2014年普通高等学校招生全国统一考试（安徽卷）数学理

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.设i是虚数单位，$\overline{z}$表示z的共轭复数.若z=1+i，则$\frac{z}{i}+i\cdot\overline{z}$=(　　)

A. -2

B. -2i

C. 2

D. 2i

解析：∵z=1+i，∴$\overline{z}=1-i$，

∴$\frac{z}{i}+i\cdot\overline{z}=\frac{1+i}{i}+i\cdot(1-i)=\frac{(1+i)(-i)}{-i^2}-i^2+i=1-i+1+i=2$.

答案：C.

2.“x<0”是ln(x+1)<0的(　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

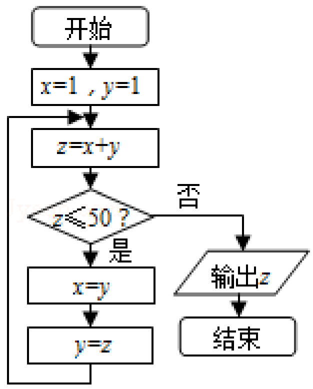
解析：∵x<0，∴x+1<1，当x+1>0时，ln(x+1)<0；

∵ln(x+1)<0，∴0<x+1<1，∴-1<x<0，∴x<0，

∴“x<0”是ln(x+1)<0的必要不充分条件.

答案：B.

3.如图所示，程序框图(算法流程图)的输出结果是(　　)



A. 34

B. 55

C. 78

D. 89

解析：第一次循环得 $z=2$，$x=1$，$y=2$；
第二次循环得 $z=3$，$x=2$，$y=3$；
第三次循环得 $z=5$，$x=3$，$y=5$；
第四次循环得 $z=8$，$x=5$，$y=8$；
第五次循环得 $z=13$，$x=8$，$y=13$；
第六次循环得 $z=21$，$x=13$，$y=21$；
第七次循环得 $z=34$，$x=21$，$y=34$；
第八次循环得 $z=55$，$x=34$，$y=55$；退出循环，输出 55，
答案：B

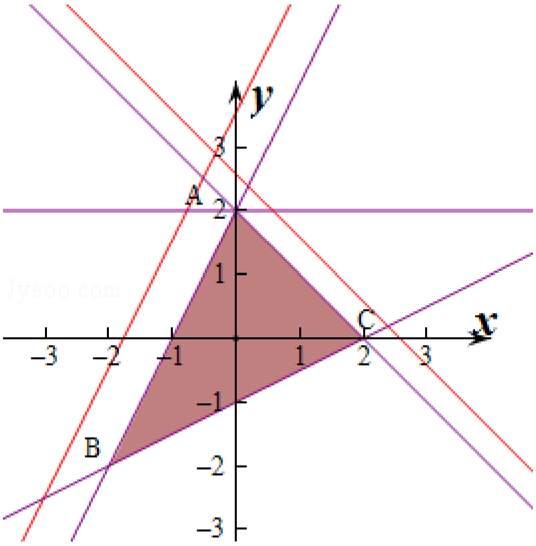
4.以平面直角坐标系的原点为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系，两种坐标系中取相同的长度单位.已知直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t+1\\y=t-3\end{cases}$ (t 为参数)，圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$，则直线 l 被圆 C 截得的弦长为(　　)
A. $\sqrt{14}$
B. $2\sqrt{14}$
C. $\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{2}$
解析：直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=t+1\\y=t-3\end{cases}$ (t 为参数)，化为普通方程为 $x-y-4=0$；
圆 C 的极坐标方程是 $\rho=4\cos\theta$，即 $\rho^2=4\rho\cos\theta$，化为直角坐标方程为 $x^2+y^2=4x$，
即 $(x-2)^2+y^2=4$，表示以(2，0)为圆心、半径 r 等于 2 的圆.
弦心距 $d=\frac{|2-0-4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<r$，∴弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，
答案：D.

5.　x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\x-2y-2\leqslant 0\\2x-y+2\geqslant 0\end{cases}$，若 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一，则实数 a 的值为(　　)
A. $\frac{1}{2}$或-1
B. 2 或$\frac{1}{2}$
C. 2 或 1
D. 2 或-1
解析：作出不等式组对应的平面区域如图：(阴影部分 ABC).
由 $z=y-ax$ 得 $y=ax+z$，即直线的截距最大，z 也最大.
若 $a=0$，此时 $y=z$，此时，目标函数只在 A 处取得最大值，不满足条件，
若 $a>0$，目标函数 $y=ax+z$ 的斜率 $k=a>0$，要使 $z=y-ax$ 取得最大值的最优解不唯一，
则直线 $y=ax+z$ 与直线 $2x-y+2=0$ 平行，此时 $a=2$，

若 a＜0，目标函数 y=ax+z 的斜率 k=a＜0，要使 z=y-ax 取得最大值的最优解不唯一，则直线 y=ax+z 与直线 x+y-2=0，平行，此时 a=-1，

综上 a=-1 或 a=2，

答案：D



6. 设函数 f(x)(x∈R)满足 f(x+π)=f(x)+sinx. 当 0≤x＜π 时，f(x)=0，则 $f(\frac{23\pi}{6})$=(　　)

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 0

D. $-\frac{1}{2}$

解析：∵函数 f(x)(x∈R)满足 f(x+π)=f(x)+sinx. 当 0≤x＜π 时，f(x)=0，

$\therefore f(\frac{23\pi}{6})=f(\pi+\frac{17\pi}{6})$

$=f(\frac{17\pi}{6})+\sin\frac{17\pi}{6}$

$=f(\frac{11\pi}{6})+\sin\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{17\pi}{6}$

$=f(\frac{5\pi}{6})+\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{17\pi}{6}$

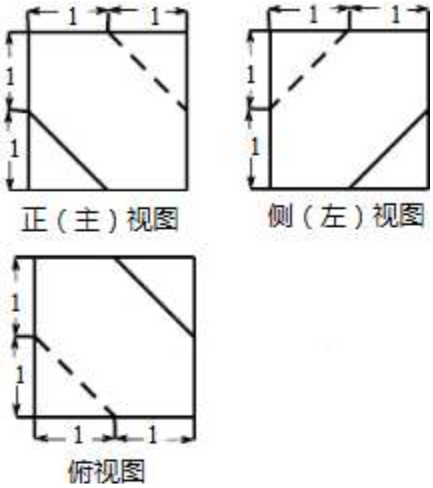
$=\sin\frac{5\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{17\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$.

答案：A.

7.一个多面体的三视图如图所示，则该多面体的表面积为(　　)

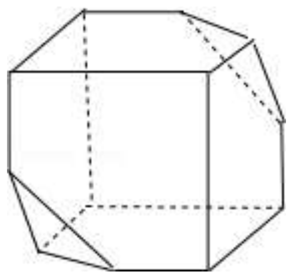


A. $21+\sqrt{3}$
B. $18+\sqrt{3}$
C. 21
D. 18

解析：由三视图可知，几何体是正方体的棱长为2，截去两个正三棱锥，侧棱互相垂直，侧棱长为1，

几何体的表面积为：$S_{正方体}-2S_{棱锥侧}+2S_{棱锥底}=6\times2\times2-6\times\frac{1}{2}\times1\times1+2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=21+\sqrt{3}$.

答案：A.



8.从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对.其中所成的角为60°的共有(　　)
A. 24对
B. 30对
C. 48对
D. 60对

解析：正方体的面对角线共有12条，两条为一对，共有 C_{12}^{2}=66条，

同一面上的对角线不满足题意，对面的面对角线也不满足题意，一组平行平面共有6对不满足题意的直线对数，不满足题意的共有：3×6=18.
从正方体六个面的对角线中任取两条作为一对.其中所成的角为60°的共有：66-18=48.
答案：C.

9.若函数 f(x)=|x+1|+|2x+a|的最小值为3，则实数a的值为(　　)

A. 5 或 8

B. -1 或 5

C. -1 或-4

D. -4 或 8

解析：$-\frac{a}{2}<-1$ 时，$x<-\frac{a}{2}$，$f(x)=-x-1-2x-a=-3x-a-1>\frac{a}{2}-1$；

$-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant -1$，$f(x)=-x-1+2x+a=x+a-1\geqslant \frac{a}{2}-1$；

$x>-1$，$f(x)=x+1+2x+a=3x+a+1>a-2$，

$\therefore \frac{a}{2}-1=3$ 或 $a-2=3$，

$\therefore a=8$ 或 $a=5$，

$a=5$ 时，$\frac{a}{2}-1<a-2$，故舍去；

$-\frac{a}{2}\geqslant -1$ 时，$x<-1$，$f(x)=-x-1-2x-a=-3x-a-1>2-a$；

$-1\leqslant x\leqslant -\frac{a}{2}$，$f(x)=x+1-2x-a=-x-a+1\geqslant -\frac{a}{2}+1$；

$x>-\frac{a}{2}$，$f(x)=x+1+2x+a=3x+a+1>-\frac{a}{2}+1$，

$\therefore 2-a=3$ 或 $-\frac{a}{2}+1=3$，

$\therefore a=-1$ 或 $a=-4$，

$a=-1$ 时，$-\frac{a}{2}+1<2-a$，故舍去；

综上，$a=-4$ 或 8.

答案：D.

10.在平面直角坐标系 xOy 中.已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，点 Q 满足 $\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}(\vec{a}+\vec{b})$，曲线 $C=\{P|\overrightarrow{OP}=\vec{a}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta，0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，区域 $\Omega=\{P|(0<r\leqslant|\overrightarrow{PQ}|\leqslant R，r<R\}$.若 $C\cap\Omega$ 为两段分离的曲线，则(　　)

A. $1<r<R<3$

B. $1<r<3\leqslant R$

C. $r\leqslant 1<R<3$

D. $1<r<3<R$

解析：∵平面直角坐标系 xOy 中.已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

不妨令 $\vec{a}=(1，0)$，$\vec{b}=(0，1)$，

则 $\overrightarrow{OQ}=\sqrt{2}(\vec{a}+\vec{b})=(\sqrt{2}，\sqrt{2})$，$\overrightarrow{OP}=\vec{a}\cos\theta+\vec{b}\sin\theta=(\cos\theta，\sin\theta)$，

故 P 点的轨迹为单位圆，$\Omega=\{P|(0<r\leqslant|\overrightarrow{PQ}|\leqslant R，r<R\}$ 表示的平面区域为：

以 Q 点为圆心，内径为 r，外径为 R 的圆环，
若 $C\cap\Omega$ 为两段分离的曲线，则单位圆与圆环的内外圆均相交，
故 $|OQ|-1<r<R<|OQ|+1$，
∵ $|OQ|=2$，故 $1<r<R<3$，
答案：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若将函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 φ 个单位，所得图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小正值是__________________.

解析：将函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 φ 个单位，

所得图象对应的函数解析式为 $y=\sin[2(x-\phi)+\frac{\pi}{4}]=\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\phi)$ 关于 y 轴对称，

则 $\frac{\pi}{4}-2\phi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，即 $\phi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\pi$，故 φ 的最小正值为 $\frac{3\pi}{8}$，

答案：$\frac{3\pi}{8}$.

12. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，若 a_1+1，a_3+3，a_5+5 构成公比为 q 的等比数列，则 q=__________.
解析：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，
由 a_1+1，a_3+3，a_5+5 构成等比数列，

得：$(a_3+3)^2=(a_1+1)(a_5+5)$，

整理得：$a_3^2+6a_3+4=a_1a_5+5a_1+a_5$，

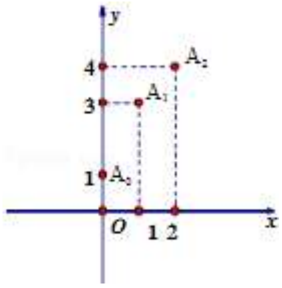
即 $(a_1+2d)^2+6(a_1+2d)+4=a_1(a_1+4d)+5a_1+a_1+4d$.

化简得：$(d+1)^2=0$，即 $d=-1$.

$\therefore q=\frac{a_3+3}{a_1+1}=\frac{a_1+2d+3}{a_1+1}=\frac{a_1+2\times(-1)+3}{a_1+1}=\frac{a_1+1}{a_1+1}=1$.

答案：1.

13. 设 $a\neq0$，n 是大于 1 的自然数，$(1+\frac{x}{a})^n$ 的展开式为 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. 若点 $A_i(i,a_i)(i=0,1,2)$ 的位置如图所示，则 a=_________.



解析：$(1+\frac{x}{a})^n$的展开式的通项为$T_{k+1}=C_n^k\left(\frac{x}{a}\right)^k=\frac{1}{a^k}C_n^k x^k$，

由图知，$a_0=1$，$a_1=3$，$a_2=4$，$\therefore \frac{1}{a}C_n^1=3$，$\frac{1}{a^2}C_n^2=4$，

$\frac{n}{a}=3$，$\frac{n(n-1)}{2a^2}=4$，$a^2-3a=0$，解得 a=3，

答案：3.

14.设 F_1，F_2分别是椭圆 E：$x^2+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$的左、右焦点，过点 F_1的直线交椭圆 E 于 A、B 两点，若$|AF_1|=3|F_1B|$，$AF_2\perp x$ 轴，则椭圆 E 的方程为___________.

解析：由题意，$AF_2\perp x$ 轴，$\therefore |AF_2|=b^2$，

$\because |AF_1|=3|F_1B|$，$\therefore B(-\frac{5}{3}c，-\frac{1}{3}b^2)$，

代入椭圆方程可得$\left(-\frac{5}{3}c\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{3}b^2\right)^2}{b^2}=1$，

$\because 1=b^2+c^2$，$\therefore b^2=\frac{2}{3}$，$c^2=\frac{1}{3}$，$\therefore x^2+\frac{3}{2}y^2=1$.

答案：$x^2+\frac{3}{2}y^2=1$.

15.已知两个不相等的非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，两组向量$\overrightarrow{x_1}$，$\overrightarrow{x_2}$，$\overrightarrow{x_3}$，$\overrightarrow{x_4}$，$\overrightarrow{x_5}$和$\overrightarrow{y_1}$，$\overrightarrow{y_2}$，$\overrightarrow{y_3}$，$\overrightarrow{y_4}$，$\overrightarrow{y_5}$均由 2 个$\vec{a}$和 3 个$\vec{b}$排列而成，记 $S=\overrightarrow{x_1}\cdot\overrightarrow{y_1}+\overrightarrow{x_2}\cdot\overrightarrow{y_2}+\overrightarrow{x_3}\overrightarrow{y_3}+\overrightarrow{x_4}\cdot\overrightarrow{y_4}+\overrightarrow{x_5}\cdot\overrightarrow{y_5}$，$S_{min}$表示 S 所有可能取值中的最小值.则下列命题正确的是_______(写出所有正确命题的编号).

①S 有 5 个不同的值；

②若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则 S_{min}与$|\vec{a}|$无关；

③若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 S_{min}与$|\vec{b}|$无关；

④若$|\vec{b}|>4|\vec{a}|$，则 $S_{min}>0$；

⑤若$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，$S_{min}=8|\vec{a}|^2$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$.

解析：S有3种结果：$S_1=\vec{a}^2+\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{b}^2+\vec{b}^2$，

$S_2=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{b}^2$，

$S_3=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，故①错误；

$\because S_1-S_2=S_2-S_3=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\geqslant\vec{a}^2+\vec{b}^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\geqslant 0$，

∴S中最小为S_3；

若$\vec{a}\perp\vec{b}$，则$S_{min}=S_3=\vec{b}^2$，与$|\vec{a}|$无关，故②正确；

③若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则$S_{min}=S_3=4\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$，与$|\vec{b}|$有关，故③错误；

④若$|\vec{b}|>4|\vec{a}|$，则$S_{min}=S_3=4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta+\vec{b}^2>-4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+\vec{b}^2>-|\vec{b}|^2+\vec{b}^2=0$，

故④正确；

⑤若$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，$S_{min}=S_3=8|\vec{a}|^2\cos\theta+4|\vec{a}|^2=8|\vec{a}|^2$，

$\therefore 2\cos\theta=1$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$，

即$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

综上所述，命题正确的是②④，

答案：②④.

三、解答题：本大题共6小题，共75分.

16.(12分)设△ABC的内角为A、B、C所对边的长分别是a、b、c，且b=3，c=1，A=2B.

(Ⅰ)求a的值；

(Ⅱ)求$\sin(A+\frac{\pi}{4})$的值.

解析：(Ⅰ)利用正弦定理，可得a=6cosB，再利用余弦定理，即可求a的值；

(Ⅱ)求出sinA，cosA，即可求$\sin(A+\frac{\pi}{4})$的值.

答案：(Ⅰ)$\because A=2B$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，b=3，∴a=6cosB，

$\therefore a=6\cdot\frac{a^2+1-9}{2a}$，$\therefore a=2\sqrt{3}$；

(Ⅱ)$\because a=6\cos B$，$\therefore\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin B=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

$\therefore \sin A=\sin 2B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\cos A=\cos 2B=2\cos^2 B-1=-\frac{1}{3}$，

$\therefore \sin(A+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A+\cos A)=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

17.(12 分)甲乙两人进行围棋比赛，约定先连胜两局者直接赢得比赛，若赛完 5 局仍未出现连胜，则判定获胜局数多者赢得比赛.假设每局甲获胜的概率为$\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为$\frac{1}{3}$，各局比赛结果相互独立.

(Ⅰ)求甲在 4 局以内(含 4 局)赢得比赛的概率；

(Ⅱ)记 X 为比赛决胜出胜负时的总局数，求 X 的分布列和均值(数学期望).

解析：(1)根据概率的乘法公式，求出对应的概率，即可得到结论.

(2)利用离散型随机变量分别求出对应的概率，即可求 X 的分布列；以及均值.

答案：用 A 表示甲在 4 局以内(含 4 局)赢得比赛的是事件，A_k表示第 k 局甲获胜，B_k表示第 k 局乙获胜，则 $P(A_k)=\frac{2}{3}$，$P(B_k)=\frac{1}{3}$，k=1，2，3，4，5

(Ⅰ)$P(A)=P(A_1A_2)+P(B_1A_2A_2+P(A_1B_2A_3A_4)=(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{56}{81}$.

(Ⅱ)X 的可能取值为 2，3，4，5.

$P(X=2)=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)=\frac{5}{9}$,

$P(X=3)=P(B_1A_2A_3)+P(A_1B_2B_3)=\frac{2}{9}$,

$P(X=4)=P(A_1B_2A_3A_4)+P(B_1A_2B_3B_4)=\frac{10}{81}$,

$P(X=5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)=\frac{8}{81}$,

故分布列为：

X	2	3	4	5
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$

$E(X)=2\times\frac{5}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{10}{81}+5\times\frac{8}{81}=\frac{224}{81}$.

18.(12 分)设函数 $f(x)=1+(1+a)x-x^2-x^3$，其中 $a>0$.

(Ⅰ)讨论 f(x)在其定义域上的单调性；

(Ⅱ)当 $x\in[0，1]$时，求 f(x)取得最大值和最小值时的 x 的值.

解析：(Ⅰ)利用导数判断函数的单调性即可；

(Ⅱ)利用(Ⅰ)的结论，讨论两根与 1 的大小关系，判断函数在[0，1]时的单调性，得出取最值时的 x 的取值.

答案：(Ⅰ)f(x)的定义域为$(-\infty，+\infty)$，$f'(x)=1+a-2x-3x^2$,

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$，$x_1<x_2$,

∴由 f′(x)<0 得 $x<\frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}$，$x>\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$；

由 f′(x)>0 得 $\frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3}<x<\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$；

故 f(x)在$(-\infty,\ \frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3})$和$(\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3},\ +\infty)$单调递减，

在$(\frac{-1-\sqrt{4+3a}}{3},\ \frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3})$上单调递增；

(Ⅱ)∵a>0，∴$x_1<0$，$x_2>0$，

(i)当 a≥4 时，$x_2\geqslant 1$，由(Ⅰ)知，f(x)在[0，1]上单调递增，∴f(x)在 x=0 和 x=1 处分别取得最小值和最大值.

(ii)当 0<a<4 时，$x_2<1$，由(Ⅰ)知，f(x)在$[0，x_2]$单调 dz，在$[x_2，1]$上单调递减，

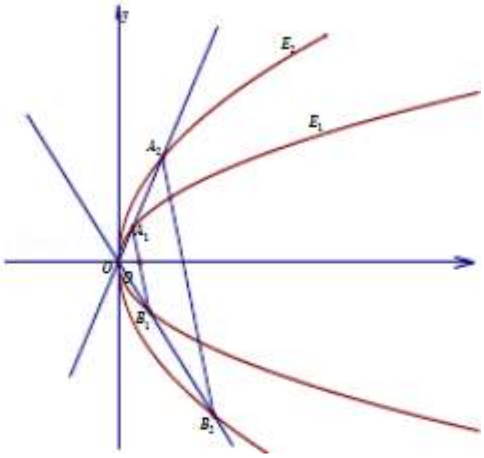
因此 f(x)在 $x=x_2=\frac{-1+\sqrt{4+3a}}{3}$处取得最大值，又 f(0)=1，f(1)=a，

∴当 0<a<1 时，f(x)在 x=1 处取得最小值；

当 a=1 时，f(x)在 x=0 和 x=1 处取得最小值；

当 1<a<4 时，f(x)在 x=0 处取得最小值.

19.(13 分)如图，已知两条抛物线 E_1：$y^2=2p_1x(p_1>0)$和 E_2：$y^2=2p_2x(p_2>0)$，过原点 O 的两条直线 l_1和 l_2，l_1与 E_1，E_2分别交于 A_1、A_2两点，l_2与 E_1、E_2分别交于 B_1、B_2两点.



(Ⅰ)证明：$A_1B_1 /\!/ A_2B_2$；

(Ⅱ)过 O 作直线 l(异于 l_1，l_2)与 E_1、E_2分别交于 C_1、C_2两点.记$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的面积分别为 S_1与 S_2，求$\frac{S_1}{S_2}$的值.

解析：(Ⅰ)由题意设出直线 l_1和 l_2的方程，然后分别和两抛物线联立求得交点坐标，得到$\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{A_2B_2}$的坐标，然后由向量共线得答案；

(Ⅱ)结合(Ⅰ)可知$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$的三边平行，进一步得到两三角形相似，由相似三角形的面积比等于相似比的平方得答案.

答案：(Ⅰ)由题意可知，l_1和 l_2的斜率存在且不为 0，

设 l_1：$y=k_1x$，l_2：$y=k_2x$.

联立$\begin{cases}y=k_1x\\y^2=2p_1x\end{cases}$，解得$A_1$（$\frac{2p_1}{k_1^2}$，$\frac{2p_1}{k_1}$）．

联立$\begin{cases}y=k_1x\\y^2=2p_2x\end{cases}$，解得$A_2$（$\frac{2p_2}{k_1^2}$，$\frac{2p_2}{k_1}$）．

联立$\begin{cases}y=k_2x\\y^2=2p_1x\end{cases}$，解得$B_1$（$\frac{2p_1}{k_2^2}$，$\frac{2p_1}{k_2}$）．

联立$\begin{cases}y=k_2x\\y^2=2p_2x\end{cases}$，解得$B_2$（$\frac{2p_2}{k_2^2}$，$\frac{2p_2}{k_2}$）．

∴$\overrightarrow{A_1B_1}=2p_1$（$\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_1^2}$，$\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}$），

$\overrightarrow{A_2B_2}=2p_2$（$\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{k_1^2}$，$\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}$）．

$\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{p_1}{p_2}\overrightarrow{A_2B_2}$,

∴A_1B_1∥A_2B_2;

(Ⅱ)由(Ⅰ)知A_1B_1∥A_2B_2,

同(Ⅰ)可证B_1C_1∥B_2C_2，A_1C_1∥A_2C_2.

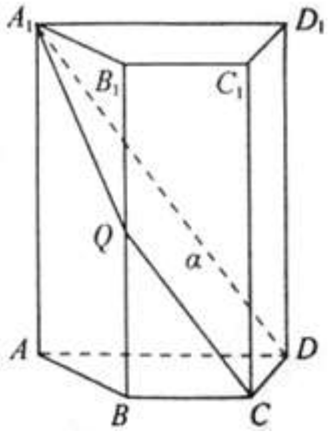
∴$\triangle A_1B_1C_1$∽$\triangle A_2B_2C_2$,

因此$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{A_2B_2}|}\right)^2$,

又$\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{p_1}{p_2}\overrightarrow{A_2B_2}$,

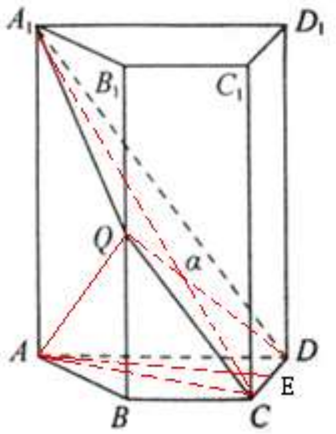
∴$\frac{|\overrightarrow{A_1B_1}|}{|\overrightarrow{A_2B_2}|}=\frac{p_1}{p_2}$.故$\frac{S_1}{S_2}=\frac{p_1^2}{p_2^2}$.

20.(13分)如图，四棱柱ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，A_1A⊥底面ABCD，四边形ABCD为梯形，AD∥BC，且AD=2BC，过A_1、C、D三点的平面记为α，BB_1与α的交点为Q.



(Ⅰ)证明：Q 为 BB_1 的中点；
(Ⅱ)求此四棱柱被平面 α 所分成上、下两部分的体积之比；
(Ⅲ)若 $AA_1=4$，CD=2，梯形 ABCD 的面积为 6，求平面 α 与底面 ABCD 所成二面角的大小.

解析：(Ⅰ)证明平面 QBC∥平面 A_1D_1DA，可得△QBC∽△A_1AD，即可证明 Q 为 BB_1 的中点；
(Ⅱ)设 BC=a，则 AD=2a，则 $V_{Q-AA_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h\cdot d=\frac{1}{3}ahd$，$V_{Q-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+2a}{2}\cdot d\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{4}ahd$，利用 $V_{棱柱}=\frac{3}{2}ahd$，即可求出此四棱柱被平面 α 所分成上、下两部分的体积之比；
(Ⅲ)△ADC 中，作 AE⊥DC，垂足为 E，连接 A_1E，则 DE⊥平面 AEA_1，DE⊥A_1E，可得∠AEA_1为平面 α 与底面 ABCD 所成二面角，求出 $S_{\triangle ADC}=4$，AE=4，可得 $\tan\angle AEA_1=\frac{AA_1}{AE}=1$，即可求平面 α 与底面 ABCD 所成二面角的大小.
答案：(Ⅰ)∵四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，四边形 ABCD 为梯形，AD∥BC，
∴平面 QBC∥平面 A_1D_1DA，
∴平面 A_1CD 与面 QBC、平面 A_1D_1DA 的交线平行，∴QC∥A_1D∴△QBC∽△A_1AD，
∴$\frac{BQ}{BB_1}=\frac{BQ}{AA_1}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$，∴Q 为 BB_1 的中点；
(Ⅱ)连接 QA，QD，设 $AA_1=h$，梯形 ABCD 的高为 d，四棱柱被平面 α 所分成上、下两部分的体积为 V_1，V_2，



设 BC=a，则 AD=2a，∴ $V_{Q-AA_1D}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot h\cdot d=\frac{1}{3}ahd$，$V_{Q-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+2a}{2}\cdot d\cdot\frac{h}{2}=\frac{1}{4}ahd$，

∴$V_1=\frac{7}{12}ahd$，

∵$V_{棱柱}=\frac{3}{2}ahd$，∴$V_2=\frac{11}{12}ahd$，∴四棱柱被平面α所分成上、下两部分的体积之比$\frac{11}{7}$;

(III)在△ADC 中，作 AE⊥DC，垂足为 E，连接 A_1E，则 DE⊥平面 AEA_1，∴$DE\perp A_1E$，

∴$\angle AEA_1$为平面α与底面 ABCD 所成二面角，

∵BC∥AD，AD=2BC，

∴$S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABC}$，

∵梯形 ABCD 的面积为 6，DC=2，

∴$S_{\triangle ADC}=4$，AE=4，

∴$\tan\angle AEA_1=\frac{AA_1}{AE}=1$，∴$\angle AEA_1=\frac{\pi}{4}$，

∴平面α与底面 ABCD 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{4}$.

21.(13 分)设实数 c>0，整数 p>1，$n\in N^*$.

(Ⅰ)证明：当 x>-1 且 x≠0 时，$(1+x)^p>1+px$；

(Ⅱ)数列$\{a_n\}$满足 $a_1>c^{\frac{1}{p}}$，$a_{n+1}=\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}$. 证明：$a_n>a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$.

解析：第(Ⅰ)问中，可构造函数 $f(x)=(1+x)^p-(1+px)$，求导数后利用函数的单调性求解；

对第(Ⅱ)问，从 $a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$着手，由 $a_{n+1}=\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}$，将求证式进行等价转化后即可解决，

用相同的方式将 $a_n>a_{n+1}$进行转换，设法利用已证结论证明.

答案：(Ⅰ)令 $f(x)=(1+x)^p-(1+px)$，则 $f'(x)=p(1+x)^{p-1}-p=p[(1+x)^{p-1}-1]$.

①当$-1<x<0$时，$0<1+x<1$，由 p>1 知 p-1>0，∴$(1+x)^{p-1}<(1+x)^0=1$，

∴$(1+x)^{p-1}-1<0$，即 $f'(x)<0$，

∴f(x)在(-1，0]上为减函数，

∴$f(x)>f(0)=(1+0)^p-(1+p\times 0)=0$，即$(1+x)^p-(1+px)>0$，

∴$(1+x)^p>1+px$.

②当 x>0 时，有 1+x>1，得$(1+x)^{p-1}>(1+x)^0=1$，

∴$f'(x)>0$，

∴f(x)在[0，+∞)上为增函数，

∴$f(x)>f(0)=0$，

∴$(1+x)^p>1+px$.

综合①、②知，当 x>-1 且 x≠0 时，都有$(1+x)^p>1+px$，得证.

(Ⅱ)先证 $a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$.

∵$a_{n+1}=\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}$，∴只需证$\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}>c^{\frac{1}{p}}$，

将$\frac{p-1}{p}$写成 p-1 个$\frac{1}{p}$相加，上式左边=$\frac{1}{p}a_n+\frac{1}{p}a_n+\cdots+\frac{1}{p}a_n+\frac{ca_n^{1-p}}{p}$

$\geqslant p\sqrt[p]{\frac{a_n^{p-1}}{p^{p-1}}\cdot\frac{ca_n^{1-p}}{p}}=c^{\frac{1}{p}}$,

当且仅当$\frac{a_n}{p}=\frac{ca_n^{1-p}}{p}$，即 $a_n=c^{\frac{1}{p}}$时，上式取“=”号，

当 n=1 时，由题设知 $a_1>c^{\frac{1}{p}}$，∴上式“=”号不成立，

∴$\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}>c^{\frac{1}{p}}$，即 $a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$.

再证 $a_n>a_{n+1}$.

只需证 $a_n>\frac{p-1}{p}a_n+\frac{c}{p}a_n^{1-p}$，化简、整理得 $a_n^p>c$，只需证 $a_n>c^{\frac{1}{p}}$.

由前知 $a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$成立，即从数列$\{a_n\}$的第 2 项开始成立，

又 n=1 时，由题设知 $a_1>c^{p}$成立，

∴ $a_n>c^{\frac{1}{p}}$对 $n\in N^*$成立，∴$a_n>a_{n+1}$.

综上知，$a_n>a_{n+1}>c^{\frac{1}{p}}$，原不等式得证.