2016年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)数学理

一、选择题

1.已知集合A={1，2，3，4}，B={y|y=3x-2，x∈A}，则A∩B=(　　)

A.{1}

B.{4}

C.{1，3}

D.{1，4}

解析：把x=1，2，3，4分别代入y=3x-2得：y=1，4，7，10，即B={1，4，7，10}，

∵A={1，2，3，4}，∴A∩B={1，4}.

答案：D.

2.设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y+2\geq 0,\\2x+3y-6\geq 0,\\3x+2y-9\leq 0,\end{cases}$则目标函数z=2x+5y的最小值为(　　)

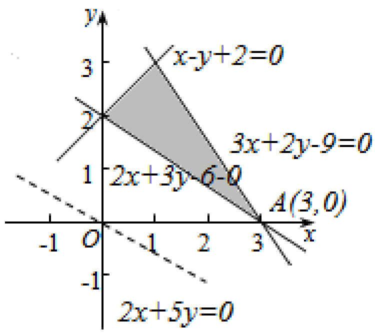
A.-4

B.6

C.10

D.17

解析：作出不等式组$\begin{cases}x-y+2\geq 0,\\2x+3y-6\geq 0,\\3x+2y-9\leq 0,\end{cases}$表示的可行域，如图中三角形的区域，



作出直线l0：2x+5y=0，图中的虚线，

平移直线l0，可得经过点(3，0)时，z=2x+5y取得最小值6.

答案：B.

3.在△ABC中，若AB=$\sqrt{13}$，BC=3，∠C=120°，则AC=(　　)

A.1

B.2

C.3

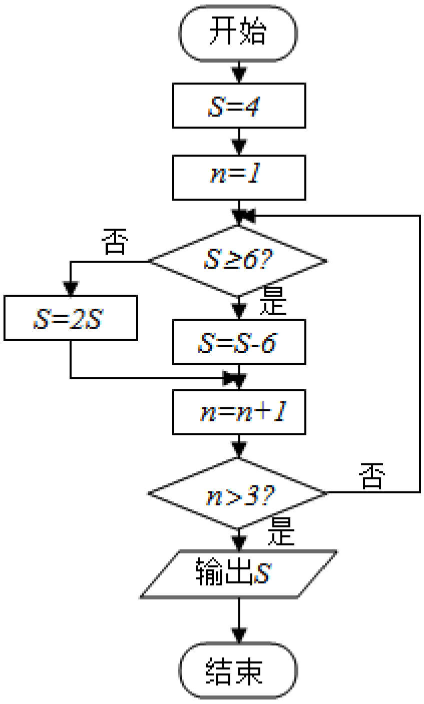
D.4

解析：在△ABC 中，若 AB=$\sqrt{13}$，BC=3，∠C=120°，$AB^2=BC^2+AC^2-2AC\cdot BC\cos C$，

可得：$13=9+AC^2+3AC$，解得 AC=1 或 AC=-4(舍去).

答案：A.

4.阅读如图的程序图，运行相应的程序，则输出 S 的值为(　　)



A.2

B.4

C.6

D.8

解析：第一次判断后：不满足条件，S=2×4=8，n=2，i＞4，

第二次判断不满足条件 n＞3：

第三次判断满足条件：S＞6，此时计算 S=8-6=2，n=3，

第四次判断 n＞3 不满足条件，

第五次判断 S＞6 不满足条件，S=4.n=4，

第六次判断满足条件 n＞3，故输出 S=4.

答案：B.

5.设$\{a_n\}$是首项为正数的等比数列，公比为 q，则“q＜0”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}$＜0”的(　　)

A.充要条件

B.充分而不必要条件

C.必要而不充分条件

D.既不充分也不必要条件

解析：$\{a_n\}$是首项为正数的等比数列，公比为 q，

若“q＜0”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}$＜0”不一定成立，

例如：当首项为2，q=$-\frac{1}{2}$时，各项为2，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$，…，此时2+(-1)=1＞0，$\frac{1}{2}+(-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}$＞0；

而“对任意的正整数n，$a_{2n-1}+a_{2n}$＜0”，前提是“q＜0”，

则“q＜0”是“对任意的正整数n，$a_{2n-1}+a_{2n}$＜0”的必要而不充分条件.

答案：C.

6.已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1$(b＞0)，以原点为圆心，双曲线的实半轴长为半径长的圆与双曲线的两条渐近线相交于A，B，C，D四点，四边形ABCD的面积为2b，则双曲线的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{3y^2}{4}=1$

B. $\frac{x^2}{4}-\frac{4y^2}{3}=1$

C. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

D. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

解析：以原点为圆心，双曲线的实半轴长为半径长的圆的方程为x2+y2=4，双曲线的两条渐近线方程为y=±$\frac{b}{2}$x，

设A(x，$\frac{b}{2}$x)，则∵四边形ABCD的面积为2b，∴2x•bx=2b，∴x=±1

将A(1，$\frac{b}{2}$)代入$x^2+y^2=4$，可得$1+\frac{b^2}{4}=4$，∴$b^2=12$，∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

答案：D.

7.已知△ABC是边长为1的等边三角形，点D、E分别是边AB、BC的中点，连接DE并延长到点F，使得DE=2EF，则$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为(　　)

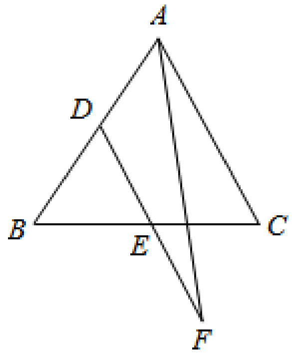
A. $-\frac{5}{8}$

B. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\dfrac{11}{8}$

解析：如图，



∵D、E 分别是边 AB、BC 的中点，且 DE=2EF，

$$\therefore \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$=\left(-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

$$=-\frac{5}{4}\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos 60^\circ+\frac{3}{4}\times 1^2$$

$$=-\frac{5}{4}\times 1\times 1\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

答案：B.

8. 已知函数 f(x)= $\begin{cases} x^2+(4a-3)x+3a, & x<0, \\ \log a(x+1)+1, & x\geq 0, \end{cases}$ (a＞0，且 a≠1)在 R 上单调递减，且关于 x 的方程|f(x)|=2-x 恰好有两个不相等的实数解，则 a 的取值范围是(　　)

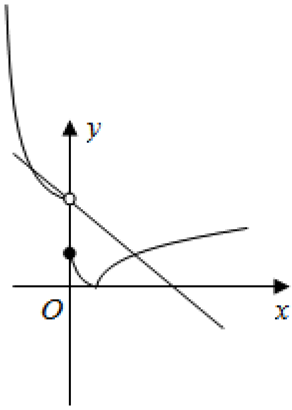
A. (0，$\dfrac{2}{3}$]

B. [$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{4}$]

C. [$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$]∪{$\dfrac{3}{4}$}

D. [$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$)∪{$\dfrac{3}{4}$}

解析：y=loga(x+1)+在[0，+∞)递减，则 0＜a＜1，



函数 f(x)在 R 上单调递减，则：$\begin{cases}\dfrac{3-4a}{2}\geq 0,\\ 0<a<1,\\ 0^2+(4a-3)\cdot 0+3a\geq \log_a(0+1)+1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{3}$ ≤a≤ $\frac{3}{4}$；

由图象可知，在[0，+∞)上，|f(x)|=2-x 有且仅有一个解，

故在(-∞，0)上，|f(x)|=2-x 同样有且仅有一个解，

当 3a＞2 即 a＞ $\frac{2}{3}$ 时，联立|x^2+(4a-3)+3a|=2-x，

则△=$(4a-2)^2$-4(3a-2)=0，解得 a=$\frac{3}{4}$ 或 1(舍去)，

当 1≤3a≤2 时，由图象可知，符合条件，

综上：a 的取值范围为[$\frac{1}{3}$， $\frac{2}{3}$]∪{$\frac{3}{4}$}.

答案：C.

二、填空题

9. 已知 a，b∈R，i 是虚数单位，若(1+i)(1-bi)=a，则 $\frac{a}{b}$ 的值为_________.

解析：∵(1+i)(1-bi)=1+b+(1-b)i=a，a，b∈R，∴$\begin{cases}1+b=a,\\ 1-b=0,\end{cases}$解得：$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\end{cases}$ ∴$\frac{a}{b}$=2.

答案：2

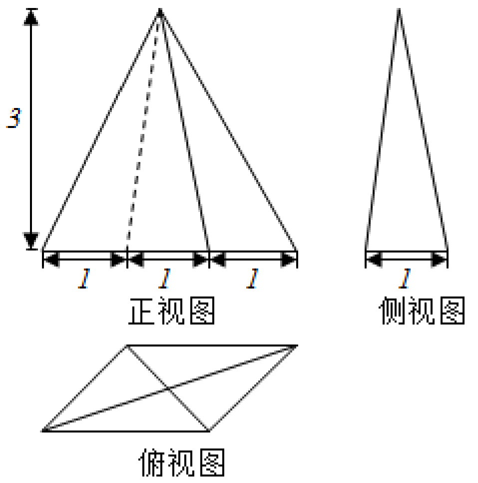
10. $(x^2-\frac{1}{x})^8$的展开式中 x^7 的系数为_________(用数字作答)

解析：$T_{r+1}=C_8^r\,(x^2)^{8-r}(-1x)^r=(-1)^r C_8^r\,x^{16-3r}$，

令 16-3r=7，解得 r=3. ∴$(x^2-\frac{1}{x})^8$的展开式中 x^7 的系数为$(-1)^3C_8^3$=-56.

答案：-56.

11.已知一个四棱锥的底面是平行四边形，该四棱锥的三视图如图所示(单位：m)，则该四棱锥的体积为__________m^3.



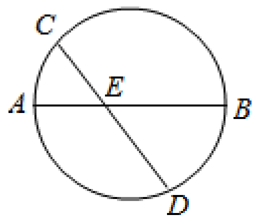
解析：由已知中的三视图可得：该几何体是一个以俯视图为底面的四棱锥，

棱锥的底面是底为2，高为1的平行四边形，故底面面积 $S=2\times1=2m^2$，

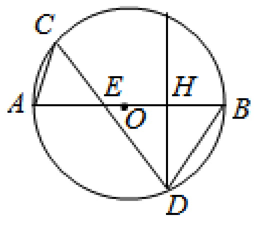
棱锥的高 h=3m，故体积 $V=\frac{1}{3}Sh=2m^3$，

答案：2

12.如图，AB 是圆的直径，弦 CD 与 AB 相交于点 E，BE=2AE=2，BD=ED，则线段 CE 的长为__________.



解析：如图，过 D 作 DH⊥AB 于 H，



∵BE=2AE=2，BD=ED，

∴BH=HE=1，则 AH=2，BH=1，∴$DH^2=AH\cdot BH=2$，则 $DH=\sqrt{2}$，

在 Rt△DHE 中，则 $DE=\sqrt{DH^2+HE^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，

由相交弦定理可得：CE·DE=AE·EB，

∴$CE=\frac{AE\cdot EB}{DE}=\frac{1\times2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案：$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

13. 已知 f(x)是定义在 R 上的偶函数，且在区间(-∞，0)上单调递增，若实数 a 满足 $f(2^{|a-1|})$ >$f(-\sqrt{2})$，则 a 的取值范围是_________.

解析：∵f(x)是定义在 R 上的偶函数，且在区间(-∞，0)上单调递增，
∴f(x)在区间(0，+∞)上单调递减，

则 $f(2^{|a-1|})>f(-\sqrt{2})$，等价为 $f(2^{|a-1|})>f(\sqrt{2})$，

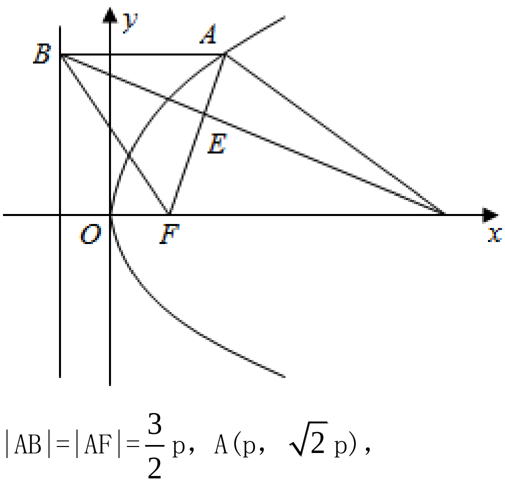
即$-\sqrt{2}<2|a-1|<\sqrt{2}$，则$|a-1|<\dfrac{1}{2}$，即$\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{3}{2}$.

答案：($\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$)

14. 设抛物线$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$(t 为参数，p>0)的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B，设 C($\dfrac{7}{2}$p，0)，AF 与 BC 相交于点 E. 若|CF|=2|AF|，且△ACE 的面积为 $3\sqrt{2}$，则 p 的值为_________.

解析：抛物线$\begin{cases}x=2pt^2,\\ y=2pt\end{cases}$(t 为参数，p>0)的普通方程为：$y^2=2px$ 焦点为 F($\dfrac{p}{2}$，0)，

如图：过抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B，设 C($\dfrac{7}{2}$p，0)，AF 与 BC 相交于点 E.



|CF|=2|AF|，|CF|=3p，|AB|=|AF|=$\dfrac{3}{2}$p，A(p，$\sqrt{2}$p)，

△ACE 的面积为 $3\sqrt{2}$，$\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{AB}{CF}=\dfrac{1}{2}$，

可得$\dfrac{1}{3}S_{\triangle AFC}=S_{\triangle ACE}$. 即：$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times3p\times\sqrt{2}p=3\sqrt{2}$，解得 $p=\sqrt{6}$.

答案：$\sqrt{6}$.

三、计算题

15.已知函数 $f(x)=4\tan x\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$.

(1)求 f(x)的定义域与最小正周期;

(2)讨论 f(x)在区间$[-\frac{\pi}{4}，\frac{\pi}{4}]$上的单调性.

解析：(1)利用三角函数的诱导公式以及两角和差的余弦公式，结合三角函数的辅助角公式进行化简求解即可.

(2)利用三角函数的单调性进行求解即可.

答案：(1)∵$f(x)=4\tan x\sin(\frac{\pi}{2}-x)\cos(x-\frac{\pi}{3})-\sqrt{3}$.

∴$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，即函数的定义域为$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\}$，

则 $f(x)=4\tan x\cos x\cdot(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\sqrt{3}$

$=2\sin x(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)-\sqrt{3}$

$=\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}$

$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)-\sqrt{3}$

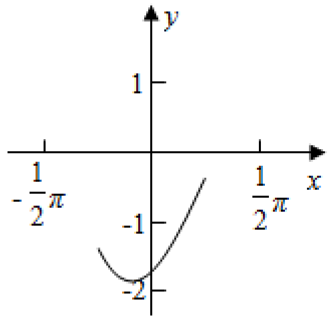
$=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$

则函数的周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$；

(2)由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in Z$，即函数的增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{12}，k\pi+\frac{5\pi}{12}]$，$k\in Z$，



当 k=0 时，增区间为[$-\frac{\pi}{12}$，$\frac{5\pi}{12}$]，k∈Z，

∵x∈[$-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$]，∴此时 x∈[$-\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4}$]，

由 2kπ+$\frac{\pi}{2}$≤2x−$\frac{\pi}{3}$≤2kπ+$\frac{3\pi}{2}$，k∈Z，

得 kπ+$\frac{5\pi}{12}$≤x≤kπ+$\frac{11\pi}{12}$，k∈Z，即函数的减区间为[kπ+$\frac{5\pi}{12}$，kπ+$\frac{11\pi}{12}$]，k∈Z，

当 k=−1 时，减区间为[$-\frac{7\pi}{12}$，$-\frac{\pi}{12}$]，k∈Z，

∵x∈[$-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$]，∴此时 x∈[$-\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{12}$]，

即在区间[$-\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}$]上，函数的减区间为∈[$-\frac{\pi}{4}$，$-\frac{\pi}{12}$]，增区间为[$-\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{4}$].

16. 某小组共 10 人，利用假期参加义工活动，已知参加义工活动次数为 1，2，3 的人数分别为 3，3，4，现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 A 为事件“选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4”，求事件 A 发生的概率；

(2) 设 X 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

解析：(1) 选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4 为事件 A，求出选出的 2 人参加义工活动次数之和的所有结果，即可求解概率. 则 P(A).

(2) 随机变量 X 的可能取值为 0，1，2，3 分别求出 P(X=0)，P(X=1)，P(X=2)，P(X=3) 的值，由此能求出 X 的分布列和 EX.

答案：(1) 从 10 人中选出 2 人的选法共有 C_{10}^2=45 种，

事件 A：参加次数的和为 4，情况有：①1 人参加 1 次，另 1 人参加 3 次，②2 人都参加 2 次；

共有 $C_3^1C_4^1+C_3^2$=15 种，

∴事件 A 发生概率：P=$C_3^1C_4^1+C_3^2C_{10}^2=\frac{1}{3}$.

(Ⅱ) X 的可能取值为 0，1，2.

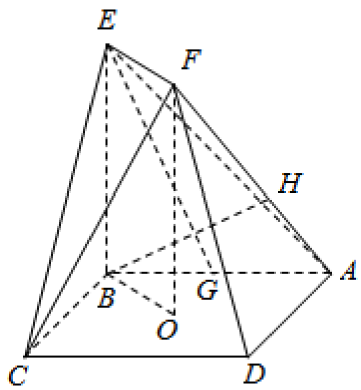
P(X=0)=$C_3^2+C_3^2+C_4^2C_{10}^2=\frac{4}{15}$，

P(X=1)=$\frac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$， P(X=2)=$\frac{C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$，∴X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

∴EX=$0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{4}{15}$=1.

17.如图，正方形 ABCD 的中心为 O，四边形 OBEF 为矩形，平面 OBEF⊥平面 ABCD，点 G 为 AB 的中点，AB=BE=2.



(1)求证：EG∥平面 ADF;
(2)求二面角 O-EF-C 的正弦值;
(3)设 H 为线段 AF 上的点，且 AH=$\frac{2}{3}$HF，求直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.

解析：(1)取 AD 的中点 I，连接 FI，证明四边形 EFIG 是平行四边形，可得 EG∥FI，利用线面平行的判定定理证明：EG∥平面 ADF;
(2)建立如图所示的坐标系 O-xyz，求出平面 OEF 的法向量，平面 OEF 的法向量，利用向量的夹角公式，即可求二面角 O-EF-C 的正弦值;
(3)求出 $\overrightarrow{BH}$=(-$\frac{3\sqrt{2}}{5}$，$\sqrt{2}$，$\frac{4}{5}$)，利用向量的夹角公式求出直线 BH 和平面 CEF 所成角的正弦值.

答案：(1)取 AD 的中点 I，连接 FI，
∵矩形 OBEF，∴EF∥OB，EF=OB，
∵G，I 是中点，∴GI∥BD，GI=$\frac{1}{2}$BD.
∵O 是正方形 ABCD 的中心，∴OB=$\frac{1}{2}$BD. ∴EF∥GI，EF=GI，
∴四边形 EFIG 是平行四边形，∴EG∥FI，
∵EG⊄平面 ADF，FI⊂平面 ADF，∴EG∥平面 ADF.

(2)建立如图所示的坐标系 O-xyz，则 B(0，-$\sqrt{2}$，0)，C($\sqrt{2}$，0，0)，E(0，-$\sqrt{2}$，2)， F(0，0，2)，

设平面CEF的法向量为$\vec{m}$=(x，y，z)，则$\begin{cases}\sqrt{2}y=0,\\-\sqrt{2}x+2z=0,\end{cases}$取$\vec{m}$=($\sqrt{2}$，0，1)

∵OC⊥平面OEF，∴平面OEF的法向量为$\vec{n}$=(1，0，0)，

∵|cos＜$\vec{m}$，$\vec{n}$＞|=$\frac{\sqrt{6}}{3}$，∴二面角O-EF-C的正弦值为$\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(3)AH=$\frac{2}{3}$HF，∴$\overrightarrow{AH}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AF}$=($\frac{2\sqrt{2}}{5}$，0，$\frac{4}{5}$)．

设H(a，b，c)，则$\overrightarrow{AH}$=(a+$\sqrt{2}$，b，c)=($\frac{2\sqrt{2}}{5}$，0，$\frac{4}{5}$)．

∴a=$-\frac{3\sqrt{2}}{5}$，b=0，c=$\frac{4}{5}$，∴BH=($-\frac{3\sqrt{2}}{5}$，$\sqrt{2}$，$\frac{4}{5}$)，

∴直线BH和平面CEF所成角的正弦值=|cos＜$\overrightarrow{BH}$，$\vec{n}$＞|=$\frac{\left|-\frac{6}{5}+\frac{4}{5}\right|}{\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{21}}{5}}=\frac{7}{21}$.

18. 已知{a_n}是各项均为正数的等差数列，公差为d，对任意的n∈N^+，b_n是a_n和a_{n+1}的等比中项.

(1)设$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$，n∈N^+，求证：数列{c_n}是等差数列；

(2)设a_1=d，$T_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k bk^2$，n∈$N^*$，求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_k}<\frac{1}{2d^2}$.

解析：(1)根据等差数列和等比数列的性质，建立方程关系，根据条件求出数列{c_n}的通项公式，结合等差数列的定义进行证明即可.

(2)求出$T_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k bk^2$的表达式，利用裂项法进行求解，结合放缩法进行不等式的证明即可.

答案：(1)∵{a_n}是各项均为正数的等差数列，公差为d，对任意的n∈N^+，b_n是a_n和a_{n+1}的等比中项.

∴$c_n=b_{n+1}^2-b_n^2$=$a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}$=$2da_{n+1}$，

∴$c_{n+1}-c_n=2d(a_{n+2}-a_{n+1})=2d^2$为定值；

∴数列{c_n}是等差数列；

(2) $T_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k bk^2$ $=c_1+c_3+\cdots+c_{2n-1}=nc_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 4d^2=nc_1+2n(n-1)d^2$，①$n\in N^*$，

由已知 $c_1=b_2^2-b_1^2=a_2a_3-a_1a_2=2da_2=2d(a_1+d)=4d^2$，

将 $c_1=4d^2$，代入①得 $T_n=n(n+1)d^2$，

∴

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_k}=\frac{1}{2d^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2d^2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k}+1)=\frac{1}{2d^2}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)<\frac{1}{2d^2}.$$

即不等式 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{T_k}<\frac{1}{2d^2}$ 成立.

19. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$ $(a>\sqrt{3})$ 的右焦点为 F，右顶点为 A. 已知 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，其中 O 为原点，e 为椭圆的离心率.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B(B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M，与 y 轴于点 H，若 BF⊥HF，且∠MOA≤∠MAO，求直线 l 的斜率的取值范围.

解析：(1) 由题意画出图形，把|OF|、|OA|、|FA|代入 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，转化为关于 a 的方程，解方程求得 a 值，则椭圆方程可求；

(2) 由已知设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$(k\neq 0)$，联立直线方程和椭圆方程，化为关于 x 的一元二次方程，利用根与系数的关系求得 B 的坐标，再写出 MH 所在直线方程，求出 H 的坐标，由 BF⊥HF，得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1, -y_1)\cdot(1, -y_H)=0$，整理得到 M 的坐标与 k 的关系，由∠MOA≤∠MAO，得到 $x_0\geqslant 1$，转化为关于 k 的等式求得 k 的值.

答案：(1) 由 $\frac{1}{|OF|}+\frac{1}{|OA|}=\frac{3e}{|FA|}$，得 $\frac{1}{a^2-3}+\frac{1}{a}=\frac{\frac{3\cdot\sqrt{a^2-3}}{a}}{a-\sqrt{a^2-3}}$，

即 $\frac{a+\sqrt{a^2-3}}{a\sqrt{a^2-3}}=\frac{3\sqrt{a^2-3}}{a\left(a-\sqrt{a^2-3}\right)}$，

∴$a[a^2-(a^2-3)]=3a(a^2-3)$，解得 $a=2$. ∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由已知设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$，$(k\neq 0)$，

设 $B(x_1, y_1)$，$M(x_0, k(x_0-2))$，

∵∠MOA≤∠MAO，∴$x_0\geqslant 1$，再设 $H(0, y_H)$，

联立$\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2-16k^2x+16k^2-12=0$.

$\triangle=(-16k^2)^2-4(3+4k^2)(16k^2-12)=144>0$.

由根与系数的关系得 $2x_1=\dfrac{16k^2-12}{3+4k^2}$，$\therefore x_1=\dfrac{8k^2-6}{3+4k^2}$，$y_1=k(x_1-2)=\dfrac{-12k}{3+4k^2}$，

MH 所在直线方程为 $y-k(x_0-2)=-\dfrac{1}{k}(x-x_0)$，

令 $x=0$，得 $y_H=(k+\dfrac{1}{k})x_0-2k$，

$\because BF\perp HF$，$\therefore \overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{HF}=(1-x_1，-y_1)\cdot(1，-y_H)=0$，

即 $1-x_1+y_1y_H=1-\dfrac{8k^2-6}{3+4k^2}-\dfrac{12k}{3+4k^2}[(k+\dfrac{1}{k})x_0-2k]=0$，

整理得：$x_0=\dfrac{9+20k^2}{12(k^2+1)}\geqslant 1$，即 $8k^2\leqslant 3$. $\therefore k\leqslant -\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $k\geqslant\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

20.设函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$，$x\in R$，其中 a，$b\in R$.

(1)求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $f(x)$存在极值点 x_0，且 $f(x1)=f(x_0)$，其中 $x_1\neq x_0$，求证：$x_1+2x_0=3$；

(3)设 $a>0$，函数 $g(x)=|f(x)|$，求证：$g(x)$在区间[0，2]上的最大值不小于$\dfrac{1}{4}$.

解析：(1)求出 $f(x)$的导数，讨论 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在 R 上递增；当 $a>0$ 时，由导数大于 0，可得增区间；导数小于 0，可得减区间；

(2)$f'(x_0)=0$，可得 $3(x_0-1)2=a$，分别计算 $f(x_0)$，$f(3-2x_0)$，化简整理即可得证；

(3)要证 $g(x)$在区间[0,2]上的最大值不小于$\dfrac{1}{4}$,即证在[0,2]上存在 x_1,x_2,使得 $g(x_1)-g(x_2)\geqslant\dfrac{1}{2}$.讨论当 $a\geqslant 3$ 时，当 $0<a<3$ 时，运用单调性和极值，化简整理即可得证.

答案：(1)函数 $f(x)=(x-1)^3-ax-b$ 的导数为

$f'(x)=3(x-1)^2-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在 R 上递增；

当 $a>0$ 时，当 $x>1+\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 或 $x<1-\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 时，$f'(x)>0$，

当 $1-\sqrt{\dfrac{a}{3}}<x<1+\sqrt{\dfrac{a}{3}}$，$f'(x)<0$，

可得 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, 1-\sqrt{\frac{a}{3}})$，$(1+\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty)$，减区间为 $(1-\sqrt{\frac{a}{3}}, 1+\sqrt{\frac{a}{3}})$；

(2)证明：$f'(x_0)=0$，可得 $3(x_0-1)^2=a$，

由 $f(x_0)=(x_0-1)^3-3x_0(x_0-1)^2-b=(x_0-1)^2(-2x_0-1)-b$，

$f(3-2x_0)=(2-2x_0)^3-3(3-2x_0)(x_0-1)^2-b$

$=(x_0-1)^2(8-8x_0-9+6x_0)-b=(x_0-1)^2(-2x_0-1)-b$，

即为 $f(3-2x_0)=f(x_0)=f(x_1)$，即有 $3-2x_0=x_1$，即为 $x_1+2_{x_0}=3$.

(3)证明：要证 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$，

即证在 $[0, 2]$ 上存在 x_1，x_2，使得 $g(x_1)-g(x_2)\geqslant\frac{1}{2}$.

当 $a\geqslant3$ 时，$f(x)$ 在 $[0, 2]$ 递减，$f(2)=1-2a-b$，$f(0)=-1-b$，

$f(0)-f(2)=2a-2\geqslant4>\frac{1}{2}$，递减，成立；

当 $0<a<3$ 时，

$$f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})=(-\sqrt{\frac{a}{3}})^3-a(1-\sqrt{\frac{a}{3}})-b=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a\sqrt{\frac{a}{3}}+a-b=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b,$$

$$f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})=(\sqrt{\frac{a}{3}})^3-a(1+\sqrt{\frac{a}{3}})-b=\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-a\sqrt{\frac{a}{3}}-b=-\frac{a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}-a-b,$$

$f(2)=1-2a-b$，$f(0)=-1-b$，

$f(2)-f(0)=2-2a$，

若 $0<a\leqslant\frac{3}{4}$ 时，$f(2)-f(0)=2-2a\geqslant\frac{1}{2}$ 成立；

若 $a>\frac{4}{3}$ 时，$f(1-\sqrt{\frac{a}{3}})-f(1+\sqrt{\frac{a}{3}})=\frac{4a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}>\frac{1}{2}$ 成立.

综上可得，$g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值不小于 $\frac{1}{4}$.