2015年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）数学文

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.已知集合 $\mathrm{P}=\left\{x\middle|x^2-2x\geq 3\right\}$， $\mathrm{Q}=\left\{x\middle|2<x<4\right\}$，则 $\mathrm{P}\bigcap\mathrm{Q}=$（　　）

A. $[3,4)$

B. $(2,3]$

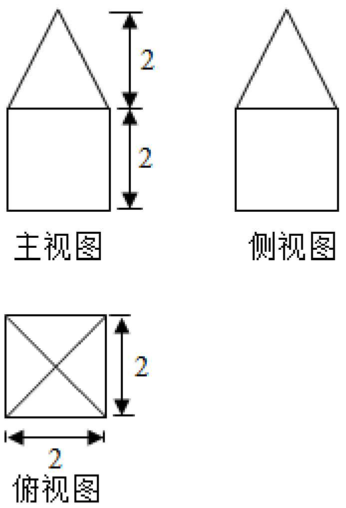
C. $(-1,2)$

D. $(-1,3]$

解析：由题意得， $P=\left\{x\mid x\geq 3或x\leq 1\right\}$，所以 $P\bigcap Q=[3,4)$，故选 A.

答案：A

2.某几何体的三视图如图所示（单位： cm ），则该几何体的体积是（　　）



A. $8\ \mathrm{cm}^3$

B. $12\ \mathrm{cm}^3$

C. $\dfrac{32}{3}\ \mathrm{cm}^3$

D. $\dfrac{40}{3}\ \mathrm{cm}^3$

解析：由三视图可如，该几何体是一个棱长为 2 的正方体与一个底面边长为 2，高为 2 的正四棱锥的组合体，故其体积为 V= $2^3+\frac{1}{3}\times 2^2\times 2=\frac{22}{3}cm^3$. 故选 C.

答案：C

3. 设 a，b 是实数，则“ $a+b>0$ ”是“ $ab>0$ ”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：本题采用特殊值法，当 a=3，b=-1 时，a-b＞0，但 ab＜0，故是不充分条件；当 a=-3，b=-1 时，ab＞0，但 a-b＜0，故是不必要条件. 所以“a-b＞0”是“ab＞0”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

答案：D

4. 设 α， β 是两个不同的平面， l， m 是两条不同的直线，且 $l\subset\alpha$， $m\subset\beta$（　　）

A. 若 $l\perp\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

B. 若 $\alpha\perp\beta$，则 $l\perp m$

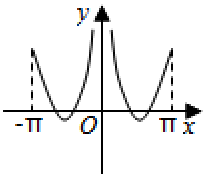
C. 若 $l//\beta$，则 $\alpha//\beta$

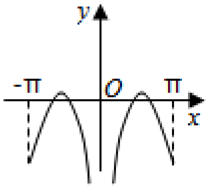
D. 若 $\alpha//\beta$，则 $l//m$

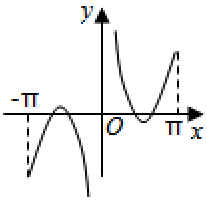
解析：采用排除法，选项 A 中，平面与平面垂直的判定，故正确；选项 B 中，当 $\alpha\perp\beta$ 时， l,m 可以垂直，也可以平行，也可以异面；选项 C 中， $l//\beta$ 时， α,β 可以相交；选项 D 中， $\alpha//\beta$ 时， l,m 也可以异面. 故选 A.

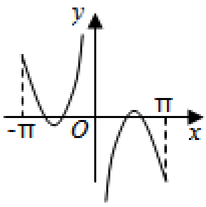
答案：A

5. 函数 $f\left(x\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)\cos x$（ $-\pi\le x\le\pi$ 且 $x\ne 0$ ）的图象可能为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

解析：因为 $f(-x)=(-x+\frac{1}{x})\cos x=-(x-\frac{1}{x})\cos x=-f(x)$，故函数是奇函数，所以排除A，B；取 $x=\pi$ ，则 $f(\pi)=(\pi-\frac{1}{\pi})\cos\pi=-(\pi-\frac{1}{\pi})<0$，故选 D.

答案：D

6.有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同.已知三个房间的粉刷面积（单位： m^2 ）分别为 x， y， z，且 $x<y<z$，三种颜色涂料的粉刷费用（单位：元/ m^2 ）分别为 a， b， c，且 $a<b<c$.在不同的方案中，最低的总费用（单位：元）是（　　）

A. $ax+by+cz$

B. $az+by+cx$

C. $ay+bz+cx$

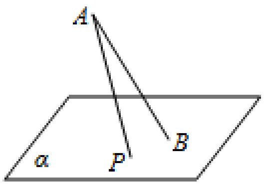
D. $ay+bx+cz$

解析：由 x＜y＜z，a＜b＜c，所以 ax+by+cz-（az+by+cx）=a（x-z）+c（z-x）=（x-z）（a-c）

＞0，故 ax+by+cz＞az+by+cx；同理，ay+bz+cx-（ay+bx+cz）=b（z-x）+c（x-z）=（x-z）（c-b）＜0，故 ay+bz+cx＜ay+bx+cz.因为 az+by+cx-（ay+bz+cx）=a（z-y）+b（y-z）=（a-b）（z-y）＜0，故 az+bx+cx＜ay+bz+cx.故最低费用为 az+by+cx.故选 B.

答案：B

7.如图，斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60°， B 为斜足，平面 α 上的动点 P 满足 $\angle PAB=30^{\circ}$，则点 P 的轨迹是（　　）



A.直线

B.抛物线

C.椭圆

D.双曲线的一支

解析：由题可知，当 P 点运动时，在空间中，满足条件的 AP 绕 AB 旋转形成一个圆锥，用一个与圆锥高成 60° 角的平面截圆锥，所得图形为椭圆.故选 C.

答案：C

8.设实数 a， b， t 满足 $|a+1|=|\sin b|=t$（　　）

A.若 t 确定，则 b^2 唯一确定

B.若 t 确定，则 a^2+2a 唯一确定

C.若 t 确定，则 $\sin\frac{b}{2}$ 唯一确定

D.若 t 确定，则 a^2+a 唯一确定

解析：因为 $|a+1|=|\sin b|=t$，所以 $(a+1)^2=\sin^2 b=t^2$，所以 $a^2+2a=t^2-1$，故当 t 确定时， t^2-1 确定，所以 a^2+2a 唯一确定.故选 B.

答案：B

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.）

9. 计算：$\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=$__________，$2^{\log_2 3+\log_4 3}=$__________.

解析：$\log_2\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_2 2^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$；$2^{\log_2 3+\log_4 3}=2^{\log_2 3}\times 2^{\log_4 3}=3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

答案：$-\frac{1}{2},3\sqrt{3}$

10. 已知$\{a_n\}$是等差数列，公差 d 不为零. 若 a_2，a_3，a_7成等比数列，且 $2a_1+a_2=1$，则 $a_1=$__________，$d=$__________.

解析：由题可得，$(a_1+2d)^2=(a_1+d)(a_1+6d)$，故有 $3a_1+2d=0$，又因为 $2a_1+a_2=1$，即 $3a_1+d=1$，所以 $d=-1,a_1=\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3},-1$

11. 函数 $f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+1$ 的最小正周期是__________，最小值是__________.

解析：$f(x)=\sin^2 x+\sin x\cos x+1=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}+1=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})+\frac{3}{2}$，所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；$f(x)_{\min}=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\pi,\frac{3-\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\le 1\\ x+\frac{6}{x}-6,x>1\end{cases}$，则 $f[f(-2)]=$__________，$f(x)$ 的最小值是________.

解析：$f(-2)=(-2)^2=4$，所以 $f[f(-2)]=f(4)=4+\frac{6}{4}-6=-\frac{1}{2}$. 当 x≤1 时，$f(x)\ge 1$；当 x

>1 时，$f(x)\geq 2\sqrt{6}-6$，当 $x=\dfrac{6}{x}$，$x=\sqrt{6}$ 时取到等号. 因为 $2\sqrt{6}-6<1$，所以函数的最小值为 $2\sqrt{6}-6$.

答案：$-\dfrac{1}{2};2\sqrt{6}-6$

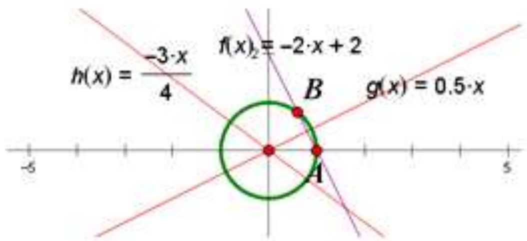
13. 已知 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 是平面单位向量，且 $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\dfrac{1}{2}$. 若平面向量 $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}\cdot\vec{e}_1=\vec{b}\cdot\vec{e}_2=1$，则 $\left|\vec{b}\right|=$________.

解析：由题可知，不妨 $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$，$\overrightarrow{e_2}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，设 $\vec{b}=(x,y)$，则 $\vec{b}\cdot\vec{e}_1=x=1$，$\vec{b}\cdot\vec{e}_2=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1$，所以 $\vec{b}=(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，所以 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

14. 已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2\leq 1$，则 $|2x+y-4|+|6-x-3y|$ 的最大值是________.

解析：



试题分析：$z=|2x+y-4|+|6-x-3y|=\begin{cases}2+x-2y, y\geq 2-2x\\ 10-3x-4y, y<2-2x\end{cases}$

由图可知当 $y\geq 2-2x$ 时，满足的是如图的 AB 劣弧，则 $z=2+x-2y$ 在点 $A(1,0)$ 处取得最大值 5；当 $y<2-2x$ 时，满足的是如图的 AB 优弧，则 $z=10-3x-4y$ 与该优弧相切时取得最大值，故 $d=\dfrac{|z-10|}{5}=1$，所以 $z=15$，故该目标函数的最大值为 15.

答案：15

15. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（ $a>b>0$ ）的右焦点 $F(c,0)$ 关于直线 $y=\frac{b}{c}x$ 的对称点 Q 在椭圆上，则椭圆的离心率是____________.

解析：设 F(c，0)关于直线 $y=\frac{b}{c}x$ 的对称点为 Q（m，n），则有 $\begin{cases}\frac{n}{m-c}\cdot\frac{b}{c}=-1\\ \frac{n}{2}=\frac{b}{c}\times\frac{m+2}{2}\end{cases}$ ，解得 $m=\frac{c^3-2b^2}{a^2},n=\frac{bc^2-2bc}{a^2}$ ，所以 $Q(\frac{c^3-2b^2}{a^2},\frac{bc^2-2bc}{a^2})$ 在椭圆上，即有 $\frac{(c^3-2b^2)^2}{a^2}+\frac{(bc^2-2bc)^2}{a^2b^2}=1$ ，解得 $a^2=2c^2$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题（本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

16. （本题满分 14 分）在 ΔABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $\tan(\frac{\pi}{4}+A)=2$.

（1）求 $\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}$ 的值；

（2）若 $B=\frac{\pi}{4},a=3$，求 ΔABC 的面积.

解析:（1）利用两角和与差的正切公式，得到 tanA=$\frac{1}{3}$，利用同角三角函数关系式得到结论；

（2）利用正弦定理得到边 b 的值，根据三角形，两边一夹角的面积公式计算得到三角形的面积.

答案：（1）由 $\tan(\frac{\pi}{4}+A)=2$ ，得 tanA=$\frac{1}{3}$，

所以 $\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\cos^2 A}=\frac{2\sin A\cos A}{2\sin A\cos A+\cos^2 A}=\frac{2\tan A}{2\tan A+1}=\frac{2}{5}$.

（2）由 tanA=$\frac{1}{3}$，可得，$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10},\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

a=3，B= $\frac{\pi}{4}$，由正弦定理知：b= $3\sqrt{5}$.

由 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\times 3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=9$.

17. （本题满分 15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足， $a_1=2, b_1=1, a_{n+1}=2a_n(\mathrm{n}\in\mathrm{N}^*)$,

$b_1+\frac{1}{2}b_2+\frac{1}{3}b_3+\cdots+\frac{1}{n}b_n=b_{n+1}-1(\mathrm{n}\in\mathrm{N}^*)$.

（1）求 a_n 与 b_n；

（2）记数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n.

解析：(1)根据数列递推关系式，确定数列的特点，得到数列的通项公式；(2)根据(1)问得到新的数列的通项公式，利用错位相减法进行数列求和.

答案：(1) 由 $a_1=2, a_{n-1}=2a_n$，得 $a_n=2^n$.

当 $n=1$ 时，$b_1=b_2-1$，故 $b_2=2$.

当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1}{n}b_n=b_{n-1}-b_n$，整理得 $\frac{b_{n-1}}{b_n}=\frac{n+1}{n}$，

所以 $b_n=n$.

(2)由(1)知，$a_nb_n=n\cdot 2^n$

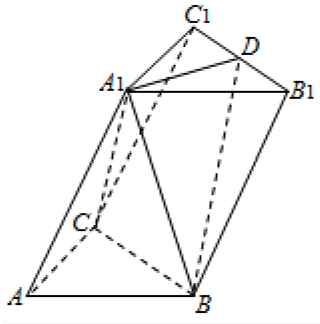
所以 $T_n=2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n$

$2T_n=2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$

所以 $T_n-2T_n=-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n-1}=(1-n)2^{n-1}-2$

所以 $T_n=(n-1)2^{n-1}+2$.

18. （本题满分 15 分）如图，在三棱锥 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90^0$，$AB=AC\ \ 2, AA_1=4, A_1$ 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点，D 为 B_1C_1 的中点.



(1)证明：$A_1D\perp$平面A_1BC；

(2)求直线A_1B和平面BB_1CC_1所成的角的正弦值.

解析：(1)利用线面垂直的定义得到线线垂直，根据线面垂直的判定证明直线与平面垂直；

(2)通过添加辅助线，证明$A_1F\perp$平面BB_1C_1C，以此找到直线与平面所成角的平面角∠A_1BF，在直角三角形A_1BF中通过确定边长，计算∠A_1BF的正弦值.

答案：（1）设E为BC中点.由题意得$A_1E\perp$平面ABC，所以$A_1E\perp AE$.

因为AB=AC，所以AE⊥BC.

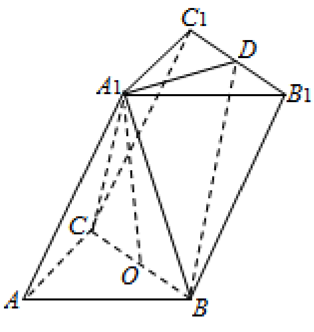
所以AE⊥平面A_1BC.

由D_1E分别为B_1C_1，BC的中点，得DE//BB_1，从而DE//AA_1，且DE=AA_1，

所以AA_1DE是平行四边形，所以A_1D//AE.

因为AE⊥平面A_1BC，所以$A_1D\perp$平面A_1BC.

(2)作$A_1F\perp DE$，垂足为F，连结BF.



因为$AE\perp$平面A_1BC，所以$BC\perp A_1E$.

因为$BC\perp AE$，所以$BC\perp$平面AA_1DE.

所以 $BC \perp A_1F, A_1F \perp$ 平面 BB_1C_1C .

所以 $\angle A_1BF$ 为直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的平面角.

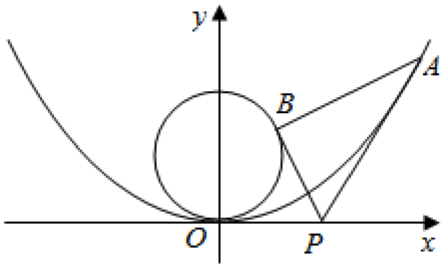
由 $AB = AC = 2, \angle CAB = 90^\circ$，得 $EA = EB = \sqrt{2}$.

由 $AE \perp$ 平面 A_1BC，得 $A_1A = A_1B = 4, A_1E = \sqrt{14}$.

由 $DE = BB_1 = 4, DA_1 = EA = \sqrt{2}, \angle DA_1E = 90^\circ$，得 $A_1F = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

所以 $\sin\angle A_1BF = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$

19. （本题满分 15 分）如图，已知抛物线 C_1: $y=\dfrac{1}{4}x^2$，圆 C_2: $x^2+(y-1)^2=1$，过点 $P(t,0)(t>0)$ 作不过原点 O 的直线 PA，PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切，A，B 为切点.



(1)求点 A，B 的坐标;

(2)求 ΔPAB 的面积.

注：直线与抛物线有且只有一个公共点，且与抛物线的对称轴不平行，则该直线与抛物线相切，称该公共点为切点.

解析：（1）设定直线 PA 的方程，通过联立方程，判别式为零，得到点 A 的坐标；根据圆的性质，利用点关于直线对称，得到点 B 的坐标；

（2）利用两点求距离及点到直线的距离公式，得到三角形的底边长与底边上的高，由此计算三角形的面积

答案：（1）由题意可知，直线 PA 的斜率存在，故可设直线 PA 的方程为 y=k（x-t）.

所以 $\begin{cases} y=k(x-t) \\ y=\dfrac{1}{4}x^2 \end{cases}$，消去 y，整理得：$x^2-4kx+4kt=0$.

因为直线 PA 与抛物线相切，所以 $\Delta = 16k^2 - 16kt = 0$，解得 $k = t$.

所以 $x = 2t$，即点 $A(2t, t^2)$.

设圆C_2的圆心为$D(0,1)$，点B的坐标为(x_0,y_0)，由题意知，点 B,O 关于直线 PD 对称，

故有$\begin{cases}\dfrac{y_0}{2}=-\dfrac{x_0}{2t}+1 \\ x_0t-y_0=0\end{cases}$，

解得$x_0=\dfrac{2t}{1+t^2},y_0=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$. 即点$B(\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{2t^2}{1+t^2})$.

(2)由(1)知，$|AP|=t\sqrt{1+t^2}$，

直线 AP 的方程为$tx-y-t^2=0$，

所以点 B 到直线 PA 的距离为$d=\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$.

所以ΔPAB的面积为$S=\dfrac{1}{2}|AP|\cdot d=\dfrac{t^3}{2}$.

20. （本题满分 15 分）设函数$f(x)=x^2+ax+b,(a,b\in R)$.

(1)当$b=\dfrac{a^2}{4}+1$时，求函数$f(x)$在$[-1,1]$上的最小值$g(a)$的表达式;

(2)已知函数$f(x)$在$[-1,1]$上存在零点，$0\le b-2a\le 1$，求 b 的取值范围.

解析：（1）将函数进行配方，利用对称轴与给定区间的位置关系，通过分类讨论确定函数在给定上的最小值，并用分段函数的形式进行表示;
（2）设定函数的零点，根据条件表示两个零点之间的不等关系，通过分类讨论，分别确定参数 b 的取值情况，利用并集原理得到参数 b 的取值范围.

答案：（1）当$b=\dfrac{a^2}{4}+1$时，$f(x)=(x+\dfrac{a}{2})^2+1$，故其对称轴为$x=-\dfrac{a}{2}$.

当 $a \le -2$ 时，$g(a)=f(1)=\frac{a^2}{4}+a+2$.

当 $-2<a\le 2$ 时，$g(a)=f(-\frac{a}{2})=1$.

当 $a>2$ 时，$g(a)=f(-1)=\frac{a^2}{4}-a+2$.

综上，$g(a)=\begin{cases}\frac{a^2}{4}+a+2, a\le -2, \\ 1, -2<a\le 2, \\ \frac{a^2}{4}-a+2, a>2\end{cases}$

(2)设 s, t 为方程 $f(x)=0$ 的解，且 $-1\le t\le 1$，则 $\begin{cases}s+t=-a \\ st=b\end{cases}$.

由于 $0\le b-2a\le 1$，因此 $\frac{-2t}{t+2}\le s\le \frac{1-2t}{t+2}(-1\le t\le 1)$.

当 $0\le t\le 1$ 时，$\frac{-2t^2}{t+2}\le b\le \frac{t-2t^2}{t+2}$，

由于 $-\frac{2}{3}\le \frac{-2t^2}{t+2}\le 0$ 和 $-\frac{1}{3}\le \frac{t-2t^2}{t+2}\le 9-4\sqrt{5}$，

所以 $-\frac{2}{3}\le b\le 9-4\sqrt{5}$.

当 $-1\le t\le 0$ 时，$\frac{t-2t^2}{t+2}\le b\le \frac{-2t^2}{t+2}$，

由于 $-2\le \frac{-2t^2}{t+2}<0$ 和 $-3\le \frac{t-t^2}{t+2}<0$，所以 $-3\le b<0$.

综上可知，b 的取值范围是 $[-3, 9-4\sqrt{5}]$.