2016年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）数学理

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分，每小题给出四个选项，只有一个选项符合题目要求.

1. 若复数z满足$2z+\bar{z}=3-2i$，其中i为虚数单位，则z=(　　)

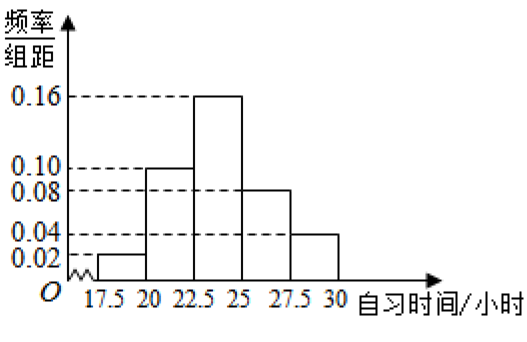
A.1+2i
B.1-2i
C.-1+2i
D.-1-2i

解析：复数z满足$2z+\bar{z}=3-2i$，

设z=a+bi，
可得：2a+2bi+a-bi=3-2i.
解得a=1，b=-2.
z=1-2i.
答案：B.

2. 设集合$A=\{y|y=2^x，x\in R\}$，$B=\{x|x^2-1<0\}$，则A∪B=(　　)
A.(-1，1)
B.(0，1)
C.(-1，+∞)
D.(0，+∞)
解析：∵$A=\{y|y=2^x，x\in R\}$=(0，+∞)，
$B=\{x|x^2-1<0\}$=(-1，1)，
∴A∪B=(0，+∞)∪(-1，1)=(-1，+∞).
答案：C.

3. 某高校调查了200名学生每周的自习时间(单位：小时)，制成了如图所示的频率分布直方图，其中自习时间的范围是[17.5，30]，样本数据分组为[17.5，20)，[20，22.5)，[22.5，25)，[25，27.5)，[27.5，30].根据直方图，这200名学生中每周的自习时间不少于22.5小时的人数是(　　)



A.56
B.60
C.120

D.140

解析：自习时间不少于 22.5 小时的频率为：(0.16+0.08+0.04)×2.5=0.7，

故自习时间不少于 22.5 小时的频率为：0.7×200=140，

答案：D

4. 若变量 x，y 满足$\begin{cases} x+y\le 2 \\ 2x-3y\le 9 \\ x\ge 0 \end{cases}$，则 x^2+y^2 的最大值是(　　)

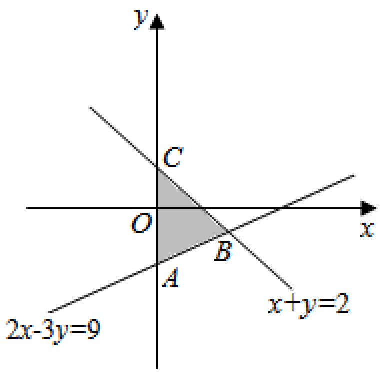
A.4

B.9

C.10

D.12

解析：由约束条件$\begin{cases} x+y\le 2 \\ 2x-3y\le 9 \\ x\ge 0 \end{cases}$作出可行域如图，



∵A(0，-3)，C(0，2)，

∴|OA|＞|OC|，

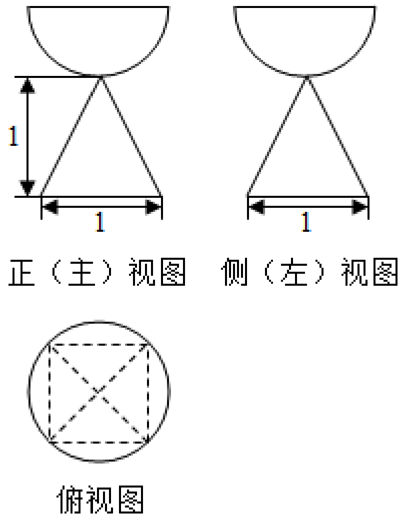
联立$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-3y=9 \end{cases}$，解得 B(3，-1).

$$\because |OB|^2=\sqrt{\left(3^2+(-1)^2\right)}^2=10,$$

∴x^2+y^2 的最大值是 10.

答案：C.

5. 一个由半球和四棱锥组成的几何体，其三视图如图所示.则该几何体的体积为(　　)



A. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\pi$

B. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$

C. $\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

D. $1+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$

解析：由已知中的三视图可得：该几何体上部是一个半球，下部是一个四棱锥，
半球的直径为棱锥的底面对角线，

由棱锥的底底面棱长为 1，可得 2R=$\sqrt{2}$.

故 R=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故半球的体积为：$\frac{2}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$，

棱锥的底面面积为：1，高为 1，

故棱锥的体积$V=\frac{1}{3}$，

故组合体的体积为：$\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$，

答案：C

6. 已知直线 a，b 分别在两个不同的平面α，β内.则“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的(　　)
A.充分不必要条件
B.必要不充分条件
C.充要条件

D.既不充分也不必要条件
解析：当“直线 a 和直线 b 相交”时，“平面α和平面β相交”成立，
当“平面α和平面β相交”时，“直线 a 和直线 b 相交”不一定成立，
故“直线 a 和直线 b 相交”是“平面α和平面β相交”的充分不必要条件，
答案：A

7. 函数 $f(x)=(\sqrt{3}sinx+cosx)(\sqrt{3}cosx-sinx)$ 的最小正周期是(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$

B. π

C. $\frac{3\pi}{2}$

D.2π

解析：函数

$f(x)=(\sqrt{3}sinx+cosx)(\sqrt{3}cosx-sinx)=2sin(x+\frac{\pi}{6})\cdot 2cos(x+\frac{\pi}{6})=2sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

∴T=π，

答案：B

8. 已知非零向量 $\vec{m},\vec{n}$ 满足 $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$，$cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{1}{3}$.若 $\vec{n}\perp(t\vec{m}+\vec{n})$，则实数 t 的值为

(　　)

A.4

B.-4

C. $\frac{9}{4}$

D.- $\frac{9}{4}$

解析：∵ $4|\vec{m}|=3|\vec{n}|$，$cos<\vec{m},\vec{n}>=\frac{1}{3}$，$\vec{n}\perp(t\vec{m}+\vec{n})$，

∴ $\vec{n}\cdot(t\vec{m}+\vec{n})=t\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^2=t|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|\cdot\frac{1}{3}+|\vec{n}|^2=(\frac{t}{4}+1)|\vec{n}|^2$=0，

解得：t=-4，

答案：B.

9. 已知函数 f(x)的定义域为 R.当 x＜0 时，f(x)=x^3-1；当-1≤x≤1 时，f(-x)=-f(x)；当 x＞$\frac{1}{2}$ 时，

$f(x+\frac{1}{2})=f(x-\frac{1}{2})$.则 f(6)=(　　)

A.-2

B.-1

C.0

D.2

解析：∵当 x＞$\frac{1}{2}$时，$f(x+\frac{1}{2})=f(x-\frac{1}{2})$，

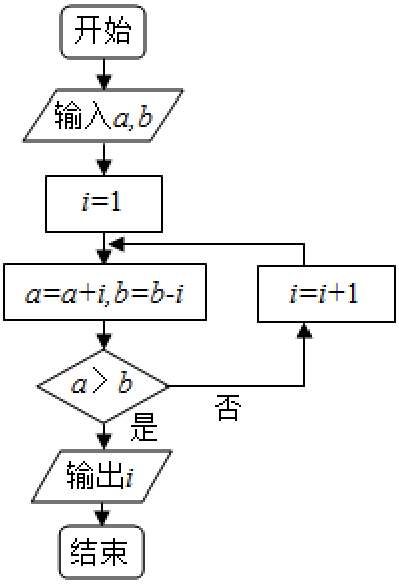
∴当 x＞$\frac{1}{2}$时，f(x+1)=f(x)，即周期为 1.

∴f(6)=f(1)，
∵当-1≤x≤1 时，f(-x)=-f(x)，
∴f(1)=-f(-1)，
∵当 x＜0 时，f(x)=x^3-1，
∴f(-1)=-2，
∴f(1)=-f(-1)=2，
∴f(6)=2.
答案：D.

10. 若函数 y=f(x)的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，则称 y=f(x)具有 T 性质.下列函数中具有 T 性质的是(　　)
A.y=sinx
B.y=lnx
C.y=e^x
D.y=x^3
解析：函数 y=f(x)的图象上存在两点，使得函数的图象在这两点处的切线互相垂直，
则函数 y=f(x)的导函数上存在两点，使这点的导函数值乘积为-1，
当 y=sinx 时，y′=cosx，满足条件；
当 y=lnx 时，y′=$\frac{1}{x}$＞0 恒成立，不满足条件；
当 y=ex 时，y′=e^x＞0 恒成立，不满足条件；
当 y=x3 时，y′=$3x^2$＞0 恒成立，不满足条件；
答案：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 执行如图的程序框图，若输入的 a，b 的值分别为 0 和 9，则输出的 i 的值为____.



解析：∵输入的 a，b 的值分别为 0 和 9，i=1.
第一次执行循环体后：a=1，b=8，不满足条件 a＜b，故 i=2；
第二次执行循环体后：a=3，b=6，不满足条件 a＜b，故 i=3；
第三次执行循环体后：a=6，b=3，满足条件 a＜b，
故输出的 i 值为：3，
答案：3

12. 若（$ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$)^5 的展开式中 x5 的系数是-80，则实数 a=____.

解析：（$ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$)^5 的展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_5^r(ax^2)^{5-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_5^r a^{5-r}x^{10-\frac{5r}{2}}$，

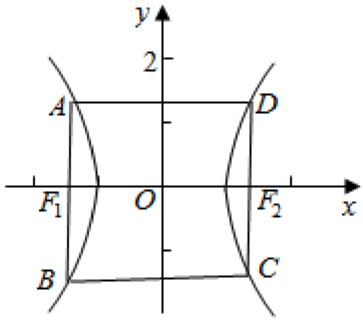
令 $10-\frac{5r}{2}$ =5，解得 r=2.

∵（$ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$)^5 的展开式中 x^5 的系数是-80

∴ $C_5^2a^3=-80$，

得 a=-2.
答案：-2

13. 已知双曲线 E：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)，若矩形 ABCD 的四个顶点在 E 上，AB，CD 的中点为 E 的两个焦点，且 2|AB|=3|BC|，则 E 的离心率是____.
解析：



令 x=c，代入双曲线的方程可得 $y=\pm b\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}=\pm\frac{b^2}{a}$，

由题意可设 $A(-c,\frac{b^2}{a})$，$B(-c,-\frac{b^2}{a})$，$C(c,-\frac{b^2}{a})$，$D(c,\frac{b^2}{a})$，

由 2|AB|=3|BC|，可得

$2\cdot\frac{2b^2}{a}=3\cdot 2c$，即为 $2b^2=3ac$，

由 $b^2=c^2-a^2$，$e=\frac{c}{a}$，可得 $2e^2-3e-2=0$，

解得 e=2(负的舍去).

答案：2.

14. 在[-1，1]上随机地取一个数 k，则事件“直线 y=kx 与圆$(x-5)^2+y^2=9$ 相交”发生的概率为____.

解析：圆$(x-5)^2+y^2=9$ 的圆心为(5，0)，半径为 3.

圆心到直线 y=kx 的距离为 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}$，

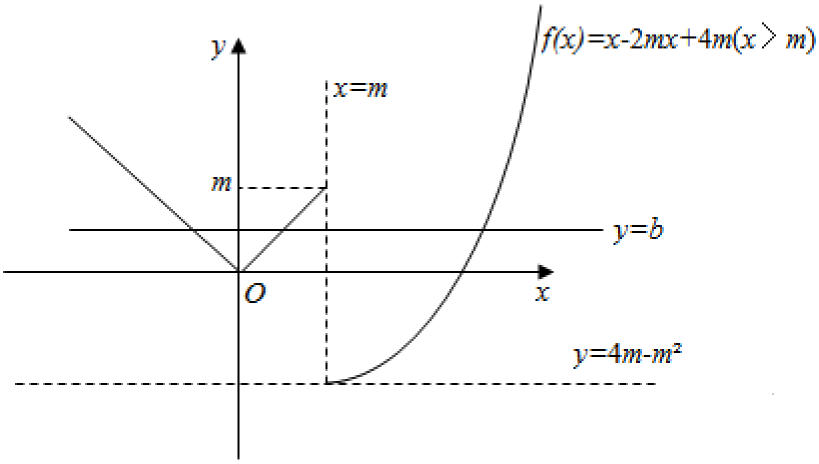
要使直线 y=kx 与圆$(x-5)^2+y^2=9$ 相交，则 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}<3$，解得 $-\frac{3}{4}<k<\frac{3}{4}$.

∴在区间[-1，1]上随机取一个数 k，使直线 y=kx 与圆$(x-5)^2+y^2=9$ 相交相交的概率为 $\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1+1}=\frac{3}{4}$.

答案：$\frac{3}{4}$.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le m\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$，其中 m>0，若存在实数 b，使得关于 x 的方程 f(x)=b 有三个不同的根，则 m 的取值范围是____.

解析：当 m>0 时，函数 $f(x)=\begin{cases}|x|, & x\le m\\ x^2-2mx+4m, & x>m\end{cases}$ 的图象如下：



∵x＞m 时，$f(x)=x^2-2mx+4m=(x-m)^2+4m-m^2>4m-m^2$，

∴y 要使得关于 x 的方程 f(x)=b 有三个不同的根，

必须 $4m-m^2<m(m>0)$，

即 $m^2>3m(m>0)$，

解得 m＞3，

∴m 的取值范围是(3，+∞)，

答案：(3，+∞).

三、解答题,：本大题共 6 小题，共 75 分.

16. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2(tanA+tanB)=\frac{tanA}{cosB}+\frac{tanB}{cosA}$.

(Ⅰ)证明：a+b=2c；

(Ⅱ)求 cosC 的最小值.

解析:(Ⅰ)由切化弦公式 $tanA=\frac{sinA}{cosA}$，$tanB=\frac{sinB}{cosB}$，带入 $2(tanA+tanB)=\frac{tanA}{cosB}+\frac{tanB}{cosA}$ 并整理可得 2(sinAcosB+cosAsinB)=sinA+cosB，这样根据两角和的正弦公式即可得到 sinA+sinB=2sinC，从而根据正弦定理便可得出 a+b=2c；

(Ⅱ)根据 a+b=2c，两边平方便可得出 $a^2+b^2+2ab=4c^2$，从而得出 $a^2+b^2=4c^2-2ab$，并由不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 得出 $c^2\geqslant ab$，也就得到了 $\frac{c^2}{ab}\geq 1$，这样由余弦定理便可得出 $cosC=\frac{3c^2}{2ab}-1$，从而得出 cosC 的范围，进而便可得出 cosC 的最小值.

答案：(Ⅰ)证明：由 $2(tanA+tanB)=\frac{tanA}{cosB}+\frac{tanB}{cosA}$ 得：

$$2\left(\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}\right)=\frac{sinA}{cosAcosB}+\frac{sinB}{cosAcosB};$$

∴两边同乘以 cosAcosB 得，2(sinAcosB+cosAsinB)=sinA+sinB；

∴2sin(A+B)=sinA+sinB；

即 sinA+sinB=2sinC(1)；

根据正弦定理，$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}=\frac{c}{sinC}=2R$；

$\therefore sinA=\dfrac{a}{2R}$，$sinB=\dfrac{b}{2R}$，$sinC=\dfrac{c}{2R}$，带入(1)得：$\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}=\dfrac{2c}{2R}$；

∴a+b=2c；

(Ⅱ)a+b=2c；

∴$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=4c^2$；

∴$a^2+b^2=4c^2-2ab$，且 $4c^2\geqslant 4ab$，当且仅当 a=b 时取等号；

又 a，b＞0；

$\therefore \dfrac{c^2}{ab}\geq 1$；

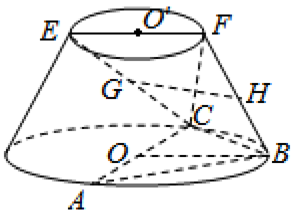
∴由余弦定理，$cosC=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3c^2-2ab}{2ab}=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{c^2}{ab}-1\geq\dfrac{1}{2}$；

∴cosC 的最小值为$\dfrac{1}{2}$.

17. 在如图所示的圆台中，AC 是下底面圆 O 的直径，EF 是上底面圆 O′ 的直径，FB 是圆台的一条母线.

(I)已知 G，H 分别为 EC，FB 的中点，求证：GH∥平面 ABC；

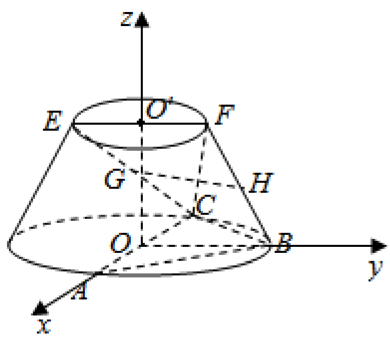
(Ⅱ)已知 $EF=FB=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$，AB=BC，求二面角 F-BC-A 的余弦值.



解析：(Ⅰ)取 FC 中点 Q，连结 GQ、QH，推导出平面 GQH∥平面 ABC，由此能证明 GH∥平面 ABC.

(Ⅱ)由 AB=BC，知 BO⊥AC，以 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，OO′ 为 z 轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角 F-BC-A 的余弦值.

答案：(Ⅰ)取 FC 中点 Q，连结 GQ、QH，



∵G、H 为 EC、FB 的中点，

$\therefore GQ\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}EF$，$QH//\dfrac{1}{2}BC$，

又$\because EF\underline{\underline{//}}BO$，$\therefore GQ\underline{\underline{//}}\dfrac{1}{2}BO$，

∴平面 GQH∥平面 ABC，

∵$GH\subset$面 GQH，∴GH∥平面 ABC.

解：(Ⅱ)∵AB=BC，∴BO⊥AC，

又∵OO′⊥面 ABC，

∴以 O 为原点，OA 为 x 轴，OB 为 y 轴，OO′为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A(2\sqrt{3},0,0)$，$C(-2\sqrt{3},0,0)$，$B(0,2\sqrt{3},0)$，$O'(0,0,3)$，$F(0,\sqrt{3},3)$，

$\overrightarrow{FC}=(-2\sqrt{3},-\sqrt{3},-3)$，$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$，

由题意可知面 ABC 的法向量为$\overrightarrow{OO'}$=(0，0，3)，

设$\vec{n}$=(x_0，y_0，z_0)为面 FCB 的法向量，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-2\sqrt{3}x_0-\sqrt{3}y_0-3z_0=0\\ 2\sqrt{3}x_0+2\sqrt{3}y_0=0\end{cases}$，

取 x0=1，则$\vec{n}=(1,-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})$，

∴$cos\langle\overrightarrow{OO'},\vec{n}\rangle=\frac{\overrightarrow{OO'}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{OO'}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{\sqrt{7}}{7}$.

∵二面角 F-BC-A 的平面角是锐角，

∴二面角 F-BC-A 的余弦值为$\frac{\sqrt{7}}{7}$.

18. 已知数列{a_n}的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$，{b_n}是等差数列，且 $a_n=b_n+b_n+1$.

(Ⅰ)求数列{b_n}的通项公式；

(Ⅱ)令$c_n=\frac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}$，求数列{$c_n$}的前 n 项和 T_n.

解析：(Ⅰ)求出数列{a_n}的通项公式，再求数列{b_n}的通项公式；

(Ⅱ)求出数列{c_n}的通项，利用错位相减法求数列{c_n}的前 n 项和 T_n.

答案：(Ⅰ)$S_n=3n^2+8n$，

∴n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=6n+5$，

n=1 时，$a_1=S_1=11$，∴$a_n=6n+5$；

∵$a_n=b_n+b_{n+1}$，

∴$a_{n-1}=b_{n-1}+b_n$，

∴$a_n-a_{n-1}=b_{n+1}-b_{n-1}$.

∴2d=6，

∴d=3，

∵$a_1=b_1+b_2$，

∴$11=2b_1+3$，

∴$b_1=4$，

∴$b_n=4+3(n-1)=3n+1$；

(Ⅱ) $c_n=\dfrac{(a_n+1)^{n+1}}{(b_n+2)^n}=\dfrac{(6n+6)^{n+1}}{(3n+3)^n}=6(n+1)\cdot 2^n$，

∴$T_n=6[2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+(n+1)\cdot 2^n]$①，

∴$2T_n=6[2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}]$②，

① - ② 可 得 $-T_n=6[2\cdot 2+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}]=12+6\times\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-6(n+1)\cdot 2^{n+1}=(-6n)\cdot 2^{n+1}=-3n\cdot 2^{n+2}$，

∴$T_n=3n\cdot 2^{n+2}$.

19. 甲、乙两人组成“星队”参加猜成语活动，每轮活动由甲、乙各猜一个成语，在一轮活动中，如果两人都猜对，则“星队”得 3 分；如果只有一个人猜对，则“星队”得 1 分；如果两人都没猜对，则“星队”得 0 分.已知甲每轮猜对的概率是$\dfrac{3}{4}$，乙每轮猜对的概率是$\dfrac{2}{3}$；每轮活动中甲、乙猜对与否互不影响.各轮结果亦互不影响.假设“星队”参加两轮活动，求：

(I)“星队”至少猜对 3 个成语的概率；

(II)“星队”两轮得分之和为 X 的分布列和数学期望 EX.

解析：(I)“星队”至少猜对 3 个成语包含“甲猜对 1 个，乙猜对 2 个”，“甲猜对 2 个，乙猜对 1 个”，“甲猜对 2 个，乙猜对 2 个”三个基本事件，进而可得答案；

(II)由已知可得：“星队”两轮得分之和为 X 可能为：0，1，2，3，4，6，进而得到 X 的分布列和数学期望.

答案：(I)“星队”至少猜对 3 个成语包含“甲猜对 1 个，乙猜对 2 个”，“甲猜对 2 个，乙猜对 1 个”，“甲猜对 2 个，乙猜对 2 个”三个基本事件，

故概率$P=C_2^1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\left(1-\dfrac{3}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot C_2^1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{3}$，

(II)“星队”两轮得分之和为 X 可能为：0，1，2，3，4，6，

则$P(X=0)=\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{1}{144}$，

$$P(X=1)=2\times\left[\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)^2+\left(1-\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{10}{144},$$

$$P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}+\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{25}{144},$$

$$P(X=3)=2\times\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{144},$$

$$P(X=4)=2\times\left[\frac{3}{4}\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]=\frac{60}{144}$$

$P(X=6)=\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=\frac{36}{144}$

故 X 的分布列如下图所示：

X	0	1	2	3	4	6
P	$\frac{1}{144}$	$\frac{10}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{12}{144}$	$\frac{60}{144}$	$\frac{36}{144}$

∴数学期望 $EX=0\times\frac{1}{144}+1\times\frac{10}{144}+2\times\frac{25}{144}+3\times\frac{12}{144}+4\times\frac{60}{144}+6\times\frac{36}{144}=\frac{552}{144}=\frac{23}{6}$.

20. 已知 $f(x)=a(x-lnx)+\frac{2x-1}{x^2}$，a∈R.

(I)讨论 f(x)的单调性；

(II)当 a=1 时，证明 f(x)＞f′(x)+$\frac{3}{2}$对于任意的 x∈[1，2]成立.

解析：(Ⅰ)求出原函数的导函数，然后对 a 分类分析导函数的符号，由导函数的符号确定原函数的单调性；

(Ⅱ)构造函数 F(x)=f(x)-f′(x)，令 g(x)=x-lnx，$h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$. 则 F(x)=f(x)-f′(x)=g(x)+h(x)，利用导数分别求 g(x)与 h(x)的最小值得到 F(x)＞$\frac{3}{2}$恒成立.由此可得 f(x)＞f′(x)+$\frac{3}{2}$对于任意的 x∈[1，2]成立.

答案：由 $f(x)=a(x-lnx)+\frac{2x-1}{x^2}$，

得 $f'(x)=a(1-\frac{1}{x})+\frac{2x^2-(2x-1)\cdot 2x}{x^4}$

$=\frac{ax-a}{x}+\frac{2-2x}{x^3}=\frac{ax^3-ax^2+2-2x}{x^3}=\frac{(x-1)(ax^2-2)}{x^3}$ (x＞0).

若 a≤0，则 ax²-2＜0 恒成立，

∴当 x∈(0，1)时，f′(x)＞0，f(x)为增函数，

当 x∈(1，+∞)时，f′(x)＜0，f(x)为减函数；

当 a＞0，若 0＜a＜2，当 x∈(0，1)和($\frac{\sqrt{2a}}{a}$，+∞)时，f′(x)＞0，f(x)为增函数，

当 x∈(1，$\frac{\sqrt{2a}}{a}$)时，f′(x)＜0，f(x)为减函数；

若 a=2，f′(x)≥0 恒成立，f(x)在(0，+∞)上为增函数；

若 a＞2，当 x∈(0，$\frac{\sqrt{2a}}{a}$)和(1，+∞)时，f′(x)＞0，f(x)为增函数，

当 x∈($\frac{\sqrt{2}a}{a}$ ，1)时，f′(x)<0，f(x)为减函数；

(Ⅱ)解：∵a=1，

令 F(x)=f(x)-f′(x)= $x-lnx+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}=x-lnx+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$.

令 g(x)=x-lnx，$h(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-1$.

则 F(x)=f(x)-f′(x)=g(x)+h(x)，

由 $g'(x)=\frac{x-1}{x}\geq 0$，可得 g(x)≥g(1)=1，当且仅当 x=1 时取等号；

又 $h'(x)=\frac{-3x^2-2x+6}{x^4}$，

设φ(x)= $-3x^2-2x+6$，则φ(x)在[1，2]上单调递减，

且φ(1)=1，φ(2)=-10，

∴在[1，2]上存在 x0，使得 x∈(1，x_0) 时φ(x_0)>0，x∈(x_0，2)时，φ(x_0)<0，

∴函数 h(x)在(1，x_0)上单调递增；在(x_0，2)上单调递减，

由于 h(1)=1，h(2)= $\frac{1}{2}$，因此 h(x)≥h(2)= $\frac{1}{2}$，当且仅当 x=2 取等号，

∴f(x)-f′(x)=g(x)+h(x)>g(1)+h(2)= $\frac{3}{2}$，

∴F(x)>$\frac{3}{2}$恒成立.

即 f(x)>f′(x)+ $\frac{3}{2}$对于任意的 x∈[1，2]成立.

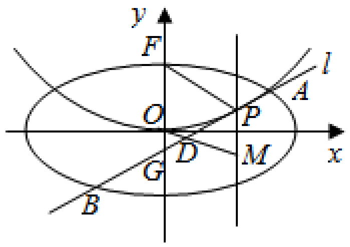
21. 平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (a>b>0)的离心率是$\frac{\sqrt{3}}{2}$，抛物线 E：$x^2=2y$ 的焦点 F 是 C 的一个顶点.

(I)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)设 P 是 E 上的动点，且位于第一象限，E 在点 P 处的切线 l 与 C 交于不同的两点 A，B，线段 AB 的中点为 D，直线 OD 与过 P 且垂直于 x 轴的直线交于点 M.

(i)求证：点 M 在定直线上；

(ii)直线 l 与 y 轴交于点 G，记△PFG 的面积为 S_1，△PDM 的面积为 S_2，求$\frac{S_1}{S_2}$的最大值及取得最大值时点 P 的坐标.



解析：(I)运用椭圆的离心率公式和抛物线的焦点坐标，以及椭圆的 a，b，c 的关系，解得 a，b，进而得到椭圆的方程；

(Ⅱ)(i)设 P(x_0，y_0)，运用导数求得切线的斜率和方程，代入椭圆方程，运用韦达定理，可得中点 D 的坐标，求得 OD 的方程，再令 $x=x_0$，可得 $y=-\frac{1}{4}$.进而得到定直线；

(ii)由直线 l 的方程为 $y=x_0x-y_0$，令 x=0，可得 G(0，$-y_0$)，运用三角形的面积公式，可得 $S_1=\frac{1}{2}|FG|\cdot|x_0|=\frac{1}{2}x_0\cdot(\frac{1}{2}+y_0)$，$S_2=\frac{1}{2}|PM|\cdot\left|x_0-\frac{4x_0y_0}{1+4x_0^2}\right|$，化简整理，再 $1+2x_0^2=t$($t\geqslant1$)，整理可得 t 的二次方程，进而得到最大值及此时 P 的坐标.

答案：(I)由题意可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，抛物线 E：$x^2=2y$ 的焦点 F 为(0，$\frac{1}{2}$)，

即有 $b=\frac{1}{2}$，$a^2-c^2=\frac{1}{4}$，

解得 a=1，$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

可得椭圆的方程为 $x^2+4y^2=1$；

(Ⅱ)(i)证明：设 P(x_0，y_0)，可得 $x_0^2=2y_0$，

由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$，即有切线的斜率为 x0，

则切线的方程为 $y-y_0=x_0(x-x_0)$，

可化为 $y=x_0x-y_0$，代入椭圆方程，

可得$(1+4x_02)x^2-8x_0y_0x+4y_0^2-1=0$，

设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，

可得 $x_1+x_2=\frac{8x_0y_0}{1+4x_0^2}$，即有中点 $D(\frac{4x_0y_0}{1+4x_0^2},-\frac{y_0}{1+4x_0^2})$，

直线 OD 的方程为 $y=-\frac{1}{4x_0}x$，可令 $x=x_0$，可得 $y=-\frac{1}{4}$.

即有点 M 在定直线 $y=-\frac{1}{4}$ 上；

(ii)直线 l 的方程为 $y=x_0x-y_0$，令 x=0，可得 G(0，$-y_0$)，

则 $S_1=\frac{1}{2}|FG|\cdot|x_0|=\frac{1}{2}x_0\cdot(\frac{1}{2}+y_0)=\frac{1}{4}x_0(1+x_0^2)$；

$S_2=\frac{1}{2}|PM|\cdot\left|x_0-\frac{4x_0y_0}{1+4x_0^{\ 2}}\right|=\frac{1}{2}(y_0+\frac{1}{4})\cdot\frac{x_0+4x_0^{\ 3}-4x_0y_0}{1+4x_0^{\ 2}}=\frac{1}{8}x_0\cdot\frac{\left(1+2x_0^{\ 2}\right)^2}{1+4x_0^{\ 2}}$，

则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\left(1+x_0^{\ 2}\right)\left(1+4x_0^{\ 2}\right)}{\left(1+2x_0^{\ 2}\right)^2}$，

令 $1+2x_0^2=t(t\geqslant 1)$，则$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\left(1+\frac{t-1}{2}\right)\left(1+2t-2\right)}{t^2}=\frac{\left(t+1\right)\left(2t-1\right)}{t^2}$

$=\frac{2t^2+t-1}{t^2}=2+\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}=-(\frac{1}{t}-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$，

则当 $t=2$，即$x_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$\frac{S_1}{S_2}$取得最大值$\frac{9}{4}$，

此时点 P 的坐标为$(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4})$.