2017年普通高等学校招生全国统一考试(新课标Ⅱ卷)数学文

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合A={1，2，3}，B={2，3，4}，则A∪B=(　　)

A.{1，2，3，4}

B.{1，2，3}

C.{2，3，4}

D.{1，3，4}

解析：∵A={1，2，3}，B={2，3，4}，

∴A∪B={1，2，3，4}

答案：A.

2.(1+i)(2+i)=(　　)

A.1-i

B.1+3i

C.3+i

D.3+3i

解析：原式=2-1+3i=1+3i.

答案：B.

3.函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为(　　)

A.4π

B.2π

C.π

D.$\frac{\pi}{2}$

解析：函数 $f\left(x\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为：$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

答案：C.

4.设非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ 则(　　)

A.$\vec{a}\perp\vec{b}$

B.$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$

C.$\vec{a}\parallel\vec{b}$

D.$\left|\vec{a}\right|>\left|\vec{b}\right|$

解析：∵非零向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$，

$\therefore\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$，

解得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\therefore\vec{a}\perp\vec{b}$.

答案：A.

5.若 a＞1，则双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$的离心率的取值范围是(　　)

A.($\sqrt{2}$，+∞)

B.($\sqrt{2}$，2)

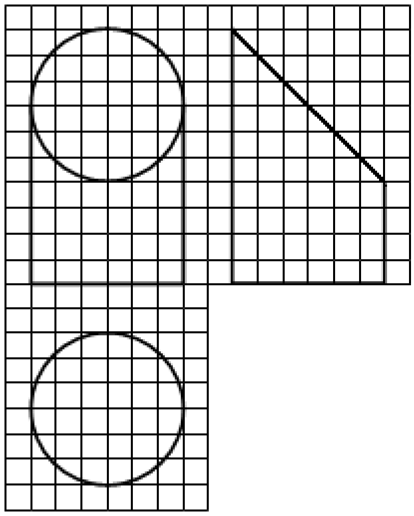
C.(1，$\sqrt{2}$)

D.(1，2)

解析：a＞1，则双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$的离心率为：$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}}\in\left(1,\sqrt{2}\right)$.

答案：C.

6.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，该几何体由一平面将一圆柱截去一部分后所得，则该几何体的体积为(　　)



A.90π

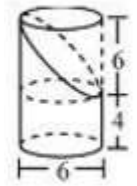
B.63π

C.42π

D.36π

解析：由三视图可得，直观图为一个完整的圆柱减去一个高为 6 的圆柱的一半，

$V=\pi\cdot 3^2\times 10-\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 3^2\times 6=63\pi$.

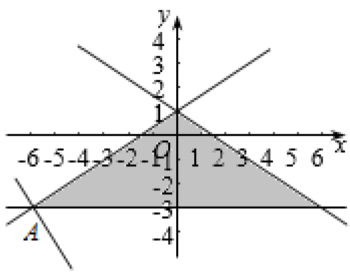



答案：B.

7.设 x，y 满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$，则 z=2x+y 的最小值是(　　)

A.-15
B.-9
C.1
D.9

解析：x、y 满足约束条件$\begin{cases}2x+3y-3\le 0\\2x-3y+3\ge 0\\y+3\ge 0\end{cases}$的可行域如图：




z=2x+y 经过可行域的 A 时，目标函数取得最小值，

由$\begin{cases}y=-3\\2x-3y+3=0\end{cases}$解得 A(-6，-3)，

则 z=2x+y 的最小值是：-15.
答案：A.

8.函数 f(x)=ln($x^2$-2x-8)的单调递增区间是(　　)
A.(-∞，-2)
B.(-∞，-1)
C.(1，+∞)
D.(4，+∞)
解析：解：由 $x^2$-2x-8＞0 得：x∈(-∞，-2)∪(4，+∞)，
令 t=$x^2$-2x-8，则 y=lnt，
∵x∈(-∞，-2)时，t=$x^2$-2x-8 为减函数；
x∈(4，+∞)时，t=$x^2$-2x-8 为增函数；
y=lnt 为增函数，
故函数 f(x)=ln($x^2$-2x-8)的单调递增区间是(4，+∞)，

答案：D.

9. 甲、乙、丙、丁四位同学一起去向老师询问成语竞赛的成绩，老师说，你们四人中有 2 位优秀，2 位良好，我现在给甲看乙、丙的成绩，给乙看丙的成绩，给丁看甲的成绩，看后甲对大家说：我还是不知道我的成绩，根据以上信息，则(　　)

A. 乙可以知道四人的成绩

B. 丁可能知道四人的成绩

C. 乙、丁可以知道对方的成绩

D. 乙、丁可以知道自己的成绩

解析：四人所知只有自己看到，老师所说及最后甲说话，

甲不知自己的成绩

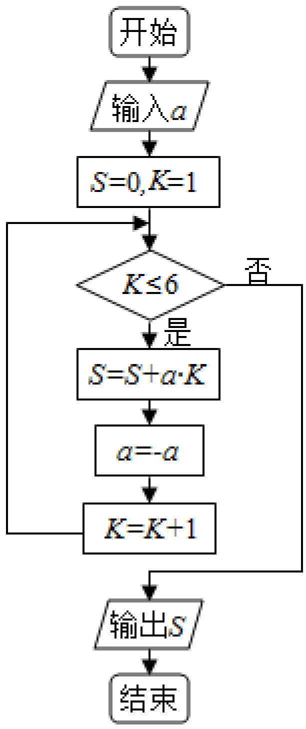
→乙丙必有一优一良，(若为两优，甲会知道自己的成绩；若是两良，甲也会知道自己的成绩)

→乙看到了丙的成绩，知自己的成绩

→丁看到甲、丁也为一优一良，丁知自己的成绩.

答案：D.

10. 执行如图的程序框图，如果输入的 a=-1，则输出的 S=(　　)




A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析：执行程序框图，有 S=0，K=1，a=-1，代入循环，

第一次满足循环，S=-1，a=1，K=2；

满足条件，第二次满足循环，S=1，a=-1，K=3；

满足条件，第三次满足循环，S=-2，a=1，K=4；

满足条件，第四次满足循环，S=2，a=-1，K=5；
满足条件，第五次满足循环，S=-3，a=1，K=6；
满足条件，第六次满足循环，S=3，a=-1，K=7；
7≤6 不成立，退出循环输出，S=3.
答案：B.

11.从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，则抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率为(　　)

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{10}$

D. $\frac{2}{5}$

解析：从分别写有 1，2，3，4，5 的 5 张卡片中随机抽取 1 张，放回后再随机抽取 1 张，
基本事件总数 n=5×5=25，
抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数包含的基本事件有：
(2，1)，(3，1)，(3，2)，(4，1)，(4，2)，(4，3)，(5，1)，(5，2)，(5，3)，(5，4)，
共有 m=10 个基本事件，
∴抽得的第一张卡片上的数大于第二张卡片上的数的概率 $p=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$.
答案：D.

12.过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M(M 在 x 轴上方)，l 为 C 的准线，点 N 在 l 上，且 MN⊥l，则 M 到直线 NF 的距离为(　　)

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3}$

解析：抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F(1，0)，且斜率为 3 的直线：y=$\sqrt{3}$(x-1)，

过抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点 F，且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线交 C 于点 M(M 在 x 轴上方)，l

可知：$\begin{cases} y^2=4x \\ y=\sqrt{3}(x-1) \end{cases}$，解得 M(3，$2\sqrt{3}$).

可得 N(-1，23)，NF 的方程为：y=-$\sqrt{3}$(x-1)，即 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$，

则 M 到直线 NF 的距离为：$\dfrac{\left|3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1}}=2\sqrt{3}$.

答案：C.

二、填空题，本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

13.函数 f(x)=2cosx+sinx 的最大值为____.

解析：函数 $f\left(x\right)=2\cos x+\sin x=\sqrt{5}\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\cos x+\dfrac{\sqrt{5}}{5}\sin x\right)=\sqrt{5}\sin\left(x+\theta\right)$，其中 tan θ=2，

可知函数的最大值为：$\sqrt{5}$.

答案：$\sqrt{5}$.

14.已知函数 f(x)是定义在 R 上的奇函数，当 x∈(-∞，0)时，$f(x)=2x^3+x^2$，则 f(2)=____.

解析：∵当 x∈(-∞，0)时，$f(x)=2x^3+x^2$，

∴f(-2)=-12，

又∵函数 f(x)是定义在 R 上的奇函数，

∴f(2)=12，

答案：12

15.长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为____.

解析：长方体的长、宽、高分别为 3，2，1，其顶点都在球 O 的球面上，可知长方体的对角线的长就是球的直径，

所以球的半径为：$\dfrac{1}{2}\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

则球 O 的表面积为：$4\times\left(\dfrac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\pi=14\pi$.

答案：14π.

16.△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 2bcosB=acosC+ccosA，则 B=____.

解析：∵2bcosB=acosC+ccosA，由正弦定理可得，

2cosBsinB=sinAcosC+sinCcosA=sin(A+C)=sinB，

∵sinB≠0，

∴$\cos B=\dfrac{1}{2}$，

∵0＜B＜π，

∴$B=\dfrac{\pi}{3}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$

三、解答题：共 70 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤，第 17 至 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.(一)必考题：共 60 分.

17.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n$，等比数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $T_n$，$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$.

(1)若 $a_3+b_3=5$，求$\{b_n\}$的通项公式;

(2)若 $T_3=21$，求 $S_3$.

解析：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，运用等差数列和等比数列的通项公式，列方程解方程可得 d，q，即可得到所求通项公式;

(2)运用等比数列的求和公式，解方程可得公比，再由等差数列的通项公式和求和，计算即可得到所求和.

答案：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

$a_1=-1$，$b_1=1$，$a_2+b_2=2$，$a_3+b_3=5$，

可得$-1+d+q=2$，$-1+2d+q^2=5$，

解得 $d=1$，$q=2$ 或 $d=3$，$q=0$(舍去)，

则$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n-1}$，$n\in N^*$;

(2)$b_1=1$，$T_3=21$，

可得 $1+q+q^2=21$，

解得 $q=4$ 或$-5$，

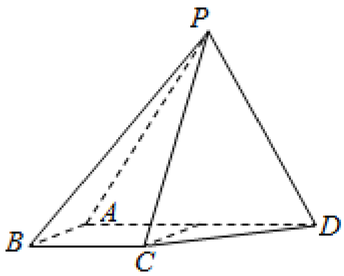
当 $q=4$ 时，$b2=4$，$a_2=2-4=-2$，

$d=-2-(-1)=-1$，$S_3=-1-2-3=-6$;

当 $q=-5$ 时，$b_2=-5$，$a_2=2-(-5)=7$，

$d=7-(-1)=8$，$S_3=-1+7+15=21$.

18.如图，四棱锥 P-ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$，$\angle BAD=\angle ABC=90°$.




(1)证明：直线 BC∥平面 PAD;

(2)若△PCD 面积为$2\sqrt{7}$，求四棱锥 P-ABCD 的体积.

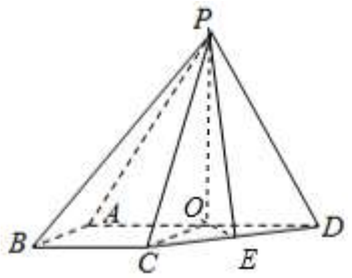
解析：(1)利用直线与平面平行的判定定理证明即可.

(2)利用已知条件转化求解几何体的线段长，然后求解几何体的体积即可.

答案：(1)证明：四棱锥 P-ABCD 中，∵$\angle BAD=\angle ABC=90°$.∴BC∥AD，∵AD$\subset$平面 PAD，BC?平面 PAD，

∴直线 BC∥平面 PAD;

(2)解：四棱锥 P-ABCD 中，侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 ABCD，AB=BC=$\frac{1}{2}$AD，∠BAD=∠ABC=90°．设 AD=2x，
则 AB=BC=x，CD=$\sqrt{2}$x，O 是 AD 的中点，
连接 PO，OC，CD 的中点为：E，连接 OE，



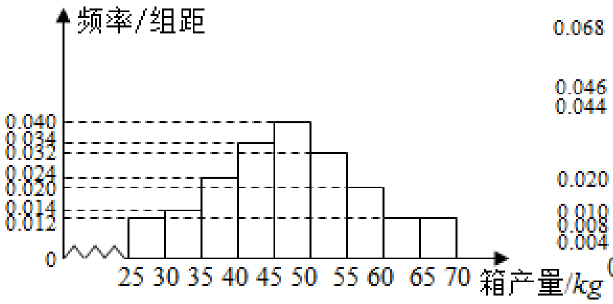

则 OE=$\frac{\sqrt{2}}{2}$x，PO=$\sqrt{3}$x，$PE=\sqrt{PO^2+OE^2}=\frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{2}}$，

△PCD 面积为$2\sqrt{7}$，可得：$\frac{1}{2}PE\cdot CD=2\sqrt{7}$，

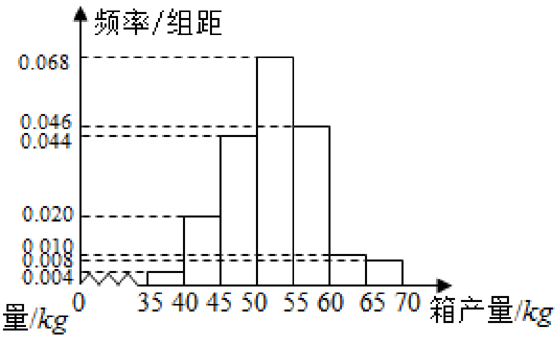
即：$\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}x\cdot\sqrt{2}x=2\sqrt{7}$，解得 x=2，PE=$2\sqrt{3}$.

则$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(BC+AD)\times AB\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

19.海水养殖场进行某水产品的新、旧网箱养殖方法的产量对比，收获时各随机抽取了 100 个网箱，测量各箱水产品的产量(单位：kg)，其频率分布直方图如下：




旧养殖法




新养殖法

(1)记 A 表示事件“旧养殖法的箱产量低于 50kg”，估计 A 的概率；
(2)填写下面列联表，并根据列联表判断是否有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关：

| | 箱产量＜50kg | 箱产量≥50kg |
|---|---|---|
| 旧养殖法 | | |
| 新养殖法 | | |

(3)根据箱产量的频率分布直方图，对两种养殖方法的优劣进行比较.
附：

| $P(K^2\geq K)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| K | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$.

解析：(1)根据题意，由旧养殖法的频率分布直方图计算可得答案；

(2) 由频率分布直方图可以将列联表补全，进而计算可得 $K^2=\frac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705>10.828$，与附表比较即可得答案；

(3)由频率分布直方图计算新旧养殖法产量的平均数，比较即可得答案.

答案：(1)根据题意，由旧养殖法的频率分布直方图可得：

P(A)=(0.012+0.014+0.024+0.034+0.040)×5=0.62；

(2)根据题意，补全列联表可得：

| | 箱产量＜50kg | 箱产量≥50kg | 总计 |
|---|---|---|---|
| 旧养殖法 | 62 | 38 | 100 |
| 新养殖法 | 34 | 66 | 100 |
| 总计 | 96 | 104 | 200 |

则有 $K^2=\frac{200(62\times66-38\times34)^2}{100\times100\times96\times104}\approx15.705>10.828$，

故有 99%的把握认为箱产量与养殖方法有关；

(3)由频率分布直方图可得：

旧养殖法 100 个网箱产量的平均数 $\overline{x_1}$=(27.5×0.012+32.5×0.014+37.5×0.024+42.5×0.034+47.5×0.040+52.5×0.032+57.5×0.032+62.5×0.012+67.5×0.012)×5=5×9.42=47.1；

新养殖法 100 个网箱产量的平均数 $\overline{x_2}$=(37.5×0.004+42.5×0.020+47.5×0.044+52.5×0.054+57.5×0.046+62.5×0.010+67.5×0.008)×5=5×10.47=52.35；

比较可得：$\overline{x_1}<\overline{x_2}$，

故新养殖法更加优于旧养殖法.

20.设 O 为坐标原点，动点 M 在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，过 M 作 x 轴的垂线，垂足为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

(1)求点 P 的轨迹方程；

(2)设点 Q 在直线 x=-3 上，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$.证明：过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

解析：(1)设 M($x_0$，$y_0$)，由题意可得 N($x_0$，0)，设 P(x，y)，运用向量的坐标运算，结合 M 满足椭圆方程，化简整理可得 P 的轨迹方程；

(2)设 Q(-3，m)，P($\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha$)，(0≤α＜2π)，运用向量的数量积的坐标表示，

可得 m，即有 Q 的坐标，求得椭圆的左焦点坐标，求得 OQ，PF 的斜率，由两直线垂直的条件：斜率之积为-1，即可得证.

答案：(1)设 M($x_0$，$y_0$)，由题意可得 N($x_0$，0)，

设 P(x，y)，由点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\sqrt{2}\overrightarrow{NM}$.

可得$\left(x-x_0,\ y\right)=\sqrt{2}\left(0,\ y_0\right)$，

可得 $x-x_0=0$，$y=\sqrt{2}y_0$，

即有 $x_0=x$，$y_0=\dfrac{y}{\sqrt{2}}$，

代入椭圆方程$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，可得$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，

即有点 P 的轨迹方程为圆 $x^2+y^2=2$；

(2)证明：设 Q(-3，m)，P($\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha$)，($0\leqslant\alpha<2\pi$)，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ}=1$，可得$\left(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha\right)\cdot\left(-3-\sqrt{2}\cos\alpha,\ m-\sqrt{2}\sin\alpha\right)=1$，

即为$-3\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos^2\alpha+\sqrt{2}m\sin\alpha-2\sin^2\alpha=1$，

解得$m=\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\cos\alpha\right)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

即有 Q(-3，$m=\dfrac{3\left(1+\sqrt{2}\cos\alpha\right)}{\sqrt{2}\sin\alpha}$)，

椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左焦点 F(-1，0)，

由$k_{OQ}=-\dfrac{1+\sqrt{2}\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha}$，

$k_{PF}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+1}$，

由 $k_{OQ}\cdot k_{PF}=-1$，

可得过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F.

21.设函数 $f(x)=(1-x^2)e^x$.

(1)讨论 f(x)的单调性；

(2)当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant ax+1$，求 a 的取值范围.

解析：(1)求出函数的导数，求出极值点，利用导函数的符号，判断函数的单调性即可.

(2)化简 $f(x)=(1-x)(1+x)e^x$. $f(x)\leqslant ax+1$，下面对 a 的范围进行讨论：

①当 $a\geqslant1$ 时，②当 $0<a<1$ 时，设函数 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1>0(x>0)$，推出结

论；③当 a≤0 时，推出结果，然后得到 a 的取值范围.

答案：(1)因为 $f(x)=(1-x^2)e^x$，x∈R，

所以 $f'(x)=(1-2x-x^2)e^x$，

令 $f'(x)=0$ 可知 $x=-1\pm\sqrt{2}$，

当 $x<-1-\sqrt{2}$ 或 $x>-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)<0$，当 $-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$ 时 $f'(x)>0$，

所以 f(x)在$(-\infty,-1-\sqrt{2})$，$(-1+\sqrt{2},+\infty)$上单调递减，在$(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2})$上单调递增；

(2)由题可知 $f(x)=(1-x)(1+x)e^x$.下面对 a 的范围进行讨论：

①当 a≥1 时，设函数 $h(x)=(1-x)e^x$，则 $h'(x)=-xe^x<0(x>0)$，

因此 h(x)在[0，+∞)上单调递减，

又因为 h(0)=1，所以 h(x)≤1，

所以 $f(x)=(1-x)h(x)\leq x+1\leq ax+1$；

②当 0<a<1 时，设函数 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1>0(x>0)$，

所以 g(x)在[0，+∞)上单调递增，

又 g(0)=1-0-1=0，

所以 $e^x\geq x+1$.

因为当 0<x<1 时 $f(x)>(1-x)(1+x)^2$，

所以 $(1-x)(1+x)^2-ax-1=x(1-a-x-x^2)$，

取 $x_0=\dfrac{\sqrt{5-4a}-1}{2}\in(0,1)$，则 $(1-x_0)(1+x_0)^2-ax_0-1=0$，

所以 $f(x_0)>ax_0+1$，矛盾；

③当 a≤0 时，取 $x_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\in(0,1)$，则 $f(x_0)>(1-x_0)(1+x_0)^2=1\geq ax_0+1$，矛盾；

综上所述，a 的取值范围是[1，+∞).

选考题：共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 $C_1$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta=4$.

(1)M 为曲线 $C_1$ 上的动点，点 P 在线段 OM 上，且满足|OM|·|OP|=16，求点 P 的轨迹 $C_2$ 的直角坐标方程；

(2)设点 A 的极坐标为$(2,\dfrac{\pi}{3})$，点 B 在曲线 $C_2$ 上，求△OAB 面积的最大值.

解析：(1)设 P(x，y)，利用相似得出 M 点坐标，根据|OM|·|OP|=16 列方程化简即可；

(2)求出曲线 $C_2$ 的圆心和半径，得出 B 到 OA 的最大距离，即可得出最大面积.

答案：(1)曲线 $C_1$ 的直角坐标方程为：x=4，

设 P(x，y)，M(4，y0)，则 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{y_0}$，$\therefore y_0=\dfrac{4y}{x}$，

∵|OM||OP|=16，

$\therefore\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{16+{y_0}^2}=16$，

即$\left(x^2+y^2\right)\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=16$，

∴$x^4+2x^2y^2+y^4=16x^2$，即$(x^2+y^2)^2=16x^2$，
两边开方得：$x^2+y^2=4x$，
整理得：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$，
∴点P的轨迹$C_2$的直角坐标方程：$(x-2)^2+y^2=4(x\neq 0)$.

(2)点A的直角坐标为A(1，$\sqrt{3}$)，显然点A在曲线$C_2$上，|OA|=2，

∴曲线$C_2$的圆心(2，0)到弦OA的距离$d=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

∴△AOB的最大面积$S=\frac{1}{2}|OA|\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=2+\sqrt{3}$.

[选修4-5：不等式选讲]
23.已知a＞0，b＞0，$a^3+b^3=2$，证明：
(1)$(a+b)(a^5+b^5)\geqslant 4$；
(2)$a+b\leqslant 2$.
解析：(1)由柯西不等式即可证明，

(2)由$a^3+b^3=2$转化为$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，再由均值不等式可得：

$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，即可得到$\frac{1}{4}(a+b)^3\leqslant 2$，问题得以证明.

答案：(1)由柯西不等式得：$\left(a+b\right)\left(a^5+b^5\right)\ge\left(\sqrt{a\cdot a^5}+\sqrt{b\cdot b^5}\right)^2=\left(a^3+b^3\right)^2\ge 4$，

当且仅当$\sqrt{ab^5}=\sqrt{ba^5}$，即a=b=1时取等号，
(2)∵$a^3+b^3=2$，
∴$(a+b)(a^2-ab+b^2)=2$，
∴$(a+b)[(a+b)^2-3ab]=2$，
∴$(a+b)^3-3ab(a+b)=2$，

∴$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab$，

由均值不等式可得：$\frac{(a+b)^3-2}{3(a+b)}=ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，

∴$\left(a+b\right)^3-2\le\frac{3\left(a+b\right)^3}{4}$，

∴$\frac{1}{4}\left(a+b\right)^3\le 2$，

∴$a+b\leq 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立.