2013年普通高等学校招生全国统一考试（上海卷）

文科数学

一、填空题（本大题共有14题，满分56分）考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．不等式 $\dfrac{x}{2x-1}<0$ 的解为________．

2．在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+a_3+a_4=30$，则 $a_2+a_3=$________．

3．设 $m\in\mathbf{R}$，$m^2+m-2+(m^2-1)\mathrm{i}$ 是纯虚数，其中 i 是虚数单位，则 $m=$_______．

4．若 $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则 y =_______．

5．已知 ΔABC 的内角 A、B、C 所对的边分别是 a，b，c．若 $a^2+ab+b^2-c^2=0$，则角 C 的大小是_______．

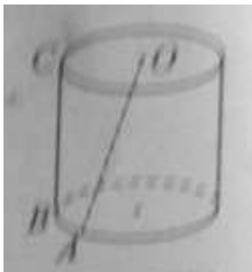
6．某学校高一年级男生人数占该年级学生人数的40%．在一次考试中，男、女生平均分数分别为75、80，则这次考试该年级学生平均分数为_______．

7．设常数 $a\in\mathbf{R}$．若 $\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$ 的二项展开式中 x^7 项的系数为-10，则 $a=$______．

8．方程 $\dfrac{9}{3^x-1}+1=3^x$ 的实数解为______．

9．若 $\cos x\cos y+\sin x\sin y=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(2x-2y)=$_______．

10．已知圆柱 Ω 的母线长为 l，底面半径为 r，O 是上地面圆心，A、B 是下底面圆心上两个不同的点，BC 是母线，如图．若直线 OA 与 BC 所成角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$，则 $\dfrac{1}{r}=$_______．



第10题图

11．盒子中装有编号为1,2,3,4,5,6,7的七个球，从中任意取出两个，则这两个球的编号之积为偶数的概率是______（结果用最简分数表示）．

12．设 AB 是椭圆 Γ 的长轴，点 C 在 Γ 上，且 $\angle CBA=\dfrac{\pi}{4}$．若 $AB=4$，$BC=\sqrt{2}$，则 Γ 的两个焦点之间的距离为______．

13．设常数 $a>0$，若 $9x+\dfrac{a^2}{x}\geq a+1$ 对一切正实数 x 成立，则 a 的取值范围为________．

14．已知正方形 $ABCD$ 的边长为1．记以 A 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{a_1}$、$\overrightarrow{a_2}$、$\overrightarrow{a_3}$；以 C 为起点，其余顶点为终点的向量分别为 $\overrightarrow{c_1}$、$\overrightarrow{c_2}$、$\overrightarrow{c_3}$．若 $i,j,k,l\in\{1,2,3\}$ 且 $i\neq j,k\neq l$，则 $(\overrightarrow{a_i}+\overrightarrow{a_j})\cdot(\overrightarrow{c_k}+\overrightarrow{c_l})$ 的最小值是_______．

二、选择题（本大题共有 4 题，满分 20 分）每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分．

15．函数 $f\left(x\right)=x^2-1\left(x\ge 1\right)$ 的反函数为 $f^{-1}\left(x\right)$，则 $f^{-1}\left(2\right)$ 的值是（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$-\sqrt{3}$　　（C）$1+\sqrt{2}$　　（D）$1-\sqrt{2}$

16．设常数 $a\in \mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\mid \left(x-1\right)\left(x-a\right)\ge 0\right\}$，$B=\left\{x\mid x\ge a-1\right\}$．若 $A\bigcup B=\mathbf{R}$，则 a 的取值范围为（　　）

（A）$\left(-\infty,2\right)$　　（B）$\left(-\infty,2\right]$　　（C）$\left(2,+\infty\right)$　　（D）$\left[2,+\infty\right)$

17．钱大姐常说“好货不便宜”，她这句话的意思是：“好货”是“不便宜”的（　　）

（A）充分条件　　（B）必要条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分又非必要条件

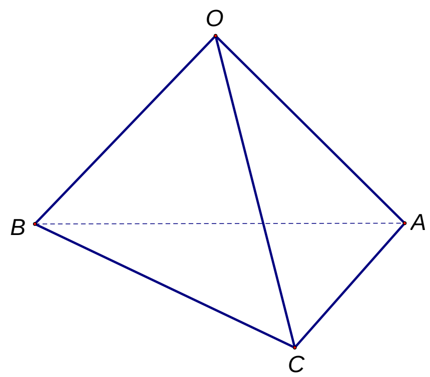
18．记椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{ny^2}{4n+1}=1$ 围成的区域（含边界）为 $\Omega_n\left(n=1,2,\cdots\right)$，当点 $\left(x,y\right)$ 分别在 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots$ 上时，$x+y$ 的最大值分别是 $M_1,M_2,\cdots$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}M_n=$（　　）

（A）0　（B）$\dfrac{1}{4}$　(C) 2　(D) $2\sqrt{2}$

三．解答题（本大题共有 5 题，满分 74 分）解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域写出必要的步骤．

19．（本题满分 12 分）

如图，正三棱锥 $O-ABC$ 底面边长为 2，高为 1，求该三棱锥的体积及表面积．



第19题图

20．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题．第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 9 分．

甲厂以 x 千米/小时的速度匀速生产某种产品（生产条件要求 $1\le x\le 10$），每小时可获得的利润是 $100(5x+1-\dfrac{3}{x})$ 元．

（1）求证：生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a(5+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2})$；

（2）要使生产 900 千克该产品获得的利润最大，问：甲厂应该如何选取何种生产速度？并求此最大利润．

21．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题．第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分．

已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x)$，其中常数 $\omega>0$．

（1）令 $\omega=1$，判断函数 $F(x)=f(x)+f(x+\dfrac{\pi}{2})$ 的奇偶性并说明理由；

（2）令 $\omega=2$，将函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 个单位，再往上平移1个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像．对任意的 $a\in R$，求 $y=g(x)$ 在区间 $[a,a+10\pi]$ 上零点个数的所有可

能值.

22.（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题．第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 8 分．

已知函数 $f(x)=2-|x|$．无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=f(a_n),n\in N^*$．

（1）若 $a_1=0$，求 a_2，a_3，a_4；

（2）若 $a_1>0$，且 a_1，a_2，a_3 成等比数列，求 a_1 的值；

（3）是否存在 a_1，使得 a_1，a_2，a_3，…，a_n …成等差数列？若存在，求出所有这样的 a_1；若不存在，说明理由．

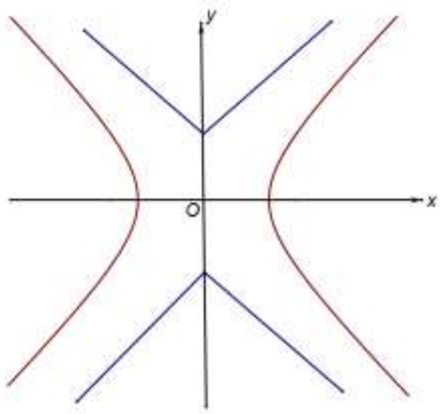
23.（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题．第 1 小题满分 3 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 9 分．

如图，已知双曲线 C_1：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，曲线 C_2：$|y|=|x|+1$．P 是平面内一点，若存在过点 P 的直线与 C_1、C_2 都有公共点，则称 P 为“C_1-C_2 型点”．

（1）在正确证明 C_1 的左焦点是“C_1-C_2 型点”时，要使用一条过该焦点的直线，试写出一条这样的直线的方程（不要求验证）；

（2）设直线 $y=kx$ 与 C_2 有公共点，求证 $|k|>1$，进而证明原点不是“C_1-C_2 型点；

（3）求证：圆 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 内的点都不是“C_1-C_2 型点”．



第23题图

参考答案

一． 填空题

1. $0 < X < \frac{1}{2}$
2. 15
3. -2
4. 1
5. $\frac{2\pi}{3}$
6. 78
7. -2
8. $\log_3 4$
9. $-\frac{7}{9}$
10. $\sqrt{3}$
11. $\frac{5}{7}$
12. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$
13. $\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$
14. -5

二． 选择题

题号	15	16	17	18
代号	A	B	A	D

三． 解答题

19.解：由已知条件可知，正三棱锥 O-ABC 的底面△ABC 是边长为 2 的正三角形。

经计算得底面△ABC 的面积为$\sqrt{3}$

所以该三锥的体积为$\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$

设 O’是正三角形 ABC 的中心

由正三棱锥的性质可知，OO’垂直于平面 ABC

延长 AO’交 BC 于 D，得 AD=$\sqrt{3}$,O’D=$\frac{\sqrt{3}}{3}$

又因为 OO’=1，所以正三棱锥的斜高 OD=$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

故侧面积为$\frac{1}{2}\times 6\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$

所以该三棱锥的表面积为$\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

因此，所求三棱锥的体积为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，表面积为 $3\sqrt{3}$

20.解：

（1）生产 a 千克该产品，所用的时间是$\frac{a}{x}$小时

所获得的利润为 $100\left(5x+1-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{a}{x}$

所以生产 a 千克该产品所获得的利润为 $100a\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$ 元

（2）生产 900 千克该产品，获得的利润为 $90000\left(5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)$，

1≤x≤10,记f （x）$=-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+5, 1\le x\le 10$

则f （x）$=-3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}+5$,当且仅当$x=6$时取到最大值。

获得最大利润 $90000\times\frac{61}{12}=457500$ 元。

因此甲厂应以 6 千克/小时的速度生产，可获得最大利润 457500 元。

21. 解：（1）f （x）$=2\sin x$, F（x）= f （x）+ f $\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=2(\sin x+\cos x)$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}, F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0, F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne F\left(\frac{\pi}{4}\right), F\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ne -F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

所以，F（x）既不是奇函数也不是偶函数。

（2）f （x）$=2\sin x$,

将 y= f （x）的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，再向上平移 1 个单位后得到 $y=2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+$ 的图像，所以个gn（x）=2 $\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+$

令 $g(x)=0$,得$x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$或$x=k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\subset z)$

因为$[a, a+10\pi]$上零点个数为 21

当 a 不是零时，$a+k\pi(k\subset z)$也都不是零点，区间$[a+k\pi, a+(k+1)\pi]$上恰有两

个零点，故在$[a,a+10\pi]$上有 20 个零点。

综上，$y=g(x)$在$[a,a+10\pi]$上零点个数的所有可能值为21或20.

22.解：（1）$a_2=2,a_3=0,a_4=2$

（2）$a_2=2-|a_1|=2-a_1,a_3=2-|a_2|=2-|2-a_1|$

①当$0<a_1\le 2$时，$a_3=2-(2-a_1)=a_1$,所以$a_1^2=(2-a_1)^2$,得$a_1=1$

②当$a_1>2$ 时，

$a_3=2-(a_1-2)=4-a_1$,所以$a_1(4-a_1)=(2-a_1)^2$,得$a=2-\sqrt{2}$(舍去）或$a_1=2+\sqrt{2}$

综合①②得 $a_1=1$或$a_1=2+\sqrt{2}$

（3）假设这样的等差数列存在，那么 $a_2=2-|a_1|,a_3=2-\ |2-|a_1|\ |$

由$2a_2=a_1+a_3$得$2-a_1+|2-|a_1\ \|=2|a_1|(*)$

以下分情况讨论：

① 当$a_1>2$ 时，由（*）得 $a_1=0$,与$a_1>2$ 矛盾

② 当 $0<a_1\leqslant 2$ 时，有（*）得$a_1=1$，从而$a_n=1(n=1,2,...)$

所以$\{a_n\}$是一个的等差数列

③ 当$a_1\leqslant 0$ 时，则公差$d=a_2-a_1=(a_1+2)-a_1=2>0$，因此存在

m≧2 使得$a_m=a_1+2(m-1)>2$.此时$d=a_{m+1}-a_m=2-|a_m|-a_m$

<0，矛盾

综合①②③可知，当且仅当

$a_1=1$时，$a_1,a_2,a_3......$构成等差数列

23．解：（1）C_1的左焦点为$F(-\sqrt{3},0)$，过 F 的直线 $x=-\sqrt{3}$与 C_1交于$(-\sqrt{3},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$，

与 C_2 交于$(-\sqrt{3},\pm(\sqrt{3}+1))$，故 C_1 的左焦点为“C_1-C_2 型点”，且直线可以为$x=-\sqrt{3}$；

（2）直线$y=kx$与 C_2有交点，则

$$\begin{cases} y=kx \\ |y|=|x|+1 \end{cases}\Rightarrow(|k|-1)|x|=1$$，若方程组有解，则必须$|k|>1$；

直线$y=kx$与 C_2有交点，则

$$\begin{cases} y=kx \\ x^2-2y^2=2 \end{cases}\Rightarrow(1-2k^2)x^2=2$$，若方程组有解，则必须$k^2<\frac{1}{2}$

故直线$y=kx$至多与曲线 C_1 和 C_2 中的一条有交点，即原点不是“C_1-C_2 型点”。

（3）显然过圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内一点的直线l若与曲线 C_1 有交点，则斜率必存在；

根据对称性，不妨设直线l斜率存在且与曲线 C_2 交于点$(t,t+1)(t\ge 0)$，则

$l:y=(t+1)=k(x-t)\Rightarrow kx-y+(1+t-kt)=0$

直线l与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内部有交点，故$\frac{|1+t-kt|}{\sqrt{k^2+1}}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

化简得，$(1+t-tk)^2<\frac{1}{2}(k^2+1)$。。。。。。。。。。。①

若直线l与曲线 C1 有交点，则

$$\begin{cases} y=kx-kt+t+1 \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (k^2-\frac{1}{2})x^2+2k(1+t-kt)x+(1+t-kt)^2+1=0$$

$$\Delta=4k^2(1+t-kt)^2-4(k^2-\frac{1}{2})[(1+t-kt)^2+1]\geq 0 \Rightarrow (1+t-kt)^2\geq 2(k^2-1)$$

化简得，$(1+t-kt)^2\geq 2(k^2-1)$。。。。。②

由①②得，$2(k^2-1)\leq(1+t-tk)^2<\frac{1}{2}(k^2+1)\Rightarrow k^2<1$

但此时，因为$t\geq 0,[1+t(1-k)]^2\geq 1,\frac{1}{2}(k^2+1)<1$，即①式不成立；

当$k^2=\frac{1}{2}$时，①式也不成立

综上，直线l若与圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内有交点，则不可能同时与曲线 C1 和 C2 有交点，

即圆$x^2+y^2=\frac{1}{2}$内的点都不是“C1-C2 型点” .