答：每台大型收割机 1 小时收割小麦 0.5 公顷，每台小型收割机 1 小时收割小麦 0.3 公顷。

(2) 设大型收割机用 m 台，总费用为 w 元，则小型收割机用 $(10 - m)$ 台，

根据题意得： $w = 300 \times 2m + 200 \times 2(10 - m) = 200m + 4000$ 。

\because 2 小时完成 8 公顷小麦的收割任务，且总费用不超过 5400 元，

$$\therefore \begin{cases} 2 \times 0.5m + 2 \times 0.3(10 - m) \geq 8 \\ 200m + 4000 \leq 5400 \end{cases},$$

解得： $5 \leq m \leq 7$ ，

\therefore 有三种不同方案。

$\because w = 200m + 4000$ 中， $200 > 0$ ，

$\therefore w$ 值随 m 值的增大而增大，

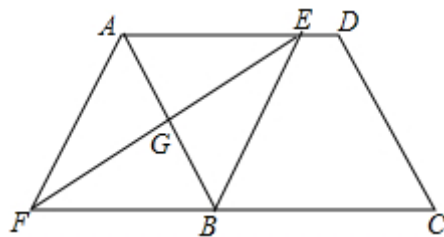
\therefore 当 $m = 5$ 时，总费用取最小值，最小值为 5000 元。

答：有三种方案，当大型收割机用 5 台、小型收割机用 5 台时，总费用最低，最低费用为 5000 元。

21. 如图，在平行四边形 ABCD 中，边 AB 的垂直平分线交 AD 于点 E，交 CB 的延长线于点 F，连接 AF，BE。

(1) 求证： $\triangle AGE \cong \triangle BGF$ ；

(2) 试判断四边形 AFBE 的形状，并说明理由。



解析：(1) 由平行四边形的性质得出 $AD \parallel BC$ ，得出 $\angle AEG = \angle BFG$ ，由 AAS 证明 $\triangle AGE \cong \triangle BGF$ 即可；

(2) 由全等三角形的性质得出 $AE = BF$ ，由 $AD \parallel BC$ ，证出四边形 AFBE 是平行四边形，再根据 $EF \perp AB$ ，即可得出结论。

答案：(1) 证明： \because 四边形 ABCD 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AEG = \angle BFG$ ，

$\because EF$ 垂直平分 AB ，

$\therefore AG = BG$ ，

在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle BGF$ 中,
$$\begin{cases} \angle AEG = \angle BFG \\ \angle AGE = \angle BGF, \\ AG = BG \end{cases}$$

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle BGF$ (AAS);

(2) 解: 四边形 AFBE 是菱形, 理由如下:

$\because \triangle AGE \cong \triangle BGF,$

$\therefore AE = BF,$

$\because AD \parallel BC,$

\therefore 四边形 AFBE 是平行四边形,

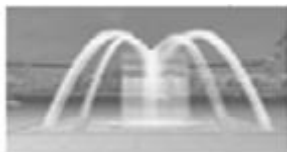
又 $\because EF \perp AB,$

\therefore 四边形 AFBE 是菱形.

22. 随着新农村的建设和旧城的改造, 我们的家园越来越美丽, 小明家附近广场中央新修了个圆形喷水池, 在水池中心竖直安装了一根高为 2 米的喷水管, 它喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1 米处达到最高, 水柱落地处离池中心 3 米.

(1) 请你建立适当的平面直角坐标系, 并求出水柱抛物线的函数解析式;

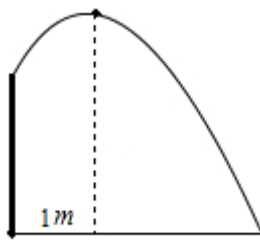
(2) 求出水柱的最大高度是多少?



解析: (1) 以水管与地面交点为原点, 原点与水柱落地点所在直线为 x 轴, 水管所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 设抛物线的解析式为 $y = a(x - 1)^2 + h$, 代入 (0, 2) 和 (3, 0) 得出方程组, 解方程组即可,

(2) 求出当 $x = 1$ 时, $y = \frac{8}{3}$ 即可.

答案: (1) 如图所示: 以水管与地面交点为原点, 原点与水柱落地点所在直线为 x 轴, 水管所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系,



设抛物线的解析式为

$$: y = a(x - 1)^2 + h,$$

代入 (0, 2) 和 (3, 0) 得:
$$\begin{cases} 4a + h = 0 \\ a + h = 2 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

\therefore 抛物线的解析式为: $y = -\frac{2}{3}(x - 1)^2 + \frac{8}{3};$

即 $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \quad (0 \leq x \leq 3);$

$$(2) y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 \quad (0 \leq x \leq 3),$$

当 $x=1$ 时, $y = \frac{8}{3}$,

即水柱的最大高度为 $\frac{8}{3}$ m.

23. 探索 $n \times n$ 的正方形钉子上 (n 是钉子板每边上的钉子数), 连接任意两个钉子所得到的不同长度值的线段种数:

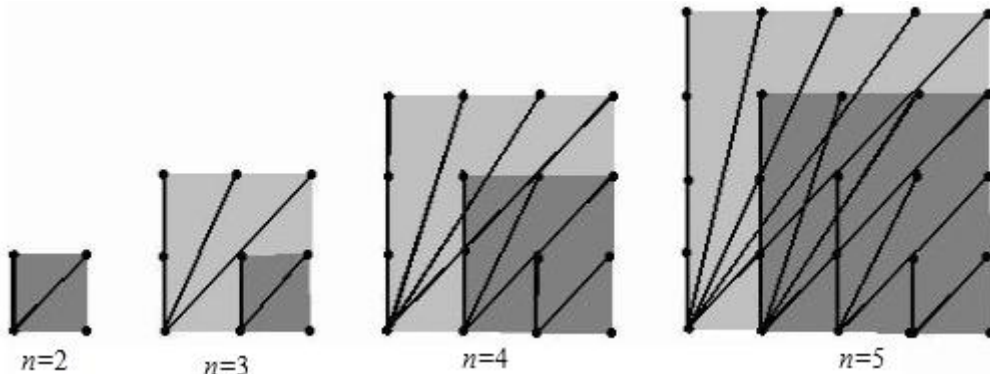
当 $n=2$ 时, 钉子上所连不同线段的长度值只有 1 与 $\sqrt{2}$, 所以不同长度值的线段只有 2 种, 若用 S 表示不同长度值的线段种数, 则 $S=2$;

当 $n=3$ 时, 钉子上所连不同线段的长度值只有 1, $\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ 五种, 比 $n=2$ 时增加了 3 种, 即 $S=2+3=5$.

(1) 观察图形, 填写下表:

(2) 写出 $(n-1) \times (n-1)$ 和 $n \times n$ 的两个钉子上, 不同长度值的线段种数之间的关系; (用式子或语言表述均可)

(3) 对 $n \times n$ 的钉子板, 写出用 n 表示 S 的代数式.



钉子数 (n)	S 值
2×2	2
3×3	$2+3$
4×4	$2+3+(\quad)$
5×5	(\quad)

解析: (1) 钉子数为 2×2 时, 共有不同的线段 2 条;

钉子数为 3×3 时, 共有不同的线段 $2+3$ 条;

钉子数为 4×4 时, 共有不同的线段 $2+3+4$ 条;

那么钉子数为 5×5 时, 共有不同的线段 $2+3+4+5$ 条.

(2) 钉子数为 $(n-1) \times (n-1)$ 时, 共有不同的线段 $2+3+4+5+\dots+(n-1)$ 条; 钉子数为 $n \times n$ 时, 共有不同的线段 $2+3+4+5+\dots+(n-1)+n$ 条相减后发现不同长度的线段种数增加了 n 种.

(3) 钉子数为 $n \times n$ 时, 共有不同的线段应从 2 开始加, 加到 n .

答案: (1) 4, $2+3+4+5$ (或 14);

(2) 类似以下答案均给满分:

(i) $n \times n$ 的钉子板比 $(n-1) \times (n-1)$ 的钉子板中不同长度的线段种数增加了 n 种;

(ii) 分别用 a , b 表示 $n \times n$ 与 $(n-1) \times (n-1)$ 的钉子板中不同长度的线段种数, 则 $a=b+n$;

$$(3) S = 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n+2}{2} \times (n-1) = \frac{n^2 + n - 2}{2}.$$

24. 在直角坐标系中, 过原点 O 及点 $A(8, 0)$, $C(0, 6)$ 作矩形 $OABC$ 、连结 OB , 点 D 为 OB 的中点, 点 E 是线段 AB 上的动点, 连结 DE , 作 $DF \perp DE$, 交 OA 于点 F , 连结 EF . 已知点 E 从 A 点出发, 以每秒 1 个单位长度的速度在线段 AB 上移动, 设移动时间为 t 秒.

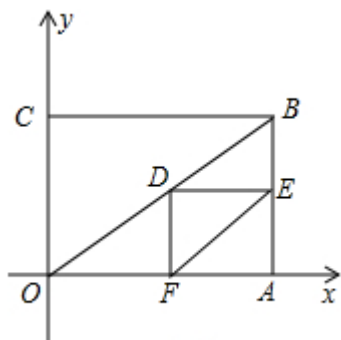


图1

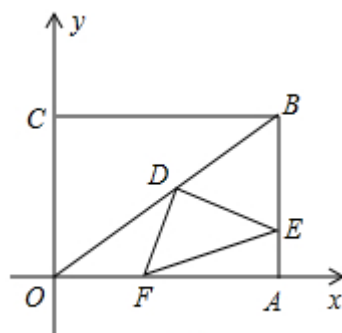


图2

- (1) 如图 1, 当 $t=3$ 时, 求 DF 的长.
 (2) 如图 2, 当点 E 在线段 AB 上移动的过程中, $\angle DEF$ 的大小是否发生变化? 如果变化, 请说明理由; 如果不变, 请求出 $\tan \angle DEF$ 的值.
 (3) 连结 AD , 当 AD 将 $\triangle DEF$ 分成的两部分的面积之比为 $1:2$ 时, 求相应的 t 的值.

解析: (1) 当 $t=3$ 时, 点 E 为 AB 的中点, 由三角形中位线定理得出 $DE \parallel OA$, $DE = \frac{1}{2} OA = 4$, 再由矩形的性质证出 $DE \perp AB$, 得出 $\angle OAB = \angle DEA = 90^\circ$, 证出四边形 $DFAE$ 是矩形, 得出 $DF = AE = 3$ 即可;

(2) 作 $DM \perp OA$ 于 M , $DN \perp AB$ 于 N , 证明四边形 $DMAN$ 是矩形, 得出 $\angle MDN = 90^\circ$, $DM \parallel AB$, $DN \parallel OA$, 由平行线得出比例式 $\frac{BD}{DO} = \frac{BN}{NA}$, $\frac{DO}{BD} = \frac{OM}{MA}$, 由三角形中位线定理得出 $DM = \frac{1}{2} AB = 3$, $DN = \frac{1}{2} OA = 4$, 证明 $\triangle DMF \sim \triangle DNE$, 得出 $\frac{DF}{DE} = \frac{DM}{DN} = \frac{3}{4}$, 再由三角函数定义即可得出答案;

(3) 作 $DM \perp OA$ 于 M , $DN \perp AB$ 于 N , 若 AD 将 $\triangle DEF$ 的面积分成 $1:2$ 的两部分, 设 AD 交 EF 于点 G , 则点 G 为 EF 的三等分点;

① 当点 E 到达中点之前时, $NE = 3 - t$, 由 $\triangle DMF \sim \triangle DNE$ 得: $MF = \frac{3}{4}(3 - t)$, 求出 $AF = 4 + MF = 4 - \frac{3}{4}t + \frac{25}{4}$, 得出 $G(\frac{3t + 71}{12}, \frac{2}{3}t)$, 求出直线 AD 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + 6$, 把 $G(\frac{3t + 71}{12}, \frac{2}{3}t)$ 代入即可求出 t 的值;

② 当点 E 越过中点之后, $NE = t - 3$, 由 $\triangle DMF \sim \triangle DNE$ 得: $MF = \frac{3}{4}(t - 3)$, 求出 $AF = 4 - MF = -\frac{3}{4}t + \frac{25}{4}$, 得出 $G(\frac{3t + 23}{6}, \frac{1}{3}t)$, 代入直线 AD 的解析式 $y = -\frac{3}{4}x + 6$ 求出 t 的值即可.

答案: (1) 当 $t=3$ 时, 点 E 为 AB 的中点,

$\because A(8, 0), C(0, 6)$,

$\therefore OA=8, OC=6$,

\because 点 D 为 OB 的中点,

$\therefore DE \parallel OA, DE = \frac{1}{2} OA = 4$,

\because 四边形 $OACB$ 是矩形,

$\therefore OA \perp AB$,

$\therefore DE \perp AB$,

$\therefore \angle OAB = \angle DEA = 90^\circ$,

又 $\because DF \perp DE$,

$\therefore \angle EDF = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $DFAE$ 是矩形,

$\therefore DF = AE = 3$;

(2) $\angle DEF$ 的大小不变; 理由如下:

作 $DM \perp OA$ 于 M , $DN \perp AB$ 于 N , 如图 2 所示:

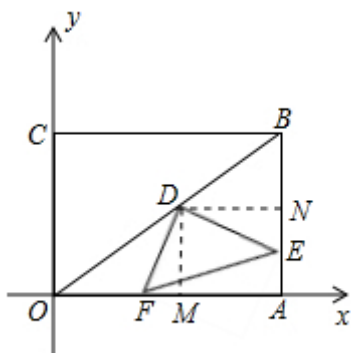


图2

\because 四边形 OABC 是矩形,
 $\therefore OA \perp AB$,
 \therefore 四边形 DMAN 是矩形,
 $\therefore \angle MDN = 90^\circ$, $DM \parallel AB$, $DN \parallel OA$,
 $\therefore \frac{BD}{DO} = \frac{BN}{NA}$, $\frac{DO}{BD} = \frac{OM}{MA}$,
 \therefore 点 D 为 OB 的中点,
 \therefore M、N 分别是 OA、AB 的中点,
 $\therefore DM = \frac{1}{2} AB = 3$, $DN = \frac{1}{2} OA = 4$,
 $\therefore \angle EDF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle FDM = \angle EDN$,
 又 $\because \angle DMF = \angle DNE = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle DMF \sim \triangle DNE$,
 $\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{DM}{DN} = \frac{3}{4}$,
 $\therefore \angle EDF = 90^\circ$,
 $\therefore \tan \angle DEF = \frac{DF}{DE} = \frac{3}{4}$;

(3) 作 $DM \perp OA$ 于 M, $DN \perp AB$ 于 N,
 若 AD 将 $\triangle DEF$ 的面积分成 1: 2 的两部分,
 设 AD 交 EF 于点 G, 则点 G 为 EF 的三等分点;
 ① 当点 E 到达中点之前时, 如图 3 所示, $NE = 3 - t$,

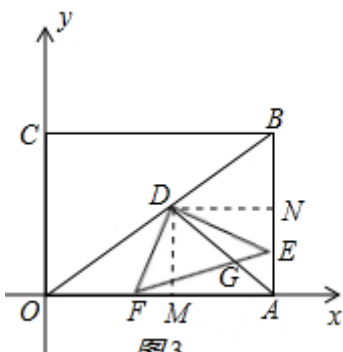


图3

由 $\triangle DMF \sim \triangle DNE$ 得: $MF = \frac{3}{4} (3 - t)$,
 $\therefore AF = 4 + MF = -\frac{3}{4}t + \frac{25}{4}$,
 \therefore 点 G 为 EF 的三等分点,

$$\therefore G\left(\frac{3t+71}{12}, \frac{2}{3}t\right),$$

设直线 AD 的解析式为 $y=kx+b$,

$$\text{把 } A(8, 0), D(4, 3) \text{ 代入得: } \begin{cases} 8k + b = 0 \\ 4k + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = 6 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 AD 的解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + 6,$$

$$\text{把 } G\left(\frac{3t+71}{12}, \frac{2}{3}t\right) \text{ 代入得: } t = \frac{75}{41};$$

②当点 E 越过中点之后, 如图 4 所示, $NE=t-3$,

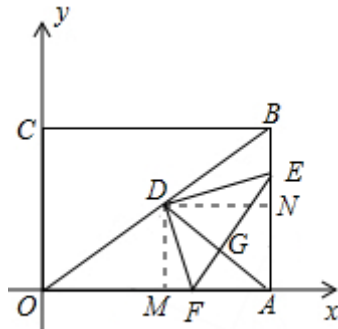


图 4

$$\text{由 } \triangle DMF \sim \triangle DNE \text{ 得: } MF = \frac{3}{4}(t-3),$$

$$\therefore AF = 4 - MF = -\frac{3}{4}t + \frac{25}{4},$$

\because 点 G 为 EF 的三等分点,

$$\therefore G\left(\frac{3t+23}{6}, \frac{1}{3}t\right),$$

$$\text{代入直线 AD 的解析式 } y = -\frac{3}{4}x + 6 \text{ 得: } t = \frac{75}{17};$$

综上所述, 当 AD 将 $\triangle DEF$ 分成的两部分的面积之比为 1:2 时, t 的值为 $\frac{75}{41}$ 或 $\frac{75}{17}$.