

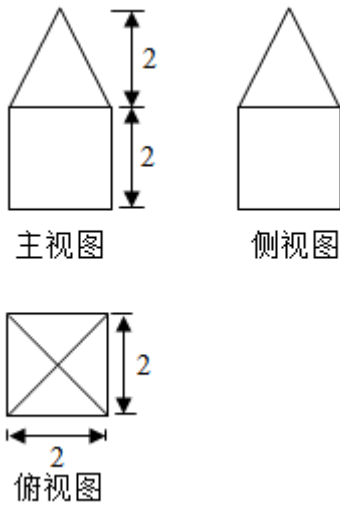
一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 已知集合 $P = \{x | x^2 - 2x \geq 3\}$ ， $Q = \{x | 2 < x < 4\}$ ， 则 $P \cap Q =$ ()
- A. $[3, 4)$
- B. $(2, 3]$
- C. $(-1, 2)$
- D. $(-1, 3]$

解析：由题意得， $P = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$ ， 所以 $P \cap Q = [3, 4)$ ， 故选 A.

答案：A

2. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积是 ()



- A. 8 cm^3
- B. 12 cm^3
- C. $\frac{32}{3} \text{ cm}^3$
- D. $\frac{40}{3} \text{ cm}^3$

解析：由三视图可知，该几何体是一个棱长为 2 的正方体与一个底面边长为 2，高为 2 的正四棱锥的组合体，故其体积为 $V = 2^3 + \frac{1}{3} \times 2^2 \times 2 = \frac{22}{3} \text{cm}^3$. 故选 C.

答案：C

3. 设 a, b 是实数，则 “ $a+b>0$ ” 是 “ $ab>0$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

解析：本题采用特殊值法，当 $a=3, b=-1$ 时， $a-b>0$ ，但 $ab<0$ ，故是不充分条件；当 $a=-3, b=-1$ 时， $ab>0$ ，但 $a-b<0$ ，故是不必要条件. 所以 “ $a-b>0$ ” 是 “ $ab>0$ ” 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

答案：D

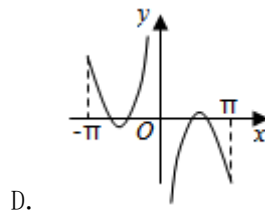
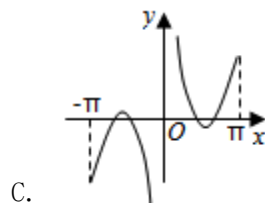
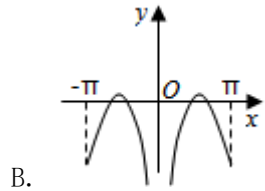
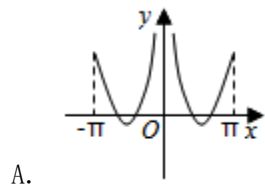
4. 设 α, β 是两个不同的平面， l, m 是两条不同的直线，且 $l \subset \alpha, m \subset \beta$ ()

- A. 若 $l \perp \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$
- B. 若 $\alpha \perp \beta$ ，则 $l \perp m$
- C. 若 $l // \beta$ ，则 $\alpha // \beta$
- D. 若 $\alpha // \beta$ ，则 $l // m$

解析：采用排除法，选项 A 中，平面与平面垂直的判定，故正确；选项 B 中，当 $\alpha \perp \beta$ 时， l, m 可以垂直，也可以平行，也可以异面；选项 C 中， $l // \beta$ 时， α, β 可以相交；选项 D 中， $\alpha // \beta$ 时， l, m 也可以异面. 故选 A.

答案：A

5. 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right) \cos x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$ 且 $x \neq 0$) 的图象可能为 ()



解析：因为 $f(-x) = (-x + \frac{1}{x})\cos x = -(x - \frac{1}{x})\cos x = -f(x)$ ，故函数是奇函数，所以排除

A, B；取 $x = \pi$ ，则 $f(\pi) = (\pi - \frac{1}{\pi})\cos \pi = -(\pi - \frac{1}{\pi}) < 0$ ，故选 D.

答案：D

6. 有三个房间需要粉刷，粉刷方案要求：每个房间只用一种颜色，且三个房间颜色各不相同.

已知三个房间的粉刷面积（单位： m^2 ）分别为 x ， y ， z ，且 $x < y < z$ ，三种颜色涂料

的粉刷费用（单位：元/ m^2 ）分别为 a ， b ， c ，且 $a < b < c$. 在不同的方案中，最低的

总费用（单位：元）是（ ）

A. $ax + by + cz$

B. $az + by + cx$

C. $ay + bz + cx$

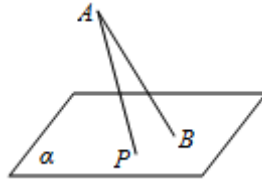
D. $ay + bx + cz$

解析：由 $x < y < z$ ， $a < b < c$ ，所以 $ax + by + cz - (az + by + cx) = a(x - z) + c(z - x) = (x - z)(a - c)$

>0 , 故 $ax+by+cz > az+by+cx$; 同理, $ay+bz+cx - (ay+bx+cz) = b(z-x) + c(x-z) = (x-z)(c-b) < 0$, 故 $ay+bz+cx < ay+bx+cz$. 因为 $az+by+cx - (ay+bz+cx) = a(z-y) + b(y-z) = (a-b)(z-y) < 0$, 故 $az+bx+cx < ay+bz+cx$. 故最低费用为 $az+by+cx$. 故选 B.

答案: B

7. 如图, 斜线段 AB 与平面 α 所成的角为 60° , B 为斜足, 平面 α 上的动点 P 满足 $\angle PAB = 30^\circ$, 则点 P 的轨迹是 ()



- A. 直线
- B. 抛物线
- C. 椭圆
- D. 双曲线的一支

解析: 由题可知, 当 P 点运动时, 在空间中, 满足条件的 AP 绕 AB 旋转形成一个圆锥, 用一个与圆锥高成 60° 角的平面截圆锥, 所得图形为椭圆. 故选 C.

答案: C

8. 设实数 a, b, t 满足 $|a+1| = |\sin b| = t$ ()

- A. 若 t 确定, 则 b^2 唯一确定
- B. 若 t 确定, 则 $a^2 + 2a$ 唯一确定
- C. 若 t 确定, 则 $\sin \frac{b}{2}$ 唯一确定
- D. 若 t 确定, 则 $a^2 + a$ 唯一确定

解析: 因为 $|a+1| = |\sin b| = t$, 所以 $(a+1)^2 = \sin^2 b = t^2$, 所以 $a^2 + 2a = t^2 - 1$, 故当 t 确定时, $t^2 - 1$ 确定, 所以 $a^2 + 2a$ 唯一确定. 故选 B.

答案: B

二、填空题（本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。）

9. 计算： $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $2^{\log_2 3 + \log_4 3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析： $\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$ ； $2^{\log_2 3 + \log_4 3} = 2^{\log_2 3} \times 2^{\log_4 3} = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

答案： $-\frac{1}{2}, 3\sqrt{3}$

10. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差 d 不为零. 若 a_2, a_3, a_7 成等比数列，且 $2a_1 + a_2 = 1$ ，
则 $a_1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $d = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析：由题可得， $(a_1 + 2d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 6d)$ ，故有 $3a_1 + 2d = 0$ ，又因为 $2a_1 + a_2 = 1$ ，
即 $3a_1 + d = 1$ ，所以 $d = -1, a_1 = \frac{2}{3}$.

答案： $\frac{2}{3}, -1$

11. 函数 $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1$ 的最小正周期是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析： $f(x) = \sin^2 x + \sin x \cos x + 1 = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} + 1 = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{2}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4}) + \frac{3}{2}$ ，所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ； $f(x)_{\min} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案： $\pi, \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ x + \frac{6}{x} - 6, & x > 1 \end{cases}$ ，则 $f[f(-2)] = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $f(x)$ 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

解析： $f(-2) = (-2)^2 = 4$ ，所以 $f[f(-2)] = f(4) = 4 + \frac{6}{4} - 6 = -\frac{1}{2}$. 当 $x \leq 1$ 时， $f(x) \geq 1$ ；当 x

>1 时, $f(x) \geq 2\sqrt{6}-6$, 当 $x = \frac{6}{x}$, $x = \sqrt{6}$ 时取到等号. 因为 $2\sqrt{6}-6 < 1$, 所以函数的最小值为 $2\sqrt{6}-6$.

答案: $-\frac{1}{2}; 2\sqrt{6}-6$

13. 已知 \vec{e}_1, \vec{e}_2 是平面单位向量, 且 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}$. 若平面向量 \vec{b} 满足 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = \vec{b} \cdot \vec{e}_2 = 1$, 则 $|\vec{b}| =$ _____.

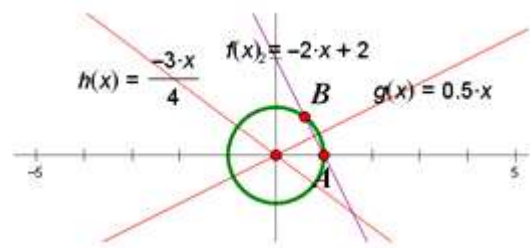
解析: 由题可知, 不妨 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 设 $\vec{b} = (x, y)$, 则 $\vec{b} \cdot \vec{e}_1 = x = 1$,

$\vec{b} \cdot \vec{e}_2 = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$, 所以 $\vec{b} = (1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, 所以 $|\vec{b}| = \sqrt{1 + \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

14. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 \leq 1$, 则 $|2x + y - 4| + |6 - x - 3y|$ 的最大值是 _____.

解析:



试题分析: $z = |2x + y - 4| + |6 - x - 3y| = \begin{cases} 2 + x - 2y, & y \geq 2 - 2x \\ 10 - 3x - 4y, & y < 2 - 2x \end{cases}$

由图可知当 $y \geq 2 - 2x$ 时, 满足的是如图的 AB 劣弧, 则 $z = 2 + x - 2y$ 在点 $A(1, 0)$ 处取得最大值 5; 当 $y < 2 - 2x$ 时, 满足的是如图的 AB 优弧, 则 $z = 10 - 3x - 4y$ 与该优弧相切

时取得最大值, 故 $d = \frac{|z-10|}{5} = 1$, 所以 $z = 15$, 故该目标函数的最大值为 15.

答案: 15

15. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右焦点 $F(c, 0)$ 关于直线 $y = \frac{b}{c}x$ 的对称点 Q 在椭圆上,

则椭圆的离心率是_____.

解析: 设 $F(c, 0)$ 关于直线 $y = \frac{b}{c}x$ 的对称点为 $Q(m, n)$, 则有

$$\begin{cases} \frac{n}{2} = \frac{b}{c} \times \frac{m+2}{2} \\ \frac{m-c}{2} = -\frac{n}{2} \end{cases}$$

解得 $m = \frac{c^2 - 2b^2}{a^2}, n = \frac{bc^2 - 2bc}{a^2}$, 所以 $Q(\frac{c^2 - 2b^2}{a^2}, \frac{bc^2 - 2bc}{a^2})$ 在椭圆上, 即有

$$\frac{(c^2 - 2b^2)^2}{a^4} + \frac{(bc^2 - 2bc)^2}{a^2 b^2} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 2c^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

答案: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

16. (本题满分 14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2.$$

(1) 求 $\frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A}$ 的值;

(2) 若 $B = \frac{\pi}{4}, a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解析: (1) 利用两角和与差的正切公式, 得到 $\tan A = \frac{1}{3}$, 利用同角三角函数关系式得到结论;

(2) 利用正弦定理得到边 b 的值, 根据三角形, 两边一夹角的面积公式计算得到三角形的面积.

答案: (1) 由 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = 2$, 得 $\tan A = \frac{1}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{\sin 2A}{\sin 2A + \cos^2 A} = \frac{2 \sin A \cos A}{2 \sin A \cos A + \cos^2 A} = \frac{2 \tan A}{2 \tan A + 1} = \frac{2}{5}$$

(2) 由 $\tan A = \frac{1}{3}$, 可得, $\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

$a=3, B=\frac{\pi}{4}$, 由正弦定理知: $b=3\sqrt{5}$.

由 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 3 \times 3\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 9$.

17. (本题满分 15 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足, $a_1=2, b_1=1, a_{n+1}=2a_n (n \in \mathbb{N}^*)$,

$$b_1 + \frac{1}{2}b_2 + \frac{1}{3}b_3 + \cdots + \frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbb{N}^*).$$

(1) 求 a_n 与 b_n ;

(2) 记数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求 T_n .

解析: (1) 根据数列递推关系式, 确定数列的特点, 得到数列的通项公式; (2) 根据 (1) 问得到新的数列的通项公式, 利用错位相减法进行数列求和.

答案: (1) 由 $a_1=2, a_{n+1}=2a_n$, 得 $a_n=2^n$.

当 $n=1$ 时, $b_1 = b_2 - 1$, 故 $b_2 = 2$.

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{n}b_n = b_{n+1} - b_n$, 整理得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n+1}{n}$,

所以 $b_n = n$.

(2) 由 (1) 知, $a_n b_n = n \cdot 2^n$

所以 $T_n = 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$

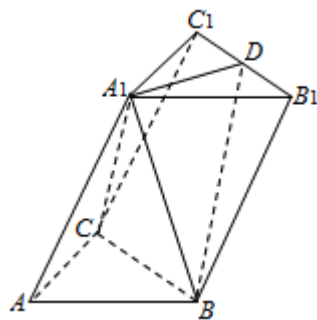
$$2T_n = 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

所以 $T_n - 2T_n = -T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$

所以 $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2$.

18. (本题满分 15 分) 如图, 在三棱锥 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,

$\angle ABC = 90^\circ$, $AB = AC = 2, AA_1 = 4, A_1$ 在底面 ABC 的射影为 BC 的中点, D 为 B_1C_1 的中点.



(1) 证明: $A_1D \perp$ 平面 A_1BC ;

(2) 求直线 A_1B 和平面 BB_1CC_1 所成的角的正弦值.

解析: (1) 利用线面垂直的定义得到线线垂直, 根据线面垂直的判定证明直线与平面垂直;

(2) 通过添加辅助线, 证明 $A_1F \perp$ 平面 BB_1C_1C , 以此找到直线与平面所成角的平面角 $\angle A_1BF$, 在直角三角形 A_1BF 中通过确定边长, 计算 $\angle A_1BF$ 的正弦值.

答案: (1) 设 E 为 BC 中点. 由题意得 $A_1E \perp$ 平面 ABC , 所以 $A_1E \perp AE$.

因为 $AB=AC$, 所以 $AE \perp BC$.

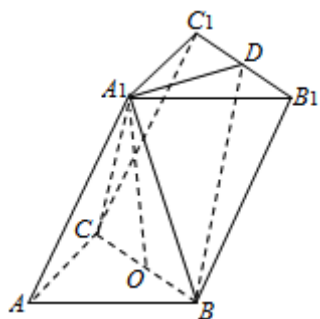
所以 $AE \perp$ 平面 A_1BC .

由 D, E 分别为 B_1C_1, BC 的中点, 得 $DE \parallel BB_1$, 从而 $DE \parallel AA_1$, 且 $DE=AA_1$,

所以 AA_1DE 是平行四边形, 所以 $A_1D \parallel AE$.

因为 $AE \perp$ 平面 A_1BC , 所以 $A_1D \perp$ 平面 A_1BC .

(2) 作 $A_1F \perp DE$, 垂足为 F , 连结 BF .



因为 $AE \perp$ 平面 A_1BC , 所以 $BC \perp A_1E$.

因为 $BC \perp AE$, 所以 $BC \perp$ 平面 AA_1DE .

所以 $BC \perp A_1F, A_1F \perp$ 平面 BB_1C_1C .

所以 $\angle A_1BF$ 为直线 A_1B 与平面 BB_1C_1C 所成角的平面角.

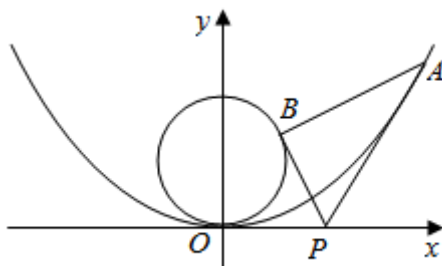
由 $AB = AC = 2, \angle CAB = 90^\circ$, 得 $EA = EB = \sqrt{2}$.

由 $AE \perp$ 平面 A_1BC , 得 $A_1A = A_1B = 4, A_1E = \sqrt{14}$.

由 $DE = BB_1 = 4, DA_1 = EA = \sqrt{2}, \angle DA_1E = 90^\circ$, 得 $A_1F = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

所以 $\sin \angle A_1BF = \frac{\sqrt{7}}{8}$

19. (本题满分 15 分) 如图, 已知抛物线 $C_1: y = \frac{1}{4}x^2$, 圆 $C_2: x^2 + (y-1)^2 = 1$, 过点 $P(t, 0) (t > 0)$ 作不过原点 O 的直线 PA, PB 分别与抛物线 C_1 和圆 C_2 相切, A, B 为切点.



(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 求 $\triangle PAB$ 的面积.

注: 直线与抛物线有且只有一个公共点, 且与抛物线的对称轴不平行, 则该直线与抛物线相切, 称该公共点为切点.

解析: (1) 设定直线 PA 的方程, 通过联立方程, 判别式为零, 得到点 A 的坐标; 根据圆的性质, 利用点关于直线对称, 得到点 B 的坐标;

(2) 利用两点求距离及点到直线的距离公式, 得到三角形的底边长与底边上的高, 由此计算三角形的面积

答案: (1) 由题意可知, 直线 PA 的斜率存在, 故可设直线 PA 的方程为 $y = k(x-t)$.

所以 $\begin{cases} y = k(x-t) \\ y = \frac{1}{4}x^2 \end{cases}$, 消去 y , 整理得: $x^2 - 4kx + 4kt = 0$.

因为直线 PA 与抛物线相切, 所以 $\Delta = 16k^2 - 16kt = 0$, 解得 $k = t$.

所以 $x = 2t$, 即点 $A(2t, t^2)$.

设圆 C_2 的圆心为 $D(0,1)$ ，点 B 的坐标为 (x_0, y_0) ，由题意知，点 B, O 关于直线 PD 对称，

$$\text{故有 } \begin{cases} \frac{y_0}{2} = -\frac{x_0}{2t} + 1, \\ x_0 t - y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } x_0 = \frac{2t}{1+t^2}, y_0 = \frac{2t^2}{1+t^2}. \text{ 即点 } B\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2}\right).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } |AP| = t\sqrt{1+t^2},$$

直线 AP 的方程为 $tx - y - t^2 = 0$,

$$\text{所以点 } B \text{ 到直线 } PA \text{ 的距离为 } d = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}.$$

$$\text{所以 } \triangle PAB \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2}|AP| \cdot d = \frac{t^3}{2}.$$

20. (本题满分 15 分) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b, (a, b \in R)$.

(1) 当 $b = \frac{a^2}{4} + 1$ 时，求函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的最小值 $g(a)$ 的表达式；

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上存在零点， $0 \leq b - 2a \leq 1$ ，求 b 的取值范围.

解析：(1) 将函数进行配方，利用对称轴与给定区间的位置关系，通过分类讨论确定函数在给定上的最小值，并用分段函数的形式进行表示；

(2) 设定函数的零点，根据条件表示两个零点之间的不等关系，通过分类讨论，分别确定参数 b 的取值情况，利用并集原理得到参数 b 的取值范围.

$$\text{当 } b = \frac{a^2}{4} + 1 \text{ 时, } f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1, \text{ 故其对称轴为 } x = -\frac{a}{2}.$$

答案：(1)

当 $a \leq -2$ 时, $g(a) = f(1) = \frac{a^2}{4} + a + 2$.

当 $-2 < a \leq 2$ 时, $g(a) = f(-\frac{a}{2}) = 1$.

当 $a > 2$ 时, $g(a) = f(-1) = \frac{a^2}{4} - a + 2$.

$$\text{综上, } g(a) = \begin{cases} \frac{a^2}{4} + a + 2, & a \leq -2, \\ 1, & -2 < a \leq 2, \\ \frac{a^2}{4} - a + 2, & a > 2 \end{cases}$$

(2) 设 s, t 为方程 $f(x) = 0$ 的解, 且 $-1 \leq t \leq 1$, 则 $\begin{cases} s+t = -a \\ st = b \end{cases}$.

由于 $0 \leq b - 2a \leq 1$, 因此 $\frac{-2t}{t+2} \leq s \leq \frac{1-2t}{t+2}$ ($-1 \leq t \leq 1$).

当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $\frac{-2t^2}{t+2} \leq b \leq \frac{t-2t^2}{t+2}$,

由于 $-\frac{2}{3} \leq \frac{-2t^2}{t+2} \leq 0$ 和 $-\frac{1}{3} \leq \frac{t-2t^2}{t+2} \leq 9-4\sqrt{5}$,

所以 $-\frac{2}{3} \leq b \leq 9-4\sqrt{5}$.

当 $-1 \leq t \leq 0$ 时, $\frac{t-2t^2}{t+2} \leq b \leq \frac{-2t^2}{t+2}$,

由于 $-2 \leq \frac{-2t^2}{t+2} < 0$ 和 $-3 \leq \frac{t-2t^2}{t+2} < 0$, 所以 $-3 \leq b < 0$.

综上所述, b 的取值范围是 $[-3, 9-4\sqrt{5}]$.