2017年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)数学理

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合A={1，2，6}，B={2，4}，C={x∈R|-1≤x≤5}，则(A∪B)∩C=(　　)

A.{2}

B.{1，2，4}

C.{1，2，4，5}

D.{x∈R|-1≤x≤5}

解析：∵A={1，2，6}，B={2，4}，∴A∪B={1，2，4，6}，

又C={x∈R|-1≤x≤5}，∴(A∪B)∩C={1，2，4}.

答案：B

2.设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+y\geq 0,\\ x+2y-2\geq 0,\\ x\leq 0,\\ y\leq 3,\end{cases}$则目标函数z=x+y的最大值为(　　)

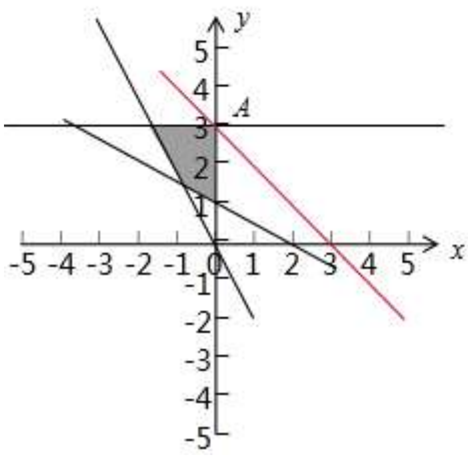
A. $\frac{2}{3}$

B.1

C. $\frac{3}{2}$

D.3

解析：变量x，y满足约束条件$\begin{cases}2x+y\geq 0,\\ x+2y-2\geq 0,\\ x\leq 0,\\ y\leq 3,\end{cases}$的可行域如图：

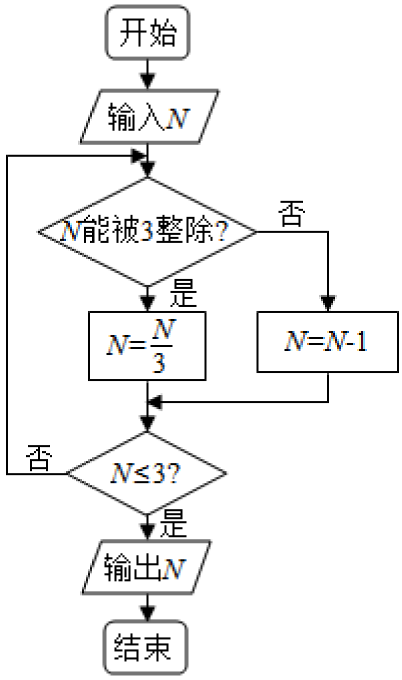


目标函数z=x+y结果可行域的A点时，目标函数取得最大值，

由$\begin{cases} y=3, \\ x=0 \end{cases}$可得 A(0，3)，目标函数 z=x+y 的最大值为：3.

答案：D

3.阅读下面的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 24，则输出 N 的值为(　　)



A.0

B.1

C.2

D.3

解析：第一次 N=24，能被 3 整除，N=$\frac{24}{3}$=8≤3 不成立，

第二次 N=8，8 不能被 3 整除，N=8-1=7，N=7≤3 不成立，

第三次 N=7，不能被 3 整除，N=7-1=6，N=$\frac{6}{3}$=2≤3 成立，

输出 N=2，

答案：C

4.设 θ∈R，则“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“$\sin\theta<\frac{1}{2}$”的(　　)

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

解析：$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}<\theta-\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow 0<\theta<\frac{\pi}{6}$， sin θ $<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6}+2k\pi<\theta<\frac{\pi}{6}+2k\pi$，k∈Z，则 $(0,\frac{\pi}{6}) \subsetneq [-\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi]$，k∈Z，

可得“$|\theta-\frac{\pi}{12}|<\frac{\pi}{12}$”是“sin θ $<\frac{1}{2}$”的充分不必要条件.

答案：A

5.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的左焦点为 F，离心率为 2.若经过 F 和 P(0，4)两点的直线平行于双曲线的一条渐近线，则双曲线的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

B. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$

D. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

解析：设双曲线的左焦点 F(-c，0)，离心率 e=$\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，c=$\sqrt{2}$a，

则双曲线为等轴双曲线，即 a=b，

双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm x$，

则经过 F 和 P(0，4)两点的直线的斜率 $k=\frac{4-0}{0+c}=\frac{4}{c}$，

则 $\frac{4}{c}$ =1，c=4，则 a=b=2$\sqrt{2}$，∴双曲线的标准方程：$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

答案：B

6.已知奇函数 f(x)在 R 上是增函数，g(x)=xf(x).若 a=g(-$\log_2 5.1$)，b=g($2^{0.8}$)，c=g(3)，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A.a＜b＜c

B.c＜b＜a

C.b＜a＜c

D.b＜c＜a

解析：奇函数 f(x)在 R 上是增函数，当 x＞0，f(x)＞f(0)=0，且 f′(x)＞0，

∴g(x)=xf(x)，则 g′(x)=f(x)+xf′(x)＞0，

∴g(x)在(0，+∞)单调递增，且 g(x)=xf(x)偶函数，

∴a=g(-$\log_2 5.1$)=g($\log_2 5.1$)，则 2＜-$\log_2 5.1$＜3，1＜$2^{0.8}$＜2，

由 g(x)在(0，+∞)单调递增，则 $g(2^{0.8})<g(\log_2 5.1)<g(3)$，∴b＜a＜c.
答案：C

7.设函数 f(x)=2sin(ωx+φ)，x∈R，其中ω＞0，|φ|＜x.若 $f(\frac{5\pi}{8})=2$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，且 f(x)的最小正周期大于 2π，则(　　)

A. $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$

B. $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=-\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega=\frac{1}{3}$，$\varphi=\frac{7\pi}{24}$

解析：由 f(x)的最小正周期大于 2π，得 $\frac{T}{4}>\frac{\pi}{2}$，

又 $f(\frac{5\pi}{8})=2$，$f(\frac{11\pi}{8})=0$，得 $\frac{T}{4}=\frac{11\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$，

∴T=3π，则 $\frac{2\pi}{\omega}=3\pi$，即 $\omega=\frac{2}{3}$. ∴f(x)=2sin(ωx+φ)=2sin($\frac{2}{3}$x+φ)，

由 $f(\frac{5\pi}{8})=2\sin(\frac{2}{3}\times\frac{5\pi}{8}+\varphi)=2$，得 $\sin(\varphi+\frac{5\pi}{12})=1$.

∴ $\varphi+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，k∈Z.取 k=0，得 $\varphi=\frac{\pi}{12}<\pi$. ∴ $\omega=\frac{2}{3}$，$\varphi=\frac{\pi}{12}$.
答案：A

8.已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-x+3, & x\le 1,\\ x+\frac{2}{x}, & x>1,\end{cases}$ 设 a∈R，若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\frac{2}{x}+a|$ 在 R 上恒成立，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[-\frac{47}{16}，2]$

B. $[-\frac{47}{16},\frac{39}{16}]$

C. $[-2\sqrt{3}，2]$

D. $[-2\sqrt{3},\frac{39}{16}]$

解析：当 x≤1 时，关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant|\frac{x}{2}+a|$ 在 R 上恒成立，

即为 $-x^2+x-3\leqslant\frac{x}{2}+a\leqslant x^2-x+3$，

即有-x^2+$\frac{1}{2}$x-3≤a≤x^2-$\frac{3}{2}$x+3，

由 y=-x^2+$\frac{1}{2}$x-3 的对称轴为 x=$\frac{1}{4}$<1，可得 x=$\frac{1}{4}$处取得最大值$-\frac{47}{16}$；

由 y=x^2-$\frac{3}{2}$x+3 的对称轴为 x=$\frac{3}{4}$<1，可得 x=$\frac{3}{4}$处取得最小值$\frac{39}{16}$，

则$-\frac{47}{16}\le a\le\frac{39}{16}$①，

当 x>1 时，关于 x 的不等式 f(x)≥|$\frac{x}{2}$+a|在 R 上恒成立，

即为$-\left(x+\frac{2}{x}\right)\le\frac{x}{2}+a\le x+\frac{2}{x}$，即有$-\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{x}\right)\le a\le\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$，

由$y=-\left(\frac{3}{2}x+\frac{2}{x}\right)\le-2\sqrt{\frac{3x}{2}\cdot\frac{2}{x}}=-2\sqrt{3}$（当且仅当 x=$\frac{2}{\sqrt{3}}$>1)取得最大值-2$\sqrt{3}$；

由$y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}\ge2\sqrt{\frac{1}{2}x\cdot\frac{2}{x}}=2$（当且仅当 x=2>1)取得最小值 2.

则-2$\sqrt{3}$≤a≤2②，由①②可得，-$\frac{47}{16}$≤a≤2.

答案：A

二.填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.已知 a∈R，i 为虚数单位，若$\frac{a-i}{2+i}$为实数，则 a 的值为____________.

解析：a∈R，i 为虚数单位，

$$\frac{a-i}{2+i}=\frac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2a-1-(2+a)i}{4+1}=\frac{2a-1}{5}-\frac{2+a}{5}i,$$

由$\frac{a-i}{2+i}$为实数，可得-2+a5=0，解得 a=-2.

答案：-2

10.已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为 18，则这个球的体积为______________.

解析：设正方体的棱长为 a，

∵这个正方体的表面积为 18，∴6a^2=18，则 a^2=3，即 a=$\sqrt{3}$，

∵一个正方体的所有顶点在一个球面上，∴正方体的体对角线等于球的直径，

即$\sqrt{3}$a=2R，即 R=$\frac{3}{2}$，则球的体积 V=$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.

答案：$\frac{9\pi}{2}$

11. 在极坐标系中，直线 4ρcos(θ－$\frac{\pi}{6}$)+1=0 与圆ρ=2sinθ的公共点的个数为________________.

解析：直线 4ρcos(θ－π6)+1=0 展开为：4ρ($\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta$)+1=0，化为：$2\sqrt{3}$x+2y+1=0.

圆ρ=2sinθ即ρ^2=2ρsinθ，化为直角坐标方程：$x^2+y^2=2y$，配方为：$x^2+(y-1)^2=1$.

∴圆心 C(0，1)到直线的距离$d=\frac{3}{\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}}=\frac{3}{4}<1$=R.

∴直线 4ρcos(θ－$\frac{\pi}{6}$)+1=0 与圆ρ=2sinθ的公共点的个数为 2.

答案：2

12. 若 a，b∈R，ab＞0，则$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$的最小值为______________.

解析：a，b∈R，ab＞0，∴$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\ge\frac{2\sqrt{a^4\cdot 4b^4}+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\ge 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$，

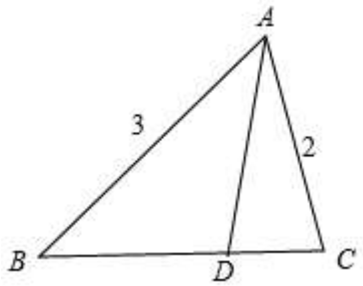
当且仅当$\begin{cases}a^4=4b^4,\\4ab=\frac{1}{ab},\end{cases}$即$\begin{cases}a^2=2b^2,\\a^2b^2=\frac{1}{4},\end{cases}$

即 a=$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，b=$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$或 a=－$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，b=－$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$时取“=”；∴上式的最小值为 4.

答案：4

13. 在△ABC 中，∠A=60°，AB=3，AC=2. 若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\left(\lambda\in R\right)$，且$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$=－4，则λ的值为____________.

解析：如图所示，



△ABC 中，∠A=60°，AB=3，AC=2，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}BC=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ （λ∈R），

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}^2$

$=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\times 3\times 2\times\cos 60^\circ-\frac{1}{3}\times 3^2+\frac{2}{3}\lambda\times 2^2=-4$，

$\therefore \frac{11}{3}\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{3}{11}$.

答案：$\frac{3}{11}$

14.用数字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成没有重复数字，且至多有一个数字是偶数的四位数，这样的四位数一共有__________个.

解析：根据题意，分 2 种情况讨论：

①四位数中没有一个偶数数字，即在 1、3、5、7、9 种任选 4 个，组成一共四位数即可，

有 A_5^4=120 种情况，即有 120 个没有一个偶数数字四位数；

②四位数中只有一个偶数数字，

在 1、3、5、7、9 种选出 3 个，在 2、4、6、8 中选出 1 个，有 $C_5^3\cdot C_4^1$=40 种取法，

将取出的 4 个数字全排列，有 A_4^4=24 种顺序，则有 40×24=960 个只有一个偶数数字的四位数；则至多有一个数字是偶数的四位数有 120+960=1080 个.

答案：1080

三.解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c.已知 a＞b，a=5，c=6，sinB=$\frac{3}{5}$.

(Ⅰ)求 b 和 sinA 的值；

(Ⅱ)求 sin(2A+$\frac{\pi}{4}$)的值.
解析:(Ⅰ)由已知结合同角三角函数基本关系式求得 cosB，再由余弦定理求得 b，利用正弦定理求得 sinA;
(Ⅱ)由同角三角函数基本关系式求得 cosA，再由倍角公式求得 sin2A，cos2A，展开两角和的正弦得答案.
答案:(Ⅰ)在△ABC 中，∵a＞b，
故由 sinB=$\frac{3}{5}$，可得 cosB=$\frac{4}{5}$.
由已知及余弦定理，有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=25+36-2\times5\times6\times\frac{4}{5}=13$，∴b=$\sqrt{13}$.
由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 sinA=$\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ∴b=$\sqrt{13}$，sinA=$\frac{3\sqrt{13}}{13}$;
(Ⅱ)由(Ⅰ)及 a＜c,得 cosA=$\frac{2\sqrt{13}}{13}$，∴sin2A=2sinAcosA=$\frac{12}{13}$，$\cos^2 A=1-2\sin^2 A=-\frac{5}{13}$.
故 $\sin(2A+\frac{\pi}{4})=\sin 2A\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$.

16. 从甲地到乙地要经过 3 个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$.
(Ⅰ)设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望;
(Ⅱ)若有 2 辆车独立地从甲地到乙地，求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率.
解析:(Ⅰ)随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3，求出对应的概率值，
写出它的分布列，计算数学期望值;
(Ⅱ)利用相互独立事件同时发生的概率公式计算所求事件的概率值.
答案:(Ⅰ)随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，3;
则 $P(X=0)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$,

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{11}{24},$$

$$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24};$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

随机变量 X 的数学期望为$E\left(X\right)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{11}{24}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{24}=\frac{13}{12}$；

(II)设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数，Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，

则所求事件的概率为

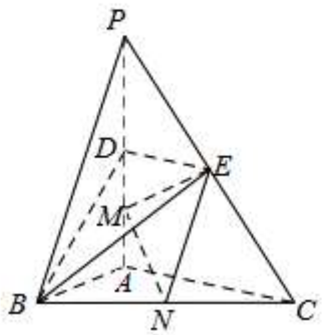
P(Y+Z=1)=P(Y=0，Z=1)+P(Y=1，Z=0)

=P(Y=0)•P(Z=1)+P(Y=1)•P(Z=0)

$=\frac{1}{4}\times\frac{11}{24}+\frac{11}{24}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{48}$；

所以，这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为$\frac{11}{48}$.

17.如图，在三棱锥 P-ABC 中，PA⊥底面 ABC，∠BAC=90°.点 D，E，N 分别为棱 PA，PC，BC 的中点，M 是线段 AD 的中点，PA=AC=4，AB=2.



(Ⅰ)求证：MN∥平面 BDE；

(II)求二面角 C-EM-N 的正弦值；

(III)已知点 H 在棱 PA 上，且直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{21}$，求线段 AH 的长.

解析：(Ⅰ)取 AB 中点 F，连接 MF、NF，由已知可证 MF∥平面 BDE，NF∥平面 BDE.得到平面 MFN∥平面 BDE，则 MN∥平面 BDE；

(II)由 PA⊥底面 ABC，∠BAC=90°.可以 A 为原点，分别以 AB、AC、AP 所在直线为 x、y、z 轴建立空间直角坐标系.求出平面 MEN 与平面 CME 的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值得二面角 C-EM-N 的余弦值，进一步求得正弦值；

(III)设 AH=t，则 H(0，0，t)，求出$\overrightarrow{NH}$、$\overrightarrow{BE}$的坐标，结合直线 NH 与直线 BE 所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{21}$列式求得线段 AH 的长.

答案：(Ⅰ)取 AB 中点 F，连接 MF、NF，

∵M 为 AD 中点，∴MF∥BD，

∵BD⊂平面BDE，MF⊄平面BDE，∴MF∥平面BDE.

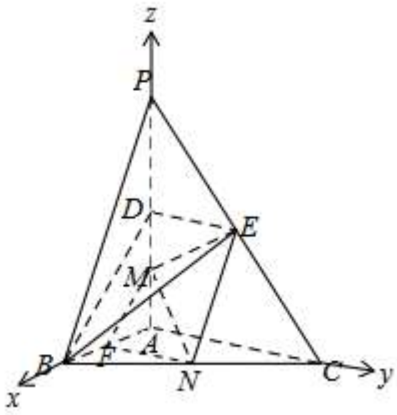
∵N为BC中点，∴NF∥AC，又D、E分别为AP、PC的中点，∴DE∥AC，则NF∥DE.

∵DE⊂平面BDE，NF⊄平面BDE，∴NF∥平面BDE.

又MF∩NF=F.∴平面MFN∥平面BDE，则MN∥平面BDE;

(Ⅱ)∵PA⊥底面ABC，∠BAC=90°.

∴以A为原点，分别以AB、AC、AP所在直线为x、y、z轴建立空间直角坐标系.



∵PA=AC=4，AB=2，

∴A(0，0，0)，B(2，0，0)，C(0，4，0)，M(0，0，1)，N(1，2，0)，E(0，2，2)，

则$\overrightarrow{MN}$=(1，2，-1)，$\overrightarrow{ME}$=(0，2，1)，

设平面MEN的一个法向量为$\vec{m}$=(x，y，z)，

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{MN}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{ME}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x+2y-z=0,\\ 2y+z=0,\end{cases}$取z=2，得$\vec{m}$=(4，-1，2).

由图可得平面CME的一个法向量为$\vec{n}$=(1，0，0).

∴$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\vec{m}\cdot\vec{n}\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|=\frac{4}{\sqrt{21}\times1}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$.

∴二面角C-EM-N的余弦值为$\frac{4\sqrt{21}}{21}$，则正弦值为$\frac{\sqrt{105}}{21}$;

(III)解：设AH=t，则H(0，0，t)，$\overrightarrow{NH}$=(-1，-2，t)，$\overrightarrow{BE}$=(-2，2，2).

∵直线NH与直线BE所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{21}$，

∴$|\cos<\overrightarrow{NH},\overrightarrow{BE}>|=|\frac{\overrightarrow{NH}\cdot\overrightarrow{BE}}{\left|\overrightarrow{NH}\right|\left|\overrightarrow{BE}\right|}|=|\frac{2t-2}{\sqrt{5+t^2}\times2\sqrt{3}}|=\frac{3\sqrt{7}}{21}$，解得：t=4.

∴当H与P重合时直线NH与直线BE所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{7}}{21}$，此时线段AH的长为4.

18.已知$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为$S_n(n\in N^*)$，$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前 n 项和$(n\in N+)$.

解析:(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.通过$b_2+b_3=12$，求出 q，得到$b_n=2^n$.然后求出公差 d，推出$a_n=3n-2$.

(Ⅱ)化简数列的通项公式，利用错位相减法求解数列的和即可.

答案:(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.由已知 $b_2+b_3=12$，得$b_1(q+q^2)=12$，而$b_1=2$，所以$q^2+q-6=0$.又因为$q>0$，解得$q=2$.所以，$b_n=2^n$.

由$b_3=a_4-2a_1$，可得$3d-a_1=8$.

由$S_{11}=11b_4$，可得$a_1+5d=16$，联立①②，解得$a_1=1$，$d=3$，

由此可得$a_n=3n-2$.所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^n$.

(II)设数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前 n 项和为T_n，

由$a_{2n}=6n-2$，$b_{2n-1}=\frac{1}{2}\times 4^n$，有$a_{2n}b_{2n-1}=(3n-1)4^n$，

故$T_n=2\times 4+5\times 4^2+8\times 4^3+\cdots+(3n-1)4^n$，

$4T_n=2\times 4^2+5\times 4^3+8\times 4^4+\cdots+(3n-1)4^{n+1}$，

上述两式相减，得$-3T_n=2\times 4+3\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+3\times 4^n-(3n-1)4^{n+1}$

$=\frac{12\times\left(1-4^n\right)}{1-4}-4-(3n-1)4^{n+1}=-(3n-2)4^{n+1}-8$，

得$T_n=\frac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\frac{8}{3}$.

所以，数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前 n 项和为$\frac{3n-2}{3}\times 4^{n+1}+\frac{8}{3}$.

19.设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>b>0)$的左焦点为 F，右顶点为 A，离心率为$\frac{1}{2}$.已知 A 是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点，F 到抛物线的准线 l 的距离为$\frac{1}{2}$.

(I)求椭圆的方程和抛物线的方程;

(II)设 l 上两点 P，Q 关于 x 轴对称，直线 AP 与椭圆相交于点 B(B 异于 A)，直线 BQ 与 x 轴相交于点 D.若△APD 的面积为$\frac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AP 的方程.

解析:(I)根据椭圆和抛物线的定义、性质列方程组求出 a，b，p 即可得出方程;

(II)设 AP 方程为$x=my+1$，联立方程组得出 B，P，Q 三点坐标，从而得出直线 BQ 的方程，解出 D 点坐标，根据三角形的面积列方程解出 m 即可得出答案.

答案:(Ⅰ)设 F 的坐标为$(-c，0)$.

依题意可得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a=\dfrac{p}{2},\\ a-c=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 a=1，c=$\dfrac{1}{2}$，p=2，于是 $b^2=a^2-c^2=\dfrac{3}{4}$.

所以，椭圆的方程为 $x^2+\dfrac{4y^2}{3}=1$，抛物线的方程为 $y^2=4x$.

(Ⅱ)直线 l 的方程为 x=-1，设直线 AP 的方程为 x=my+1(m≠0)，

联立方程组$\begin{cases}x=-1,\\ x=my+1,\end{cases}$解得点 P(-1，$-\dfrac{2}{m}$)，故 Q(-1，$\dfrac{2}{m}$).

联立方程组 x=my+1，$x^2+4y^2 3=1$，消去 x，整理得 $(3m^2+4)y^2+6my=0$，解得 y=0，或 y=$-\dfrac{6m}{3m^2+4}$.

∴B($\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4}$，$\dfrac{-6m}{3m^2+4}$).

∴直线 BQ 的方程为$\left(\dfrac{-6m}{3m^2+4}-\dfrac{2}{m}\right)(x+1)-\left(\dfrac{-3m^2+4}{3m^2+4}+1\right)\left(y-\dfrac{2}{m}\right)=0$，

令 y=0，解得 $x=\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}$，故 D($\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}$，0). ∴|AD|=1-$\dfrac{2-3m^2}{3m^2+2}=\dfrac{6m^2}{3m^2+2}$.

又∵△APD 的面积为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，∴$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6m^2}{3m^2+2}\times\dfrac{2}{|m|}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，整理得 $3m^2-2\sqrt{6}|m|+2=0$，解得|m|=

$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，∴m=±$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

∴直线 AP 的方程为 $3x+\sqrt{6}y-3=0$，或 $3x-\sqrt{6}y-3=0$.

20. 设 a∈Z，已知定义在 R 上的函数 $f(x)=2x^4+3x^3-3x^2-6x+a$ 在区间(1，2)内有一个零点 x_0，g(x)为 f(x)的导函数.

(Ⅰ)求 g(x)的单调区间；

(Ⅱ)设 m∈[1，x_0)∪(x_0，2]，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，求证：$h(m)h(x_0)<0$；

(III)求证：存在大于 0 的常数 A，使得对于任意的正整数 p，q，且$\dfrac{p}{q}$∈[1，x_0)∪(x_0，2]，

满足$\left|\dfrac{p}{q}-x_0\right|\ge\dfrac{1}{Aq^4}$.

解析：(Ⅰ)求出函数的导函数 $g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，求出极值点，通过列表判断函数的单调性求出单调区间即可.

(Ⅱ)由 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，推出 $h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，

令函数 $H1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，求出导函数 $H'1(x)$利用(Ⅰ)知，推出 $h(m)h(x_0)<0$.

(III)对于任意的正整数 p,q,且$\frac{p}{q}\in[1,x0)\cup(x0,2]$,令 $m=\frac{p}{q}$,函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$.

由(Ⅱ)知，当 $m\in[1, x_0)$时，当 $m\in(x_0, 2]$时，通过 h(x)的零点.转化推出

$$\left|\frac{p}{q}-x_0\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{g(x_1)}\right|\geq\frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{g(2)}=\frac{\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|}{g(2)q^4}$$

. 推 出

$|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|\geqslant1$.然后推出结果.

答案：(Ⅰ)由 $f(x)=2x^4+3^{x3}-3x^2-6x+a$，可得 $g(x)=f'(x)=8x^3+9x^2-6x-6$，

进而可得 $g'(x)=24x^2+18x-6$.令 $g'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=\frac{1}{4}$.

当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, +\infty)$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	↗	↘	↗

所以，$g(x)$的单调递增区间是$(-\infty, -1)$，$(\frac{1}{4}, +\infty)$，单调递减区间是$(-1, \frac{1}{4})$.

(Ⅱ)由 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$，得 $h(m)=g(m)(m-x_0)-f(m)$，$h(x_0)=g(x_0)(m-x_0)-f(m)$.

令函数 $H_1(x)=g(x)(x-x_0)-f(x)$，则 $H'_1(x)=g'(x)(x-x_0)$.

由(Ⅰ)知，当 $x\in[1, 2]$时，$g'(x)>0$，

故当 $x\in[1, x_0)$时，$H'_1(x)<0$，$H_1(x)$单调递减；

当 $x\in(x_0, 2]$时，$H'_1(x)>0$，$H_1(x)$单调递增.

因此，当 $x\in[1, x_0)\cup(x_0, 2]$时，$H1(x)>H_1(x_0)=-f(x_0)=0$，可得 $H_1(m)>0$ 即 $h(m)>0$，

令函数 $H_2(x)=g(x_0)(x-x_0)-f(x)$，则 $H'_2(x)=g'(x_0)-g(x)$.由(Ⅰ)知，g(x)在[1，2]上单调递增，故当 $x\in[1,x_0)$时，$H'2(x)>0$，$H_2(x)$单调递增；当 $x\in(x_0,2]$时，$H'_2(x)<0$，$H_2(x)$单调递减.因此，当 $x\in[1,x_0)\cup(x_0,2]$时，$H_2(x)>H_2(x_0)=0$，可得得 $H_2(m)<0$ 即 $h(x_0)<0$，

所以，$h(m)h(x_0)<0$.

(III)对于任意的正整数 p，q，且$\frac{p}{q}\in[1, x_0)\cup(x_0, 2]$，

令 $m=\frac{p}{q}$，函数 $h(x)=g(x)(m-x_0)-f(m)$.

由(Ⅱ)知，当 $m\in[1, x_0)$时，h(x)在区间(m, x_0)内有零点；

当 m∈(x_0，2]时，h(x)在区间(x_0，m)内有零点.

所以 h(x)在(1，2)内至少有一个零点，不妨设为 x_1，则 $h(x_1)=g(x_1)(\frac{p}{q}-x_0)-f(\frac{p}{q})=0$.

由(Ⅰ)知 g(x)在[1，2]上单调递增，故 $0<g(1)<g(x_1)<g(2)$，

于是 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|=\left|\frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{g(x_1)}\right|\geq\frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{g(2)}=\frac{\left|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4\right|}{g(2)q^4}$.

因为当 x∈[1，2]时，g(x)＞0，故 f(x)在[1，2]上单调递增，

所以 f(x)在区间[1，2]上除 x_0 外没有其他的零点，而 $\frac{p}{q}\neq x_0$，故 $f(\frac{p}{q})\neq 0$.

又因为 p，q，a 均为整数，所以 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|$ 是正整数，从而 $|2p^4+3p^3q-3p^2q^2-6pq^3+aq^4|\geqslant 1$.

所以 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geq\frac{1}{g(2)q^4}$. 所以，只要取 A=g(2)，就有 $\left|\frac{p}{q}-x_0\right|\geq\frac{1}{Aq^4}$.