

2013 年四川省资阳市中考真题数学

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)每在小题给出四个答案选项, 只有一个符合题意的.

1. (3 分)16 的平方根是()

- A. 4
- B. ± 4
- C. 8
- D. ± 8

解析: $\because (\pm 4)^2 = 16,$

$\therefore 16$ 的平方根是 $\pm 4.$

答案: B.

2. (3 分)一个正多边形的每个外角都等于 36° , 那么它是()

- A. 正六边形
- B. 正八边形
- C. 正十边形
- D. 正十二边形

解析: $360 \div 36 = 10.$

答案: C.

3. (3 分)在一个不透明的盒子里, 装有 4 个黑球和若干个白球, 它们除颜色外没有任何其他区别, 摇匀后从中随机摸出一个球记下颜色, 再把它放回盒子中, 不断重复, 共摸球 40 次, 其中 10 次摸到黑球, 则估计盒子中大约有白球()

- A. 12 个
- B. 16 个
- C. 20 个
- D. 30 个

解析: \because 共摸了 40 次, 其中 10 次摸到黑球,

\therefore 有 30 次摸到白球,

\therefore 摸到黑球与摸到白球的次数之比为 1: 3,

\therefore 口袋中黑球和白球个数之比为 1: 3,

$4 \div \frac{1}{3} = 12$ (个).

答案: A.

4. (3 分)在函数 $y = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$ 中, 自变量 x 的取值范围是()

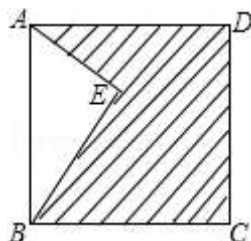
- A. $x \leq 1$
- B. $x \geq 1$
- C. $x < 1$
- D. $x > 1$

解析: 根据题意得, $x-1 > 0,$

解得 $x > 1$.

答案: D.

5. (3分) 如图, 点 E 在正方形 ABCD 内, 满足 $\angle AEB = 90^\circ$, $AE = 6$, $BE = 8$, 则阴影部分的面积是()



A. 48

B. 60

C. 76

D. 80

解析: $\because \angle AEB = 90^\circ$, $AE = 6$, $BE = 8$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 100$,

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{正方形 ABCD}} - S_{\triangle ABE} = AB^2 - \frac{1}{2} \times AE \times BE$$

$$= 100 - \frac{1}{2} \times 6 \times 8$$

$= 76$.

答案: C.

6. (3分) 资阳市 2012 年财政收入取得重大突破, 地方公共财政收入用四舍五入取近似值后为 27.39 亿元, 那么这个数值()

A. 精确到亿位

B. 精确到百分位

C. 精确到千万位

D. 精确到百万位

解析: \because 27.39 亿末尾数字 9 是百万位,

\therefore 27.39 亿精确到百万位.

答案: D.

7. (3分) 钟面上的分针的长为 1, 从 9 点到 9 点 30 分, 分针在钟面上扫过的面积是()

A. $\frac{1}{2}\pi$

B. $\frac{1}{4}\pi$

C. $\frac{1}{8}\pi$

D. π

解析: 从 9 点到 9 点 30 分分针扫过的扇形的圆心角是 180° ,

则分针在钟面上扫过的面积是： $\frac{180\pi \times 1^2}{360} = \frac{1}{2}\pi$.

答案：A.

8. (3分) 在芦山地震抢险时，太平镇部分村庄需 8 组战士步行运送物资，要求每组分配的人数相同，若按每组人数比预定人数多分配 1 人，则总数会超过 100 人；若按每组人数比预定人数少分配 1 人，则总数不够 90 人，那么预定每组分配的人数是()

- A. 10 人
- B. 11 人
- C. 12 人
- D. 13 人

解析：设预定每组分配 x 人，根据题意得：

$$\begin{cases} 8(x+1) > 100 \\ 8(x-1) < 90 \end{cases}$$

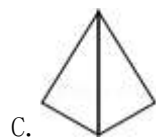
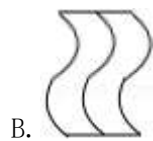
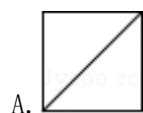
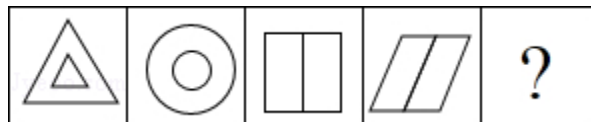
解得： $11\frac{1}{2} < x < 12\frac{1}{4}$,

$\because x$ 为整数，

$\therefore x=12$.

答案：C.

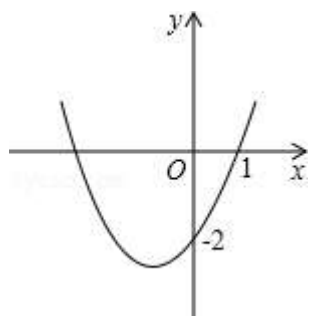
9. (3分) 从所给出的四个选项中，选出适当的一个填入问号所在位置，使之呈现相同的特征()



解析：第一个图形，第二个图形，第三个图形，第四个图形都是小图形与大图形相似，所以第五个图形应该是图形 B.

答案：B.

10. (3分)如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 过点 $(1, 0)$ 和点 $(0, -2)$, 且顶点在第三象限, 设 $P=a-b+c$, 则 P 的取值范围是()



- A. $-4 < P < 0$
- B. $-4 < P < -2$
- C. $-2 < P < 0$
- D. $-1 < P < 0$

解析: \because 二次函数的图象开口向上,

$$\therefore a > 0,$$

\because 对称轴在 y 轴的左边,

$$\therefore -\frac{b}{2a} < 0,$$

$$\therefore b > 0,$$

\because 图象与 y 轴的交点坐标是 $(0, -2)$, 过 $(1, 0)$ 点,

代入得: $a+b-2=0$,

$$\therefore a=2-b, b=2-a,$$

$$\therefore y=ax^2+(2-a)x-2,$$

当 $x=-1$ 时, $y=a-b+c=a-(2-a)-2=2a-4$,

$$\therefore b > 0,$$

$$\therefore b=2-a > 0,$$

$$\therefore a < 2,$$

$$\therefore a > 0,$$

$$\therefore 0 < a < 2,$$

$$\therefore 0 < 2a < 4,$$

$$\therefore -4 < 2a-4 < 0,$$

即 $-4 < P < 0$,

答案: A.

二、填空题(本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分) 请将直接答案填横线上.

11. (3分) $(-a^2b)^2 \cdot a =$ _____.

解析: 根据积的乘方以及同底数幂的乘方等知识求解即可求得答案.

答案: $(-a^2b)^2 \cdot a = a^4b^2a = a^5b^2$.

故答案为: a^5b^2 .

12. (3分) 若一组 $2, -1, 0, 2, -1, a$ 的众数为 2 , 则这组数据的平均数为_____.

解析: 要求平均数只要求出数据之和再除以总个数即可; 众数是一组数据中出现次数最多的数据, 注意众数可以不止一个. 依此先求出 a , 再求这组数据的平均数.

答案：数据 2, -1, 0, 2, -1, a 的众数为 2, 即 2 的次数最多;
即 $a=2$.

则其平均数为 $(2-1+0+2-1+2) \div 6 = \frac{2}{3}$

故答案为: $\frac{2}{3}$

13. (3分) 在矩形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 相交于点 O, 若 $\angle AOB=60^\circ$, $AC=10$, 则 $AB=$ _____.

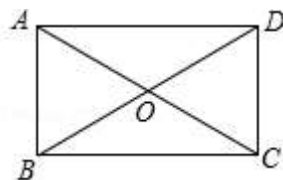
解析: \because 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore OA=OB$

又 $\because \angle AOB=60^\circ$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形.

$\therefore AB=OA=\frac{1}{2}AC=5$



答案: 5

14. (3分) 在一次函数 $y=(2-k)x+1$ 中, y 随 x 的增大而增大, 则 k 的取值范围为_____.

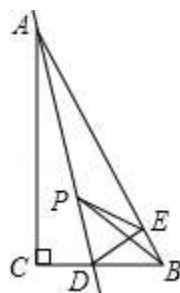
解析: \because 在一次函数 $y=(2-k)x+1$ 中, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore 2-k > 0$,

$\therefore k < 2$.

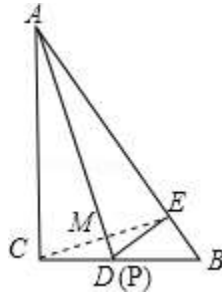
答案: $k < 2$.

15. (3分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 点 D 是 BC 边上的点, $CD=1$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 AD 翻折, 使点 C 落在 AB 边上的点 E 处, 若点 P 是直线 AD 上的动点, 则 $\triangle PEB$ 的周长的最小值是_____.



解析: 连接 CE, 交 AD 于 M, 根据折叠和等腰三角形性质得出当 P 和 D 重合时, $PE+BP$ 的值最小, 即可此时 $\triangle PBE$ 的周长最小, 最小值是 $BE+PE+PB=BE+CD+DB=BC+BE$, 先求出 BC 和 BE 长, 代入求出即可.

答案: 连接 CE, 交 AD 于 M,



∵沿 AD 折叠 C 和 E 重合,

∴ $\angle ACD = \angle AED = 90^\circ$, $AC = AE$, $\angle CAD = \angle EAD$,

∴AD 垂直平分 CE, 即 C 和 E 关于 AD 对称, $CD = DE = 1$,

∴当 P 和 D 重合时, PE+BP 的值最小, 即此时 $\triangle BPE$ 的周长最小, 最小值是 $BE + PE + PB = BE + CD + DB = BC + BE$,

∴ $\angle DEA = 90^\circ$,

∴ $\angle DEB = 90^\circ$,

∴ $\angle B = 60^\circ$, $DE = 1$,

∴ $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $BD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

即 $BC = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

∴ $\triangle PEB$ 的周长的最小值是 $BC + BE = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{1\sqrt{3}}{3} = 1 + \sqrt{3}$,

故答案为: $1 + \sqrt{3}$.

16. (3分) 已知直线上有 n ($n \geq 2$ 的正整数) 个点, 每相邻两点间距离为 1, 从左边第 1 个点起跳, 且同时满足以下三个条件:

①每次跳跃均尽可能最大;

②跳 n 次后必须回到第 1 个点;

③这 n 次跳跃将每个点全部到达,

设跳过的所有路程之和为 S_n , 则 $S_{25} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 设这 n 个点从左向右依次编号为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$.

根据题意, n 次跳跃的过程可以列表如下:

第 n 次跳跃	起点	终点	路程	
1		A_1	A_n	$n-1$
2		A_n	A_2	$n-2$
3		A_2	A_{n-1}	$n-3$
...	
$n-1$	n 为偶数	$A_{\frac{n}{2}}$	$A_{\frac{n}{2}+1}$	1
	n 为奇数	$A_{\frac{n+1}{2}+1}$	$A_{\frac{n+1}{2}}$	1
n	n 为偶数	$A_{\frac{n}{2}+1}$	A_1	$\frac{n}{2}$
	n 为奇数	$A_{\frac{n+1}{2}}$	A_1	$\frac{n-1}{2}$

发现规律如下：

当 n 为偶数时，跳跃的路程为：
$$S_n = (1+2+3+\dots+n-1) + \frac{n \cdot n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n \cdot n^2}{2}$$

当 n 为奇数时，跳跃的路程为：
$$S_n = (1+2+3+\dots+n-1) + \frac{n-1 \cdot n \cdot (n-1)}{2} + \frac{n-1 \cdot n^2 - 1}{2}$$

因此，当 $n=25$ 时，跳跃的路程为：
$$S_{25} = \frac{25^2 - 1}{2} = 312.$$

答案：312.

三、(本大题共 8 小题，共 72 分)

17. (7 分) 解方程：
$$\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x-2}$$

解析：分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

答案：去分母得： $x+2(x-2)=x+2$,

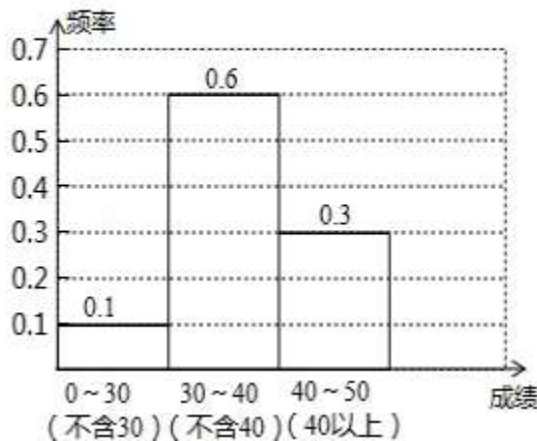
去括号得： $x+2x-4=x+2$,

解得： $x=3$,

经检验 $x=3$ 是分式方程的解.

18. (8 分) 体考在即，初三(1)班的课题研究小组对本年级 530 名学生的体育达标情况进行调查，制作出如图所示的统计图，其中 1 班有 50 人. (注：30 分以上为达标，满分 50 分) 根据统计图，解答下面问题：

初三(1)班体育达标调查频率分布直方图



初三其他班级体育达标调查统计图



(1) 初三(1)班学生体育达标率和本年级其余各班学生体育达标率各是多少？

(2) 若除初三(1)班外其余班级学生体育考试成绩在 30--40 分的有 120 人，请补全扇形统计图；(注：请在图中分数段所对应的圆心角的度数)

(3) 如果要求全年级学生的体育达标率不低于 90%，试问在本次调查中，该年级全体学生的体育达标率是否符合要求？

解析：(1) 由频率分布直方图求出 30 分以上的频率，即为初三(1)班的达标率；由扇形统计图中 30 分以下的频率求出 30 分以上的频率，即为其余班的达标率；

(2) 根据 30-40 分的人数除以其余各班的人数求出所占的百分比，乘以 360 度，求出 30-40 分所占的角度，补全扇形统计图即可；

(3) 根据其余各班体育达标率小于 90%，得到在本次调查中，该年级全体学生的体育达标率不符合要求。

答案：(1) 根据条形统计图得：初三(1)班学生体育达标率为 $0.6+0.3=0.9=90\%$ ；

根据扇形统计图得：本年级其余各班学生体育达标率为 $1-12.5\%=87.5\%$ ；

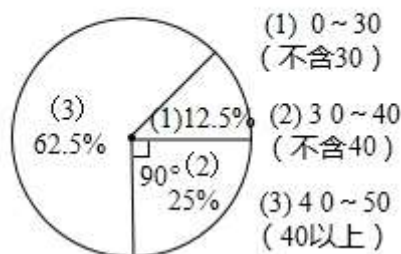
答：初三(1)班学生体育达标率和本年级其余各班学生体育达标率分别是：90%、87.5%；

(2) 其余各班的人数为 $530-50=480$ (人)，

30-40 分人数所占的角度为 $\frac{120}{480} \times 360^\circ = 90^\circ$ ，

补全扇形统计图，如图所示：

初三其他班级体育达标调查统计图



(3) 由(1)知初三(1)班学生体育达标率为 90%，由扇形统计图得到其余各班体育达标率为 $87.5\% < 90\%$ ，

则该年级全体学生的体育达标率不符合要求。

答：该年级全体学生的体育达标率不符合要求。

19. (8分) 在关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=a \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 中。

(1) 若 $a=3$. 求方程组的解；

(2) 若 $S=a(3x+y)$ ，当 a 为何值时， S 有最值。

解析：(1) 用加减消元法求解即可；

(2) 把方程组的两个方程相加得到 $3x+y=a+1$ ，然后代入整理，再利用二次函数的最值问题解答。

答案：(1) 当 $a=3$ 时，方程组为 $\begin{cases} x+2y=3 \text{ ①} \\ 2x-y=1 \text{ ②} \end{cases}$ ，

② \times 2 得， $4x-2y=2$ ③，

①+③得， $5x=5$ ，

解得 $x=1$ ，

把 $x=1$ 代入①得， $1+2y=3$ ，

解得 $y=1$ ，

所以，方程组的解是 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ ；

(2) 方程组的两个方程相加得， $3x+y=a+1$ ，

所以, $S=a(3x+y)=a(a+1)=(a+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$,

所以, 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, S 有最小值 $-\frac{1}{4}$.

20. (8分) 在 $\odot O$ 中, AB 为直径, 点 C 为圆上一点, 将劣弧沿弦 AC 翻折交 AB 于点 D , 连结 CD .

(1) 如图 1, 若点 D 与圆心 O 重合, $AC=2$, 求 $\odot O$ 的半径 r ;

(2) 如图 2, 若点 D 与圆心 O 不重合, $\angle BAC=25^\circ$, 请直接写出 $\angle DCA$ 的度数.

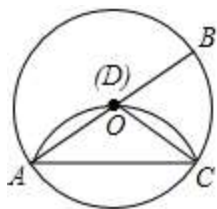


图 1

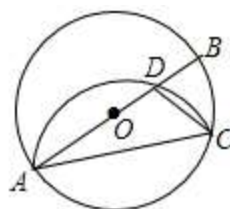


图 2

解析: (1) 过点 O 作 $OE \perp AC$ 于 E , 根据垂径定理可得 $AE=\frac{1}{2}AC$, 再根据翻折的性质可得 $OE=\frac{1}{2}r$,

然后在 $Rt\triangle AOE$ 中, 利用勾股定理列式计算即可得解;

(2) 连接 BC , 根据直径所对的圆周角是直角求出 $\angle ACB$, 根据直角三角形两锐角互余求出 $\angle B$,

再根据翻折的性质得到 \widehat{ADC} 所对的圆周角, 然后根据 $\angle ACD$ 等于 \widehat{ADC} 所对的圆周角减去 \widehat{CD} 所对的圆周角, 计算即可得解.

答案: (1) 如图, 过点 O 作 $OE \perp AC$ 于 E ,

$$\text{则 } AE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2} \times 2=1,$$

\because 翻折后点 D 与圆心 O 重合,

$$\therefore OE=\frac{1}{2}r,$$

在 $Rt\triangle AOE$ 中, $AO^2=AE^2+OE^2$,

$$\text{即 } r^2=1^2+(\frac{1}{2}r)^2,$$

$$\text{解得 } r=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

(2) 连接 BC ,

$\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

$$\because \angle BAC=25^\circ,$$

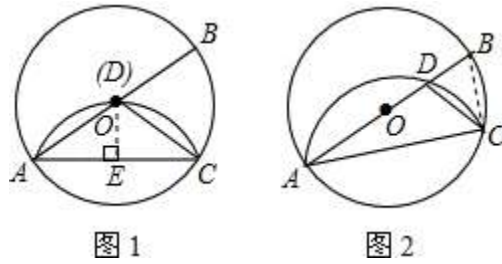
$$\therefore \angle B=90^\circ - \angle BAC=90^\circ - 25^\circ = 65^\circ,$$

根据翻折的性质, \widehat{AC} 所对的圆周角为 $\angle B$, \widehat{ADC} 所对的圆周角为 $\angle ADC$,

$$\therefore \angle ADC + \angle B = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDB = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CDB - \angle A = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ.$$



21. (9分)如图, 已知直线 l 分别与 x 轴、 y 轴交于 A 、 B 两点, 与双曲线 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0, x > 0$)

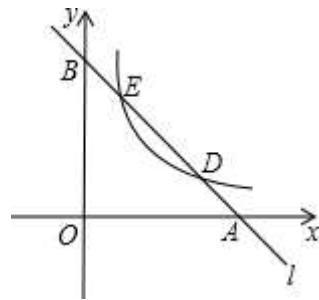
分别交于 D 、 E 两点.

(1)若点 D 的坐标为 $(4, 1)$, 点 E 的坐标为 $(1, 4)$:

①分别求出直线 l 与双曲线的解析式;

②若将直线 l 向下平移 m ($m > 0$) 个单位, 当 m 为何值时, 直线 l 与双曲线有且只有一个交点?

(2)假设点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 点 B 的坐标为 $(0, b)$, 点 D 为线段 AB 的 n 等分点, 请直接写出 b 的值.



解析: (1)①运用待定系数法可分别得到直线 l 与双曲线的解析式;

②直线 l 向下平移 m ($m > 0$) 个单位得到 $y = -x + 5 - m$, 根据题意得方程组 $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x + 5 - m \end{cases}$ 只有一

组解时, 化为关于 x 的方程得 $x^2 + (m-5)x + 4 = 0$, 则 $\Delta = (m-5)^2 - 4 \times 4 = 0$, 解得 $m_1 = 1, m_2 = 9$, 当 $m = 9$ 时, 公共点不在第一象限, 所以 $m = 1$;

(2)作 $DF \perp x$ 轴, 由 $DF \parallel OB$ 得到 $\triangle ADF \sim \triangle ABO$, 根据相似比可得到 $AF = \frac{a}{n}, DF = \frac{b}{n}$, 则 D 点坐

标为 $(a - \frac{a}{n}, \frac{b}{n})$, 然后把 D 点坐标代入反比例函数解析式中即可得到 b 的值.

答案: (1)①把 $D(4, 1)$ 代入 $y = \frac{a}{x}$ 得 $a = 1 \times 4 = 4$,

所以反比例函数解析式为 $y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$);

设直线 l 的解析式为 $y = kx + t$,

把 $D(4, 1), E(1, 4)$ 代入得 $\begin{cases} 4k + t = 1 \\ k + t = 4 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = -1 \\ t = 5 \end{cases}$.

所以直线 l 的解析式为 $y = -x + 5$;

②直线 l 向下平移 m ($m > 0$) 个单位得到 $y = -x + 5 - m$,

当方程组 $\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x + 5 - m \end{cases}$ 只有一组解时，直线 l 与双曲线有且只有一个交点，

化为关于 x 的方程得 $x^2 + (m-5)x + 4 = 0$ ，

$\Delta = (m-5)^2 - 4 \times 4 = 0$ ，解得 $m_1 = 1$ ， $m_2 = 9$ ，

而 $m = 9$ 时，解得 $x = -2$ ，故舍去，

所以当 $m = 1$ 时，直线 l 与双曲线有且只有一个交点；

(2) 作 $DF \perp x$ 轴，如图，

\because 点 D 为线段 AB 的 n 等分点，

$\therefore DA : AB = 1 : n$ ，

$\because DF \parallel OB$ ，

$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABO$ ，

$\therefore \frac{AF}{AO} = \frac{DF}{BO} = \frac{AD}{AB}$ ，即 $\frac{AF}{a} = \frac{DF}{b} = \frac{1}{n}$ ，

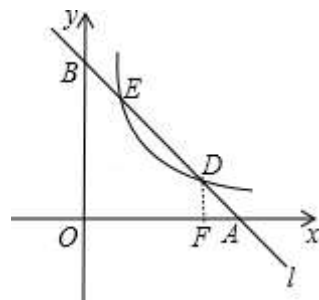
$\therefore AF = \frac{a}{n}$ ， $DF = \frac{b}{n}$ ，

$\therefore OF = a - \frac{a}{n}$ ，

$\therefore D$ 点坐标为 $(a - \frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ ，

把 $D(a - \frac{a}{n}, \frac{b}{n})$ 代入 $y = \frac{a}{x}$ 得 $(a - \frac{a}{n}) \cdot \frac{b}{n} = a$ ，

解得 $b = \frac{n^2}{n-1}$ 。

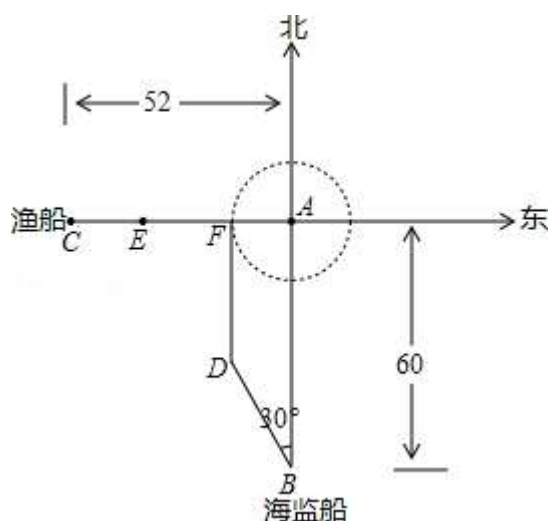


22. (9分) 钓鱼岛历来是中国领土，以它为圆心在周围 12 海里范围内均属于禁区，不允许它国船只进入，如图，今有一中国海监船在位于钓鱼岛 A 正南方距岛 60 海里的 B 处海域巡逻，值班人员发现在钓鱼岛的正西方向 52 海里的 C 处有一艘日本渔船，正以 9 节的速度沿正东方向驶向钓鱼岛，中方立即向日本渔船发出警告，并沿北偏西 30° 的方向以 12 节的速度前往拦截，期间多次发出警告，2 小时海监船到达 D 处，与此同时日本渔船到达 E 处，此时海监船再次发出严重警告。

(1) 当日本渔船受到严重警告信号后，必须沿北偏东转向多少度航行，才能恰好避免进入钓鱼岛 12 海里禁区？

(2) 当日本渔船不听严重警告信号，仍按原速度，原方向继续前进，那么海监船必须尽快到达距岛 12 海里，且位于线段 AC 上的 F 处强制拦截渔船，问海监船能否比日本渔船先到达 F

处? (注: ①中国海监船的最大航速为 18 节, 1 节=1 海里/小时; ②参考数据: $\sin 26.3^\circ \approx 0.44$, $\sin 20.5^\circ \approx 0.35$, $\sin 18.1^\circ \approx 0.31$, $\sqrt{2} \approx 1.4$, $\sqrt{3} \approx 1.7$)



解析: (1) 过点 E 作圆 A 的切线 EN, 求出 $\angle AEN$ 的度数即可得出答案;

(2) 分别求出渔船、海监船到达点 F 的时间, 然后比较可作出判断.

答案: (1) 过点 E 作圆 A 的切线 EN, 连接 AN, 则 $AN \perp EN$,

由题意得, $CE = 9 \times 2 = 18$ 海里, 则 $AE = AC - CE = 52 - 18 = 34$ 海里,

$$\because \sin \angle AEN = \frac{AN}{AE} = \frac{12}{34} \approx 0.35,$$

$$\therefore \angle AEN = 20.5^\circ,$$

$$\therefore \angle NEM = 69.5^\circ,$$

即必须沿北偏东至少转向 69.5° 航行, 才能恰好避免进入钓鱼岛 12 海里禁区.

(2) 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H,

由题意得, $BD = 2 \times 12 = 24$ 海里,

在 $Rt\triangle DBH$ 中, $DH = \frac{1}{2}BD = 12$ 海里, $BH = 12\sqrt{3}$ 海里,

$$\therefore AF = 12 \text{ 海里},$$

$$\therefore DH = AF,$$

$$\therefore DF \perp AF,$$

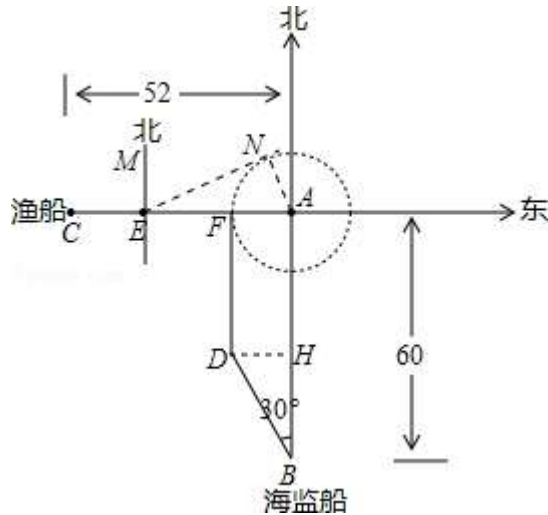
此时海监船以最大航速行驶,

$$\text{海监船到达点 F 的时间为: } \frac{DF}{18} = \frac{AB - BH}{18} = \frac{60 - 12\sqrt{3}}{18} \approx 2.2 \text{ 小时};$$

$$\text{渔船到达点 F 的时间为: } \frac{EF}{9} = \frac{52 - 18 - 12}{9} \approx 2.4 \text{ 小时},$$

$$\because 2.2 < 2.4,$$

\therefore 海监船比日本渔船先到达 F 处.



23. (11分) 在一个边长为 a (单位: cm) 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 M 分别是线段 AC 、 CD 上的动点, 连结 DE 并延长交正方形的边于点 F , 过点 M 作 $MN \perp DF$ 于 H , 交 AD 于 N .

(1) 如图 1, 当点 M 与点 C 重合, 求证: $DF = MN$;

(2) 如图 2, 假设点 M 从点 C 出发, 以 1cm/s 的速度沿 CD 向点 D 运动, 点 E 同时从点 A 出发, 以 $\sqrt{2}\text{cm/s}$ 速度沿 AC 向点 C 运动, 运动时间为 t ($t > 0$);

① 判断命题“当点 F 是边 AB 中点时, 则点 M 是边 CD 的三等分点”的真假, 并说明理由.

② 连结 FM 、 FN , $\triangle MNF$ 能否为等腰三角形? 若能, 请写出 a 、 t 之间的关系; 若不能, 请说明理由.

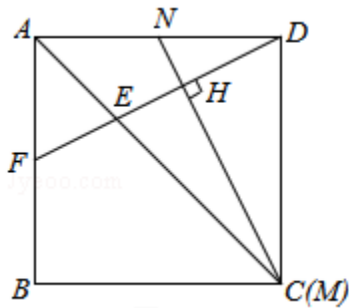


图 1

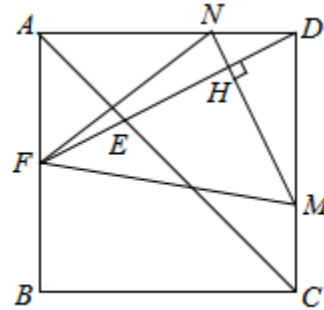


图 2

解析: (1) 证明 $\triangle ADF \cong \triangle DNC$, 即可得到 $DF = MN$;

(2) ① 首先证明 $\triangle AFE \sim \triangle CDE$, 利用比例式求出时间 $t = \frac{1}{3}a$, 进而得到 $CM = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}CD$, 所以该

命题为真命题;

② 若 $\triangle MNF$ 为等腰三角形, 则可能有三种情形, 需要分类讨论.

答案: (1) $\because \angle DNC + \angle ADF = 90^\circ$, $\angle DNC + \angle DCN = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADF = \angle DCN$.

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle DNC$ 中,

$$\begin{cases} \angle DAF = \angle CDN = 90^\circ \\ AD = CD \\ \angle ADF = \angle DCN \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle DNC$ (ASA),

$\therefore DF = MN$.

(2) ①该命题是真命题.

理由如下: 当点 F 是边 AB 中点时, 则 $AF = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$.

$\because AB \parallel CD, \therefore \triangle AFE \sim \triangle CDE$,

$$\therefore \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}EC, \text{ 则 } AE = \frac{1}{3}AC = \frac{\sqrt{2}}{3}a,$$

$$\therefore t = \frac{AE}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}a.$$

$$\text{则 } CM = 1 \cdot t = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}CD,$$

\therefore 点 M 为边 CD 的三等分点.

②能. 理由如下:

$$\text{易证 } \triangle AFE \sim \triangle CDE, \therefore \frac{AF}{CD} = \frac{AE}{EC}, \text{ 即 } \frac{AF}{a} = \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{2}a - \sqrt{2}t}, \text{ 得 } AF = \frac{at}{a-t}.$$

$$\text{易证 } \triangle MND \sim \triangle DFA, \therefore \frac{ND}{AF} = \frac{DM}{AD}, \text{ 即 } \frac{ND}{\frac{at}{a-t}} = \frac{a-t}{a}, \text{ 得 } ND = t.$$

$$\therefore ND = CM = t, AN = DM = a - t.$$

若 $\triangle MNF$ 为等腰三角形, 则可能有三种情形:

(I) 若 $FN = MN$, 则由 $AN = DM$ 知 $\triangle FAN \cong \triangle NDM$,

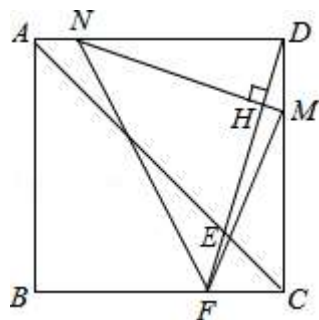
$$\therefore AF = ND, \text{ 即 } \frac{at}{a-t} = t, \text{ 得 } t = 0, \text{ 不合题意.}$$

\therefore 此种情形不存在;

(II) 若 $FN = FM$, 由 $MN \perp DF$ 知, $HN = HM, \therefore DN = DM = MC$,

$$\therefore t = \frac{1}{2}a, \text{ 此时点 F 与点 B 重合;}$$

(III) 若 $FM = MN$, 显然此时点 F 在 BC 边上, 如下图所示:



$$\because AN = DM, AD = CD,$$

$$\therefore ND = CM,$$

$$\therefore \begin{cases} ND = CM \\ FM = MN \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MFC \cong \triangle NMD, \therefore FC = DM = a - t;$$

$$\text{又由 } \triangle NDM \sim \triangle DCF, \therefore \frac{DN}{DM} = \frac{DC}{FC}, \text{ 即 } \frac{t}{a-t} = \frac{a}{FC}, \therefore FC = \frac{a(a-t)}{t}.$$

$$\therefore \frac{a(a-t)}{t} = a-t,$$

$\therefore t=a$, 此时点 F 与点 C 重合.

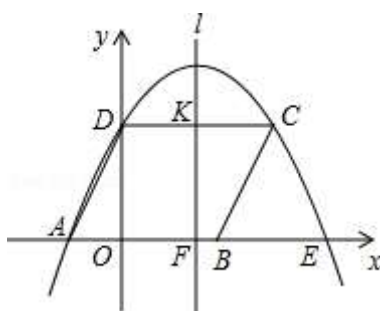
综上所述, 当 $t=a$ 或 $t=\frac{1}{2}a$ 时, $\triangle MNF$ 能够成为等腰三角形.

24. (12分) 如图, 四边形 ABCD 是平行四边形, 过点 A、C、D 作抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), 与 x 轴的另一交点为 E, 连结 CE, 点 A、B、D 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(0, 4)$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 已知抛物线的对称轴 l 交 x 轴于点 F, 交线段 CD 于点 K, 点 M、N 分别是直线 l 和 x 轴上的动点, 连结 MN, 当线段 MN 恰好被 BC 垂直平时, 求点 N 的坐标;

(3) 在满足(2)的条件下, 过点 M 作一条直线, 使之将四边形 AECD 的面积分为 3:4 的两部分, 求出该直线的解析式.



解析: (1) 根据平行四边形的性质可求点 C 的坐标, 由待定系数法即可求出抛物线的解析式;

(2) 连结 BD 交对称轴于 G, 过 G 作 $GN \perp BC$ 于 H, 交 x 轴于 N, 根据待定系数法即可求出直线 BD 的解析式, 根据抛物线对称轴公式可求对称轴, 由此即可求出点 N 的坐标;

(3) 过点 M 作直线交 x 轴于点 P_1 , 分点 P 在对称轴的左侧, 点 P 在对称轴的右侧, 两种情况讨论即可求出直线的解析式.

答案: (1) \because 点 A、B、D 的坐标分别为 $(-2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(0, 4)$, 且四边形 ABCD 是平行四边形,

$$\therefore AB=CD=5,$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标为 } (5, 4),$$

$$\therefore \text{过点 A、C、D 作抛物线 } y=ax^2+bx+c \ (a \neq 0),$$

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 4 \\ c = 4 \end{cases}$$

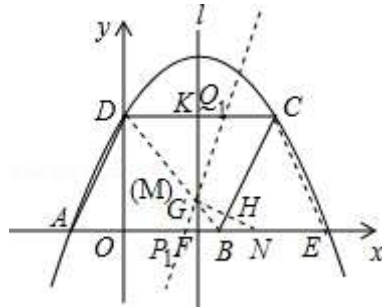
$$\text{解得 } \begin{cases} a = -\frac{2}{7} \\ b = \frac{10}{7} \\ c = 4 \end{cases}$$

故抛物线的解析式为 $y = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{10}{7}x + 4$.

(2) 连结 BD 交对称轴于 G,

在 $\text{Rt}\triangle OBD$ 中, 易求 $BD=5$,

$\therefore CD=BD$, 则 $\angle DCB=\angle DBC$,
 又 $\because \angle DCB=\angle CBE$,
 $\therefore \angle DBC=\angle CBE$,
 过 G 作 $GN \perp BC$ 于 H , 交 x 轴于 N ,



易证 $GH=HN$,
 \therefore 点 G 与点 M 重合,
 故直线 BD 的解析式 $y=-\frac{4}{3}x+4$

根据抛物线可知对称轴方程为 $x=\frac{5}{2}$,

则点 M 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$, 即 $GF=\frac{2}{3}$, $BF=\frac{1}{2}$,

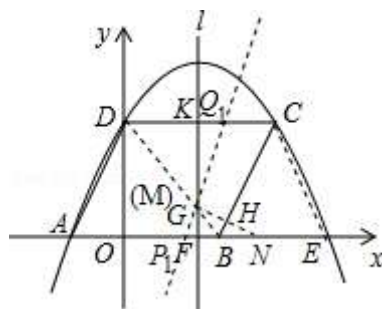
$$\therefore BM = \sqrt{FM^2 + FB^2} = \frac{5}{6},$$

又 $\because MN$ 被 BC 垂直平分,

$$\therefore BM=BN=\frac{5}{6},$$

\therefore 点 N 的坐标为 $(\frac{23}{6}, 0)$;

(3) 过点 M 作直线交 x 轴于点 P_1 , 连结 CE .



易求四边形 $AECD$ 的面积为 28, 四边形 $ABCD$ 的面积为 20,
 由“四边形 $AECD$ 的面积分为 3: 4”可知直线 P_1M 必与线段 CD 相交,
 设交点为 Q_1 , 四边形 AP_1Q_1D 的面积为 S_1 , 四边形 P_1ECQ_1 的面积为 S_2 , 点 P_1 的坐标为 $(a, 0)$,
 假设点 P 在对称轴的左侧, 则 $P_1F=\frac{5}{2}-a$, $P_1E=7-a$,

由 $\triangle MKQ_1 \sim \triangle MFP_1$, 得 $\frac{MK}{Q_1K} = \frac{FM}{FP_1}$,

易求 $Q_1K=5P_1F=5(\frac{5}{2}-a)$,

$$\therefore CQ_1=\frac{5}{2}-5(\frac{5}{2}-a)=5a-10,$$

$$\therefore S_2=\frac{1}{2}(5a-10+7-a) \times 4=28 \times \frac{3}{7},$$

解得: $a=\frac{9}{4}$,

根据 $P_1(\frac{9}{4}, 0)$, $M(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$ 可求直线 P_1M 的解析式为 $y=-\frac{8}{3}x-6$,

若点 P 在对称轴的右侧, 则直线 P_2M 的解析式为 $y=-\frac{8}{3}x+\frac{22}{3}$.