

1. 已知集合  $A = \{x | x = 3n + 2, n \in N\}$ ,  $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ , 则集合  $A \cap B$  中的元素个数为

( )

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2+

解析: 由条件知, 当  $n=2$  时,  $3n+2=8$ , 当  $n=4$  时,  $3n+2=14$ , 故  $A \cap B = \{8, 14\}$ .

答案: D

2. 已知点  $A(0, 1)$ ,  $B(3, 2)$ , 向量  $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$ , 则向量  $\overrightarrow{BC} = ( )$

A.  $(-7, -4)$

B.  $(7, 4)$

C.  $(-1, 4)$

D.  $(1, 4)$

解析: 因为  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 1)$ , 所以  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-7, -4)$ .

答案: A

3. 已知复数  $z$  满足  $(z-1)i = 1+i$ , 则  $z = ( )$

A.  $-2-i$

B.  $-2+i$

C.  $2-i$

D.  $2+i$

解析:  $\because (z-1)i = 1+i, \therefore z = \frac{1+2i}{i} = \frac{(1+2i)(-i)}{-i^2} = 2-i$ .

答案: C

4. 如果 3 个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长, 则称这 3 个数为一组勾股数, 从 1,

2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数, 则这 3 个数构成一组勾股数的概率为( )

A.  $\frac{3}{10}$

B.  $\frac{1}{5}$

C.  $\frac{1}{10}$

D.  $\frac{1}{20}$

解析：从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 3 个不同的数共有 10 种不同的取法，其中的勾股数只有 3, 4, 5，故 3 个数构成一组勾股数的取法只有 1 种，故所求概率为  $\frac{1}{10}$ 。

答案：C

5. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，离心率为  $\frac{1}{2}$ ，E 的右焦点与抛物线 C:  $y^2=8x$  的焦点重合，

A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点，则  $|AB|=( )$

A. 3

B. 6

C. 9

D. 12

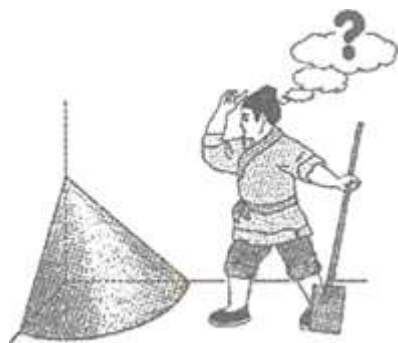
解析：椭圆 E 的中心在坐标原点，离心率为  $\frac{1}{2}$ ，E 的右焦点(c, 0)与抛物线 C:  $y^2=8x$  的焦点(2, 0)重合，

可得  $c=2$ ,  $a=4$ ,  $b^2=12$ ，椭圆的标准方程为： $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ，  
抛物线的准线方程为： $x=-2$ ，

由  $\begin{cases} x=-2 \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ ，解得  $y=\pm 3$ ，所以  $A(-2, 3)$ ,  $B(-2, -3)$ ， $|AB|=6$ 。

答案：B

6. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题：“今有委米依垣内角，下周八尺，高五尺。问：积及为米几何？”其意思为：“在屋内墙角处堆放米(如图，米堆为一个圆锥的四分之一)，米堆为一个圆锥的四分之一，米堆底部的弧度为 8 尺，米堆的高为 5 尺，问米堆的体积和堆放的米各为多少？”已知 1 斛米的体积约为 1.62 立方尺，圆周率约为 3，估算出堆放斛的米约有( )



- A. 14 斛
- B. 22 斛
- C. 36 斛
- D. 66 斛

解析：设圆锥的底面半径为  $r$ ，则  $\frac{1}{4} \times 2 \times 3r = 8$ ，解得  $r = \frac{16}{3}$ ，

故米堆的体积为  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times 3 \times (\frac{16}{3})^2 \times 5 = \frac{320}{9}$ ，

$\because$  1 斛米的体积约为 1.62 立方， $\therefore \frac{320}{9} \div 1.62 \approx 22$ .

故选：B

7. 已知  $\{a_n\}$  是公差为 1 的等差数列， $S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_8 = 4S_4$ ，则  $a_{10} = ( \quad )$

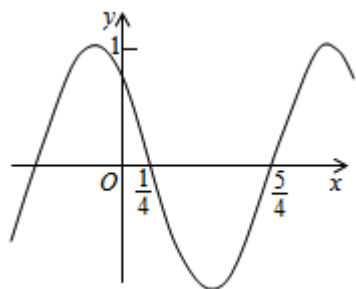
- A.  $\frac{17}{2}$
- B.  $\frac{19}{2}$
- C. 10
- D. 12

解析： $\because$  公差  $d = 1$ ， $S_8 = 4S_4$ ， $\therefore 8a_1 + \frac{1}{2} \times 8 \times 7 = 4(4a_1 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3)$ ，解得  $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $\therefore$

$$a_{10} = a_1 + 9d = \frac{1}{2} + 9 = \frac{19}{2}.$$

答案：B

8. 函数  $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$  的部分图象如图所示，则  $f(x)$  的单调递减区间为  $( \quad )$



- A.  $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- B.  $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- C.  $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- D.  $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

解析：由函数  $f(x) = \cos(\omega x + \phi)$  的部分图象，可得函数的周期为  $\frac{2\pi}{\omega} = 2(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}) = 2$ ， $\therefore \omega =$

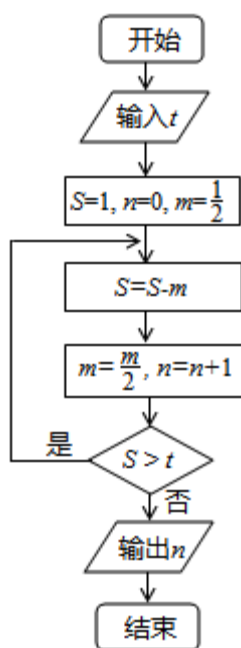
$\pi$ ,  $f(x) = \cos(\pi x + \phi)$ .

再根据函数的图象以及五点法作图, 可得  $\frac{\pi}{4} + \phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , 即  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ,  $f(x) = \cos(\pi x + \frac{\pi}{4})$ .

由  $2k\pi \leq \pi x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi$ , 求得  $2k - \frac{1}{4} \leq x \leq 2k + \frac{3}{4}$ , 故  $f(x)$  的单调递减区间为  $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

故选: D

9. 如图的程序框图, 如果输入的  $t=0.01$ , 则输出的  $n=(\quad)$



- A. 5
- B. 6
- C. 7
- D. 8

解析: 执行第 1 次,  $t=0.01$ ,  $S=1$ ,  $n=0$ ,  $m = \frac{1}{2} = 0.5$ ,  $S=S-m=0.5$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.25$ ,  $n=1$ ,  $S=0.5$

$> t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 2 次,  $S=S-m=0.25$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.125$ ,  $n=2$ ,  $S=0.25 > t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 3 次,  $S=S-m=0.125$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.0625$ ,  $n=3$ ,  $S=0.125 > t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 4 次,  $S=S-m=0.0625$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.03125$ ,  $n=4$ ,  $S=0.0625 > t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 5 次,  $S=S-m=0.03125$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.015625$ ,  $n=5$ ,  $S=0.03125 > t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 6 次,  $S=S-m=0.015625$ ,  $m = \frac{m}{2} = 0.0078125$ ,  $n=6$ ,  $S=0.015625 > t=0.01$ , 是, 循环,

执行第 7 次,  $S=S-m=0.0078125$ ,  $m=\frac{m}{2}=0.00390625$ ,  $n=7$ ,  $S=0.0078125>t=0.01$ , 否,

输出  $n=7$ .

故选: C

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1 \\ -\log_2(x+1), & x > 1 \end{cases}$ , 且  $f(a) = -3$ , 则  $f(6-a) = ()$

A.  $-\frac{7}{4}$

B.  $-\frac{5}{4}$

C.  $-\frac{3}{4}$

D.  $-\frac{1}{4}$

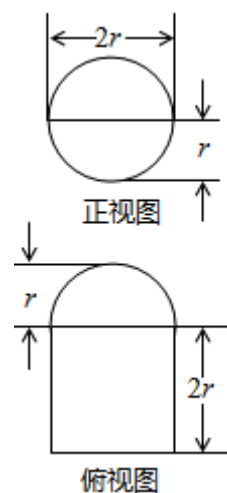
解析:  $\because f(a) = -3$ ,  $\therefore$  当  $a \leq 1$  时,  $f(a) = 2^{a-1} - 2 = -3$ , 则  $2^{a-1} = -1$ , 此等式显然不成立,

当  $a > 1$  时,  $-\log_2(a+1) = -3$ , 解得  $a = 7$ ,

$$\therefore f(6-a) = f(-1) = 2^{-1-1} - 2 = -\frac{7}{4}.$$

答案: A

11. 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为  $r$ )组成一个几何体, 该几何体三视图中的正视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为  $16+20\pi$ , 则  $r = ()$



A. 1

B. 2

C. 4

D. 8

解析：由几何体三视图中的正视图和俯视图可知，  
截圆柱的平面过圆柱的轴线，该几何体是一个半球拼接半个圆柱，

$$\therefore \text{其表面积为：} \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 + \frac{1}{2} \times \pi r^2 + \frac{1}{2} \times 2r \times 2\pi r + 2r \times 2r + \frac{1}{2} \times \pi r^2 = 5\pi r^2 + 4r^2,$$

又 $\because$ 该几何体的表面积为  $16+20\pi$ ， $\therefore 5\pi r^2+4r^2=16+20\pi$ ，解得  $r=2$ .

故选：B

12. 设函数  $y=f(x)$  的图像与  $y=2^{x+a}$  的图像关于直线  $y=-x$  对称，且  $f(-2)+f(-4)=1$ ，则

$a=(\quad)$

A. -1

B. 1

C. 2

D. 3

解析：设  $(x, y)$  是函数  $y=f(x)$  的图像上任意一点，它关于直线  $y=-x$  对称点为  $(-y, -x)$ ，由已

知  $(-y, -x)$  在函数  $y=2^{x+a}$  的图像上， $\therefore -x=2^{-y+a}$ ，解得  $y=-\log_2(-x)+a$ ，即

$$f(x)=-\log_2(-x)+a, \therefore f(-2)+f(-4)=-\log_2 2+a-\log_2 4+a=1, \text{解得 } a=2.$$

故选 C.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分

13. 数列  $\{a_n\}$  中  $a_1=2, a_{n+1}=2a_n, S_n$  为  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_n=126$ ，则  $n=\underline{\hspace{2cm}}$ .

解析： $\because a_1=2, a_{n+1}=2a_n$ ， $\therefore$  数列  $\{a_n\}$  是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

$$\therefore S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 126, \therefore 2^n = 64, \therefore n=6.$$

答案：6

14. 已知函数  $f(x)=ax^3+x+1$  的图像在点  $(1, f(1))$  的处的切线过点  $(2, 7)$ ，则

$a=\underline{\hspace{2cm}}$ .

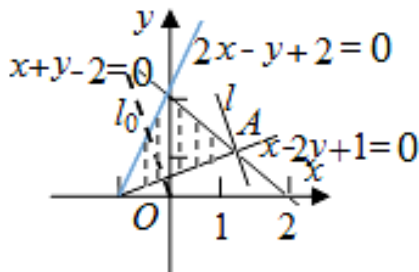
解析： $\because f'(x)=3ax^2+1$ ， $\therefore f'(1)=3a+1$ ，即切线斜率  $k=3a+1$ ，

又 $\because f(1)=a+2$ ， $\therefore$ 切点为  $(1, a+2)$ ， $\because$ 切线过  $(2, 7)$ ， $\therefore \frac{a+2-7}{1-2}=3a+1$ ，解得  $a=1$ .

答案：1

15. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \\ 2x-y+2 \geq 0 \end{cases}$ ，则  $z=3x+y$  的最大值为\_\_\_\_\_.

解析：作出可行域如图中阴影部分所示，



作出直线  $l_0: 3x+y=0$ ，平移直线  $l_0$ ，当直线  $l: z=3x+y$  过点 A 时， $z$  取最大值，由

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}, \text{ 解得 } A(1, 1), \therefore z=3x+y \text{ 的最大值为 } 4.$$

答案：4

16. 已知 F 是双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$  的右焦点，P 是 C 左支上一点， $A(0, 6\sqrt{6})$ ，当  $\triangle APF$

周长最小时，该三角形的面积为\_\_\_\_\_.

解析：由题意，设  $F'$  是左焦点，则  $\triangle APF$  周长  $= |AF| + |AP| + |PF| = |AF| + |AP| + |PF'| + 2$   
 $\geq |AF| + |AF'| + 2$  (A, P,  $F'$  三点共线时，取等号)，

直线  $AF'$  的方程为  $\frac{x}{-3} + \frac{y}{6\sqrt{6}} = 1$  与  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$  联立可得  $y^2 + 6\sqrt{6}y - 96 = 0$ ,

$\therefore$  P 的纵坐标为  $2\sqrt{6}$ ,

$\therefore \triangle APF$  周长最小时，该三角形的面积为  $\frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{6} - \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$ .

答案： $12\sqrt{6}$

17. 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  内角 A, B, C 的对边， $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$ .

(I) 若  $a=b$ ，求  $\cos B$ ;

(II) 若  $\angle B = 90^\circ$ ，且  $a = \sqrt{2}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

解析：(I) 先由正弦定理将  $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$  化为边得关系，结合条件  $a=b$ ，用其中一边把另外两边表示出来，再用余弦定理即可求出角 B 的余弦值；

(II) 由(I)知  $b^2 = 2ac$ ，根据勾股定理和即可求出  $c$ ，从而求出  $\triangle ABC$  的面积.

答案：(I) 由题设及正弦定理可得  $b^2 = 2ac$ .

又  $a=b$ ，可得  $b=2c$ ， $a=2c$ ，

由余弦定理可得  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4}$ .

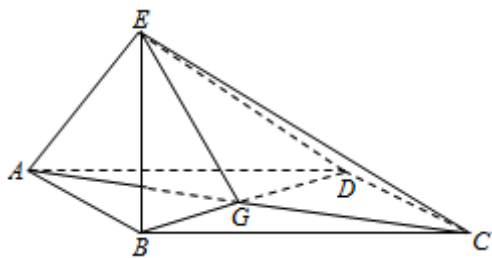
(II) 由(I)知  $b^2 = 2ac$ .

因为  $\angle B=90^\circ$ ，由勾股定理得  $a^2 + c^2 = b^2$ .

故  $a^2 + c^2 = 2ac$ ，得  $c = a = \sqrt{2}$ .

所以  $\triangle ABC$  的面积为 1.

18. 如图，四边形  $ABCD$  为菱形， $G$  为  $AC$  与  $BD$  的交点， $BE \perp$  平面  $ABCD$ .



(I) 证明：平面  $AEC \perp$  平面  $BED$ ；

(II) 若  $\angle ABC=120^\circ$ ， $AE \perp EC$ ，三棱锥  $E-ACD$  的体积为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求该三棱锥的侧面积.

解析：(I) 根据面面垂直的判定定理即可证明：平面  $AEC \perp$  平面  $BED$ ；

(II) 根据三棱锥的条件公式，进行计算即可.

答案：(I)  $\because$  四边形  $ABCD$  为菱形， $\therefore AC \perp BD$ ，  
 $\because BE \perp$  平面  $ABCD$ ， $\therefore AC \perp BE$ ，则  $AC \perp$  平面  $BED$ ，  
 $\because AC \subset$  平面  $AEC$ ， $\therefore$  平面  $AEC \perp$  平面  $BED$ .

(II) 设  $AB=x$ ，在菱形  $ABCD$  中，由  $\angle ABC=120^\circ$ ，得  $AG=GC=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ ， $GB=GD=\frac{x}{2}$ ，

$\because AE \perp EC$ ， $\therefore \triangle EBG$  为直角三角形，则  $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

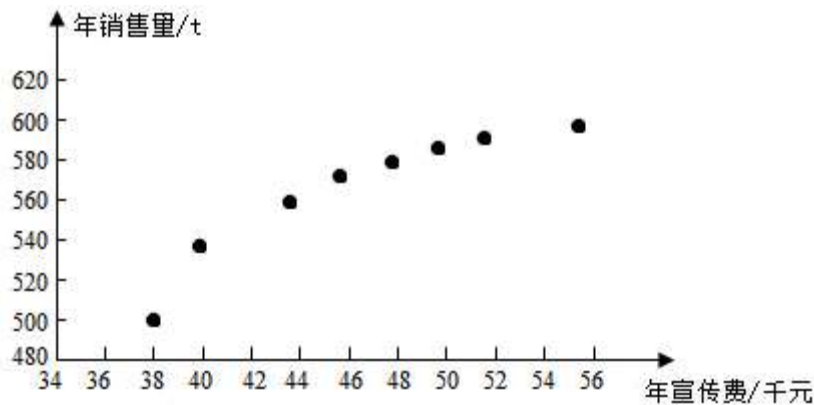
$\because$  三棱锥  $E-ACD$  的体积  $V=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC \cdot GD \cdot BE = \frac{\sqrt{6}}{24} x^3 = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，解得  $x=2$ ，

从而得  $AE=EC=ED=\sqrt{6}$ ， $\therefore \triangle EAC$  的面积为 3， $\therefore \triangle EAD$  的面积和  $\triangle ECD$  的面积均为  $\sqrt{5}$ ，

故该三棱锥的侧面积为  $3+2\sqrt{5}$ .



19. 某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费  $x$  (单位：千元) 对年销售量  $y$  (单位：t) 和年利润  $z$  (单位：千元) 的影响，对近 8 年的年宣传费  $x_i$  和年销售量  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ) 数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值.



$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
46.6	56.3	6.8	289.8	1.6	1469	108.8

表中  $w_i = \sqrt{x_i}$ ,  $\bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n w_i$ .

(I) 根据散点图判断,  $y=a+bx$  与  $y=c+d\sqrt{x}$  哪一个适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据 (I) 的判断结果及表中数据, 建立  $y$  关于  $x$  的回归方程;

(III) 已知这种产品的年利率  $z$  与  $x$ 、 $y$  的关系为  $z=0.2y-x$ . 根据 (II) 的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费  $x=49$  时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费  $x$  为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据  $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \dots (u_n, v_n)$ , 其回归线  $v=\alpha+\beta u$  的斜率和截距的最小二乘估计分别为:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

解析: (I) 根据散点图, 即可判断出.

(II) 先建立中间量  $w=\sqrt{x}$ , 建立  $y$  关于  $w$  的线性回归方程, 根据公式求出  $w$ , 问题得以解决;

(III) (i) 年宣传费  $x=49$  时, 代入到回归方程, 计算即可,

(ii) 求出预报值得方程, 根据函数的性质, 即可求出.

答案: (I) 由散点图可以判断,  $y=c+d\sqrt{x}$  适宜作为年销售量  $y$  关于年宣传费  $x$  的回归方程类型;

(II) 令  $w=\sqrt{x}$ , 先建立  $y$  关于  $w$  的线性回归方程, 由于  $\hat{d}=\frac{108.8}{1.6}=68$ ,

$$\hat{c}=\bar{y}-\hat{d}\bar{w}=563-68\times 6.8=100.6,$$

所以  $y$  关于  $w$  的线性回归方程为  $\hat{y}=100.6+68w$ ,

因此  $y$  关于  $x$  的回归方程为  $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$ ,

(III) (i) 由 (II) 知, 当  $x=49$  时, 年销售量  $y$  的预报值  $\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6$ ,

年利润  $z$  的预报值  $\hat{z}=576.6\times 0.2-49=66.32$ ,

(ii) 根据 (II) 的结果可知, 年利润  $z$  的预报值  $\hat{z}=0.2(100.6+68\sqrt{x})-x=-x+13.6\sqrt{x}+20.12$ ,

当  $\sqrt{x}=13.62=6.8$  时, 年利润的预报值最大.

20. 已知过点  $A(1, 0)$  且斜率为  $k$  的直线  $l$  与圆  $C: (x-2)^2+(y-3)^2=1$  交于  $M, N$  两点.

(I) 求  $k$  的取值范围;

(II)  $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$ , 其中  $O$  为坐标原点, 求  $|MN|$ .

解析: (I) 设出直线  $l$  的方程, 利用圆心到直线的距离小于半径列出关于  $k$  的不等式, 即可求出  $k$  的取值范围;

(II) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 将直线  $l$  方程代入圆的方程化为关于  $x$  的一元二次方程, 利用韦达定理将  $x_1x_2, y_1y_2$  用  $k$  表示出来, 利用平面向量数量积的坐标公式及  $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=12$  列出关于  $k$  方程, 解出  $k$ , 即可求出  $|MN|$ .

答案: (I) 由题设, 可知直线  $l$  的方程为  $y=kx+1$ .

因为  $l$  与  $C$  交于两点, 所以  $\frac{|2k-3+1|}{\sqrt{1+k^2}}<1$ .

$$\text{解得 } \frac{4-\sqrt{7}}{3}<k<\frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

所以  $k$  的取值范围是  $\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ .

(II) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ .

将  $y = kx + 1$  代入方程  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ , 整理得  $(1 + k^2)x^2 - 4(k + 1)x + 7 = 0$ ,

所以  $x_1 + x_2 = \frac{4(k + 1)}{1 + k^2}, x_1 x_2 = \frac{7}{1 + k^2}$ .

$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 + k^2)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 = \frac{4k(1 + k)}{1 + k^2} + 8$ ,

由题设可得  $\frac{4k(1 + k)}{1 + k^2} + 8 = 12$ , 解得  $k = 1$ , 所以  $l$  的方程为  $y = x + 1$ .

故圆心在直线  $l$  上, 所以  $|MN| = 2$ .

21. 设函数  $f(x) = e^{2x} - a \ln x$ .

(I) 讨论  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  的零点的个数;

(II) 证明: 当  $a > 0$  时  $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ .

解析: (I) 先求出导函数, 分  $a \leq 0$  与  $a > 0$  考虑  $f'(x)$  的单调性及性质, 即可判断出零点个数;

(II) 由 (I) 可设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  的唯一零点为  $x_0$ , 根据  $f'(x)$  的正负, 即可判定函数的图像与性质, 求出函数的最小值, 即可证明其最小值不小于  $2a + a \ln \frac{2}{a}$ , 即证明了所证不等式.

答案: (I)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x} (x > 0)$ .

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  没有零点;

当  $a > 0$  时, 因为  $e^{2x}$  单调递增,  $-\frac{a}{x}$  单调递增, 所以  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增. 又  $f'(a) > 0$ ,

当  $b$  满足  $0 < b < \frac{a}{4}$  且  $b < \frac{1}{4}$  时,  $f'(b) < 0$ , 故当  $a > 0$  时,  $f(x)$  存在唯一零点.

(II) 由 (I), 可设  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  的唯一零点为  $x_0$ , 当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ ;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ .

故  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  单调递增, 所以当  $x = x_0$  时,  $f(x)$  取得最小值,

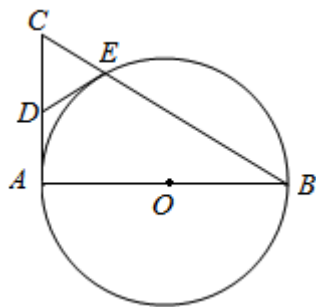
最小值为  $f(x_0)$ .

由于  $2e^{2x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$ , 所以  $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} = 2a - a \ln \frac{2}{a}$ .

故当  $a > 0$  时,  $f(x) > 2a - a \ln \frac{2}{a}$ .

## 22. 选修 4-1: 几何证明选讲

如图, AB 是  $\odot O$  的直径, AC 是  $\odot O$  的切线, BC 交  $\odot O$  于 E.



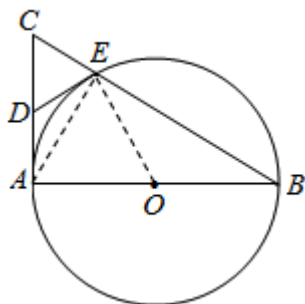
(I) 若 D 为 AC 的中点, 证明: DE 是  $\odot O$  的切线;

(II) 若  $OA = \sqrt{3}CE$ , 求  $\angle ACB$  的大小.

解析: (I) 连接 AE 和 OE, 由三角形和圆的知识易得  $\angle OED = 90^\circ$ , 可得 DE 是  $\odot O$  的切线;

(II) 设  $CE=1$ ,  $AE=x$ , 由射影定理可得关于 x 的方程  $x^2 = \sqrt{12-x^2}$ , 解方程可得 x 值, 可得所求角度.

答案: (I) 连接 AE, 由已知得  $AE \perp BC$ ,  $AC \perp AB$ ,



在  $Rt\triangle ABC$  中, 由已知可得  $DE=DC$ ,  $\therefore \angle DEC = \angle DCE$ ,

连接 OE, 则  $\angle OBE = \angle OEB$ ,

又  $\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle DEC + \angle OEB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle OED = 90^\circ$ ,  $\therefore DE$  是  $\odot O$  的切线.

(II) 设  $CE=1$ ,  $AE=x$ ,

由已知得  $AB=2\sqrt{3}$ ,  $BE=\sqrt{12-x^2}$ ,

由射影定理可得  $AE^2 = CE \cdot BE$ ,

$\therefore x^2 = \sqrt{12-x^2}$ , 即  $x^4 + x^2 - 12 = 0$ , 解方程可得  $x = \sqrt{3}$ ,  $\therefore \angle ACB = 60^\circ$ .

23. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $C_1: x=-2$ , 圆  $C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=1$ , 以坐标原点为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求  $C_1, C_2$  的极坐标方程;

(II) 若直线  $C_3$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ), 设  $C_2$  与  $C_3$  的交点为  $M, N$ , 求  $\triangle C_2MN$  的面积.

解析: (I) 由条件根据  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  求得  $C_1, C_2$  的极坐标方程.

(II) 把直线  $C_3$  的极坐标方程代入  $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$ , 求得  $\rho_1$  和  $\rho_2$  的值, 结合圆的半径可得  $C_2M \perp C_2N$ , 从而求得  $\triangle C_2MN$  的面积  $\frac{1}{2} \cdot C_2M \cdot C_2N$  的值.

答案: (I) 由于  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,  $\therefore C_1: x = -2$  的极坐标方程为  $\rho \cos \theta = -2$ ,

故  $C_2: (x-1)^2+(y-2)^2=1$  的极坐标方程为:  $(\rho \cos \theta - 1)^2 + (\rho \sin \theta - 2)^2 = 1$ , 化简可得  $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$ .

(II) 把直线  $C_3$  的极坐标方程  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ) 代入  $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$ , 求得  $\rho_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $\rho_2 = \sqrt{2}$ ,

$\therefore |MN| = \rho_1 - \rho_2 = \sqrt{2}$ , 由于圆  $C_2$  的半径为 1,  $\therefore C_2M \perp C_2N$ ,  $\triangle C_2MN$  的面积为  $\frac{1}{2} \cdot C_2M \cdot C_2N = \frac{1}{2}$ .

24. 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数  $f(x) = |x+1| - 2|x-a|$ ,  $a > 0$ .

(I) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) > 1$  的解集;

(II) 若  $f(x)$  的图像与  $x$  轴围成的三角形面积大于 6, 求  $a$  的取值范围.

解析: (I) 当  $a=1$  时, 把原不等式去掉绝对值, 转化为与之等价的三个不等式组, 分别求得每个不等式组的解集, 再取并集, 即得所求.

(II) 化简函数  $f(x)$  的解析式, 求得它的图像与  $x$  轴围成的三角形的三个顶点的坐标, 从而求得  $f(x)$  的图像与  $x$  轴围成的三角形面积; 再根据  $f(x)$  的图像与  $x$  轴围成的三角形面积大于 6, 从而求得  $a$  的取值范围.

答案: (I) 当  $a=1$  时, 不等式  $f(x) > 1$ , 即  $|x+1| - 2|x-1| > 1$ , 即  $\begin{cases} x < -1 \\ -x-1-2(1-x) > 1 \end{cases}$  ①,

或  $\begin{cases} -1 \leq x < 1 \\ x+1-2(1-x) > 1 \end{cases}$  ②, 或  $\begin{cases} x \geq 1 \\ x+1-2(x-1) > 1 \end{cases}$  ③.

解①求得  $x \in \emptyset$ , 解②求得  $\frac{2}{3} < x < 1$ , 解③求得  $1 \leq x < 2$ .

综上所述, 原不等式的解集为  $(\frac{2}{3}, 2)$ .

$$(II) \text{ 函数 } f(x) = |x+1| - 2|x-a| = \begin{cases} x-1-2a, & x < -1 \\ 3x+1-2a, & -1 \leq x \leq a \\ -x+1+2a, & x > a \end{cases},$$

由此求得  $f(x)$  的图象与  $x$  轴的交点  $A(\frac{2a-1}{3}, 0)$ ,  $B(2a+1, 0)$ ,

故  $f(x)$  的图象与  $x$  轴围成的三角形的第三个顶点  $C(a, a+1)$ , 由  $\triangle ABC$  的面积大于 6,

可得  $\frac{1}{2} [2a+1 - \frac{2a-1}{3}] \cdot (a+1) > 6$ , 求得  $a > 2$ .

故要求的  $a$  的范围为  $(2, +\infty)$ .