绝密*启用前

2012年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

注息事项:

1.本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷和答题卡相应位置上。

2.问答第Ⅰ卷时。选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动.用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。写在本试卷上无效.

3.回答第Ⅱ卷时。将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效·

4.考试结束后.将本试卷和答且卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给同的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，则$B$中所含元素的个数为

（A）3　　（B）6　　(C) 8　　（D）10

（2）将2名教师，4名学生分成2个小组，分别安排到甲、乙两地参加社会实践活动，每个小组由1名教师和2名学生组成，不同的安排方案共有

（A）12种　　（B）10种　　(C) 9种　　（D）8种

（3）下面是关于复数$z=\dfrac{2}{-1+i}$的四个命题：

$p_1:|z|=2$，　　$p_2:z^2=2i$，

$p_3:z$的共轭复数为$1+i$，　　$p_4:z$的虚部为-1。其中的真命题为

（A）p_2，p_3　　(B) p_1，p_2　　(C) p_2，p_4　　(D) p_3，p_4

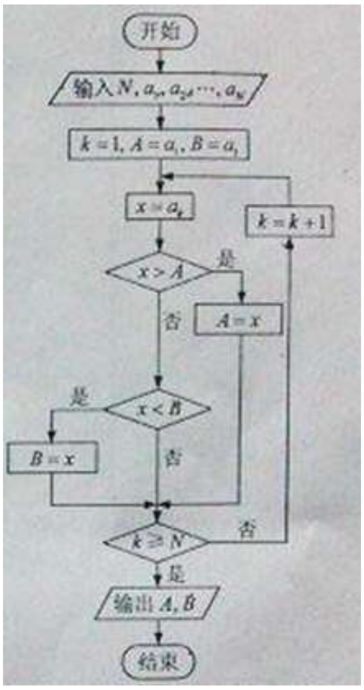
（4）设F_1、F_2是椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=(a>b>0)$的左、右焦点，$P$为直线$x=\dfrac{3a}{2}$上一点，$\Delta F_2PF_1$是底角为$30^\circ$的等腰三角形，则$E$的离心率为

（A）$\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{2}{3}$　　（C）$\dfrac{3}{4}$　　（D）$\dfrac{4}{5}$

（5）已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$（）

（A）7　　（B）5　　（C）-5　　（D）-7

（6）如果执行右边的程序框图，输入正整数 $N(N \geq 2)$ 和市属 $a_1, a_2, ..., a_N$，输出 A, B，则



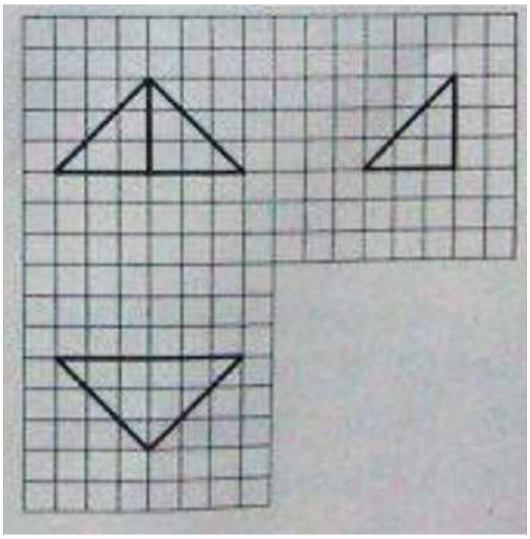
（A） $A+B$ 为 $a_1, a_2, ..., a_N$ 的和

（B） $\dfrac{A+B}{2}$ 为 $a_1, a_2, ..., a_N$ 的算术平均数

（C） A 和 B 分别是 $a_1, a_2, ..., a_N$ 中最大的数和最小的数

（D） A 和 B 分别是 $a_1, a_2, ..., a_N$ 中最小的数和最大的数

（7）如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为



（A）6

（B）9

（C）12

（D）18

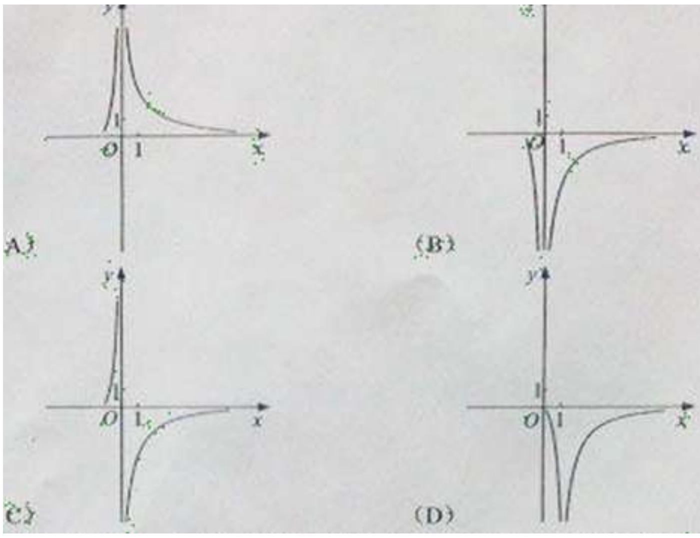
（8）等轴双曲线 C 的中心在原点，焦点在 x 轴上，C 与抛物线 $y^2 = 16x$ 的准线交于 A, B 两点，$|AB| = 4\sqrt{3}$，则 C 的实轴长为

（A） $\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）4　　（D）8

（9）已知 $\omega > 0$，函数 $f(x) = \sin(\omega x + \dfrac{\pi}{4})$ 在 $(\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递减，则 ω 的取值范围是

（A） $[\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}]$　　（B）$[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}]$　　（C）$(0, \dfrac{1}{2}]$　　（D）$(0, 2]$

(10) 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x+1)-x}$，则 $y=f(x)$ 的图像大致为



（11）已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上，ΔABC 是边长为1的正三角形，SC 为球 O 的直径，且 $SC=2$，则此棱锥的体积为

（A）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ （B）$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ （C）$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ （D）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（12）设点 P 在曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{x}$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为

（A）$1-\ln 2$ （B）$\sqrt{2}(1-\ln 2)$ （C）$1+\ln 2$ （D）$\sqrt{2}(1+\ln 2)$

第II卷

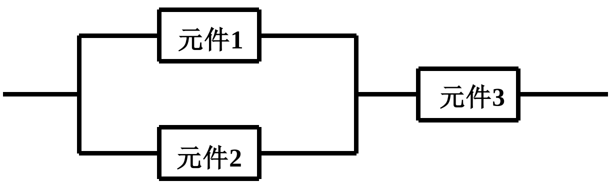
本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题-第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答，第 22-24 题为选考题，考生根据要求作答。

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分。

（13）已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为 45°，且 $|\vec{a}|=1$，$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$，则 $|\vec{b}|=$_______

(14) 设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\ge -1, \\ x+y\le 3, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的取值范围为________

（15）某个部件由三个电子元件按下图方式连接而成，元件 1 或元件 2 正常工作，且元件 3 正常工作，则部件正常工作，设三个电子元件的使用寿命（单位：小时）均服从正态分布 $N(1000,50^2)$，且各个部件能否正常相互独立，那么该部件的使用寿命超过 1000 小时的概率为________



（16）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则的前60项和为______________

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分 12 分）

已知a,b,c分别为ΔABC三个内角A,B,C的对边，$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$。

（Ⅰ）求A；

（Ⅱ）若$a=2$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，求b,c。

（18）（本小题满分 12 分）

某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花，然后以每枝 10 元的价格出售。如果当天卖不完，剩下的玫瑰花作垃圾处理。

（Ⅰ）若花店一天购进 16 枝玫瑰花，求当天的利润y(单位：元)关于当天需求量n（单位：枝，$n\in N$）的函数解析式。

（Ⅱ）花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量（单位：枝），整理得下表：

日需求量n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

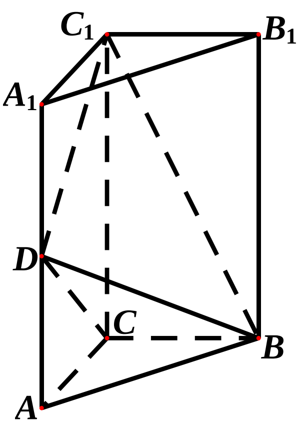
以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率。

（ⅰ）若花店一天购进 16 枝玫瑰花，X表示当天的利润（单位：元），求X的分布列、数学期望及方差；

（ⅱ）若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花，你认为应购进 16 枝还是 17 枝？请说明理由。

（19）（本小题满分 12 分）

如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$，D是棱AA_1的中点，$DC_1\perp BD$。



（Ⅰ）证明：$DC_1\perp BC$

（Ⅱ）求二面角A_1-BD-C_1的大小。

（20）（本小题满分 12 分）

设抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，准线为l，A为C上一点，已知以F为圆心，FA为半径的圆F交l于B,D两点。

（Ⅰ）若$\angle BFD=90^\circ$，ΔABD的面积为$4\sqrt{2}$，求p的值及圆F的方程；

（Ⅱ）若A,B,F三点在同一直线m上，直线n与m平行，且n与C只有一个公共点，求坐标原点到m，n距离的比值。

（21）（本小题满分 12 分）

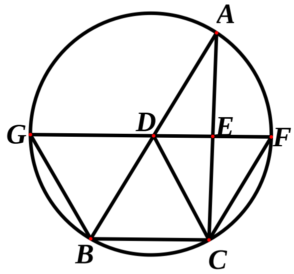
已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

（Ⅱ）若 $f(x)\geq\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值

请考生在第 22,23,24 题中任选一题做答，如果多做，则按所做的第一题计分，做答时请写清楚题号。

（22）（本小题满分 10 分）选修 4-1：几何证明选讲



如图，D,E 分别为 ΔABC 边 AB，AC 的中点，直线 DE 交 ΔABC 的外接圆于 F,G 两点。若 $CF\,//\,AB$，证明：

（Ⅰ）$CD=BC$；

（Ⅱ）$\Delta BCD \backsim \Delta GBD$。

(23)(本小题满分 10 分)选修 4—4；坐标系与参数方程

已知曲线 C_1 的参数方程是 $C_1\begin{cases}x=2\cos\varphi,\\y=3\sin\varphi,\end{cases}$ (φ 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程是 $\rho=2$，正方形 $ABCD$ 的顶点都在 C_2 上，且 A,B,C,D 依逆时针次序排列，点 A 的极坐标为 $(2,\dfrac{\pi}{3})$。

（Ⅰ）求点 A,B,C,D 的直角坐标；

（Ⅱ）设 P 为 C_1 上任意一点，求 $|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2|$ 的取值范围。

（24）（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+a|+|x-2|$。

（Ⅰ）当 $a=-3$ 时，求不等式 $f(x)\geq 3$ 的解集；

（Ⅱ）若 $f(x)\leq|x-4|$ 的解集包含 $[1,2]$，求 a 的取值范围。

2012年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学试题答案

一．选择题

(1) D　(2) A　(3) C　(4) C　(5) D　(6) C

(7) B　(8) C　(9) A　(10) B　(11) A　(12) B

二．填空题

(13) $3\sqrt{2}$　(14) $[-3,3]$　(15) $\frac{3}{8}$　(16) 1 830

三．解答题

(17) 解：

(Ⅰ) 由 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$ 及正弦定理得

$$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0.$$

因为 $B=\pi-A-C$，所以

$$\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0.$$

由于 $\sin C\neq 0$，所以 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

又 $0<A<\pi$，故　$A=\frac{\pi}{3}$.

(Ⅱ) $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，故 $bc=4$.

而　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，故 $b^2+c^2=8$.

解得　$b=c=2$.

(18) 解：

(Ⅰ) 当日需求量 $n\geqslant 16$ 时，利润　$y=80$.

当日需求量 $n<16$ 时，利润　$y=10n-80$.

所以 y 关于 n 的函数解析式为

$$y=\begin{cases}10n-80, & n<16,\\ 80, & n\geqslant 16,\end{cases}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

（Ⅱ）（ⅰ）X可能的取值为 60，70，80，并且

$$P(X=60)=0.1,\ P(X=70)=0.2,\ P(X=80)=0.7.$$

X的分布列为

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

X的数学期望为

$$EX=60\times0.1+70\times0.2+80\times0.7=76.$$

X的方差为

$$DX=(60-76)^2\times0.1+(70-76)^2\times0.2+(80-76)^2\times0.7=44.$$

（ⅱ）答案一：

花店一天应购进 16 枝玫瑰花. 理由如下：

若花店一天购进 17 枝玫瑰花，Y表示当天的利润（单位：元），那么Y的分布列为

Y	55	65	75	85
P	0.1	0.2	0.16	0.54

Y的数学期望为

$$EY=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.16+85\times0.54=76.4.$$

Y的方差为

$$DY=(55-76.4)^2\times0.1+(65-76.4)^2\times0.2+(75-76.4)^2\times0.16+(85-76.4)^2\times0.54$$
$$=112.04.$$

由以上的计算结果可以看出，$DX<DY$，即购进 16 枝玫瑰花时利润波动相对较小. 另外，虽然$EX<EY$，但两者相差不大. 故花店一天应购进 16 枝玫瑰花.

答案二：

花店一天应购进 17 枝玫瑰花. 理由如下：

若花店一天购进 17 枝玫瑰花，Y表示当天的利润（单位：元），那么Y的分布列为

Y	55	65	75	85
P	0.1	0.2	0.16	0.54

Y的数学期望为

$$EY=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.16+85\times0.54=76.4.$$

由以上的计算结果可以看出，$EX<EY$，即购进 17 枝玫瑰花时的平均利润大于购进 16 枝时的平均利润. 故花店一天应购进 17 枝玫瑰花.

(19) 解:

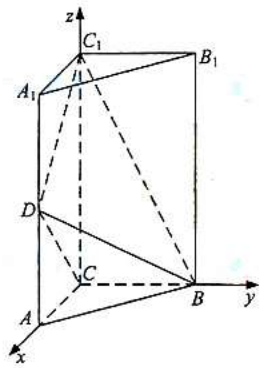
(Ⅰ) 由题设知，三棱柱的侧面为矩形. 由于 D 为 AA_1 的中点，故 $DC=DC_1$.

又 $AC=\frac{1}{2}AA_1$，可得 $DC_1^2+DC^2=CC_1^2$，所以 $DC_1\perp DC$.

而 $DC_1\perp BD$，$DC\cap BD=D$，所以 $DC_1\perp$平面 BCD.

$BC\subset$平面 BCD，故 $DC_1\perp BC$.

(Ⅱ) 由 (Ⅰ) 知 $BC\perp DC_1$，且 $BC\perp CC_1$，则 $BC\perp$平面 ACC_1，所以 CA, CB, CC_1 两两相互垂直.



以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴的正方向，$|\overrightarrow{CA}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$.

由题意知 $A_1(1,0,2)$，$B(0,1,0)$，$D(1,0,1)$，$C_1(0,0,2)$.

则 $\overrightarrow{A_1D}=(0,0,-1)$，$\overrightarrow{BD}=(1,-1,1)$，$\overrightarrow{DC_1}=(-1,0,1)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 A_1B_1BD 的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x-y+z=0,\\ z=0.\end{cases}$$

可取 $\boldsymbol{n}=(1,1,0)$.

同理，设 $\boldsymbol{m}$ 是平面 C_1BD 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0.\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(1,2,1)$.

从而 $$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故二面角 A_1-BD-C_1 的大小为 $30°$.

(20) 解:

(Ⅰ) 由已知可得 $\triangle BFD$ 为等腰直角三角形，$|BD|=2p$，圆 F 的半径 $|FA|=\sqrt{2}p$.

由抛物线定义可知 A 到 l 的距离 $d=|FA|=\sqrt{2}p$.

因为 $\triangle ABD$ 的面积为 $4\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{2}|BD|\cdot d=4\sqrt{2}$，即 $\frac{1}{2}\cdot 2p\cdot\sqrt{2}p=4\sqrt{2}$，

解得 $p=-2$（舍去），$p=2$.

所以 $F(0,1)$，圆 F 的方程为

$$x^2+(y-1)^2=8.$$

(Ⅱ) 因为 A，B，F 三点在同一直线 m 上，所以 AB 为圆 F 的直径，$\angle ADB=90°$.

由抛物线定义知

$$|AD|=|FA|=\frac{1}{2}|AB|,$$

所以 $\angle ABD=30°$，m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 m 的斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，由已知可设 n：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+b$，代入 $x^2=2py$ 得

$$x^2-\frac{2\sqrt{3}}{3}px-2pb=0.$$

由于 n 与 C 只有一个公共点，故 $\Delta=\frac{4}{3}p^2+8pb=0$．解得 $b=-\frac{p}{6}$.

因为 m 的截距 $b_1=\frac{p}{2}$，$\frac{|b_1|}{|b|}=3$，所以坐标原点到 m，n 距离的比值为 3.

当 m 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，由图形对称性可知，坐标原点到 m，n 距离的比值为 3.

（21）解：

（Ⅰ）由已知得 $f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$．所以 $f'(1)=f'(1)-f(0)+1$，即 $f(0)=1$.

又 $f(0)=f'(1)e^{-1}$，所以 $f'(1)=e$.

从而 $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$.

由于 $f'(x)=e^x-1+x$，故当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

从而，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

（Ⅱ）由已知条件得

$$e^x-(a+1)x\geqslant b. \quad ①$$

（i）若 $a+1<0$，则对任意常数 b，当 $x<0$，且 $x<\frac{1-b}{a+1}$ 时，可得 $e^x-(a+1)x<b$，因此①式不成立.

（ii）若 $a+1=0$，则 $(a+1)b=0$.

（iii）若 $a+1>0$，设 $g(x)=e^x-(a+1)x$，则 $g'(x)=e^x-(a+1)$.

当 $x\in(-\infty,\ln(a+1))$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(\ln(a+1),+\infty)$ 时，$g'(x)>0$.

从而 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 单调递增.

故 $g(x)$ 有最小值 $g(\ln(a+1))=a+1-(a+1)\ln(a+1)$.

所以 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$ 等价于

$$b\leqslant a+1-(a+1)\ln(a+1). \quad ②$$

因此 $\quad (a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$.

设 $\quad h(a)=(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$，则 $h'(a)=(a+1)(1-2\ln(a+1))$.

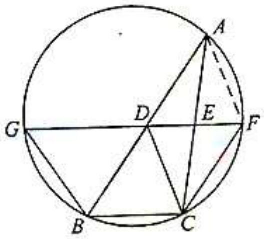
所以 $h(a)$ 在 $(-1,e^{\frac{1}{2}}-1)$ 单调递增，在 $(e^{\frac{1}{2}}-1,+\infty)$ 单调递减，故 $h(a)$ 在 $a=e^{\frac{1}{2}}-1$ 处取得最大值．从而 $h(a)\leqslant\frac{e}{2}$，即 $(a+1)b\leqslant\frac{e}{2}$.

当 $a=e^{\frac{1}{2}}-1,\ b=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$ 时，②式成立，故 $f(x)\geqslant\frac{1}{2}x^2+ax+b$.

综合得，$(a+1)b$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

（22）证明：

（Ⅰ）因为 D, E 分别为 AB, AC 的中点，所以 $DE//BC$．又已知 $CF//AB$，故四边形 $BCFD$ 是平行四边形，所以 $CF=BD=AD$．而 $CF//AD$，连结 AF，所以 $ADCF$ 是平行四边形，故 $CD=AF$．



因为 $CF//AB$，所以 $BC=AF$，故 $CD=BC$．

（Ⅱ）因为 $FG//BC$，故 $GB=CF$．

由（Ⅰ）可知 $BD=CF$，所以 $GB=BD$．

而 $\angle DGB=\angle EFC=\angle DBC$，故 $\triangle BCD \backsim \triangle GBD$．

（23）解：

（Ⅰ）由已知可得

$$A(2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}),\quad B(2\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}), 2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2})),$$

$$C(2\cos(\frac{\pi}{3}+\pi),\ 2\sin(\frac{\pi}{3}+\pi)), D(2\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}),\ 2\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2})),$$

即 $$A(1,\sqrt{3}),\quad B(-\sqrt{3},1),\quad C(-1,-\sqrt{3}),\quad D(\sqrt{3},-1).$$

（Ⅱ）设 $P(2\cos\varphi, 3\sin\varphi)$，令 $S=|PA|^2+|PB|^2+|PC|^2+|PD|^2$，则

$$S=16\cos^2\varphi+36\sin^2\varphi+16$$
$$=32+20\sin^2\varphi.$$

因为 $0\leqslant\sin^2\varphi\leqslant 1$，所以 S 的取值范围是 $[32,52]$．

（24）解：

（Ⅰ）当 $a=-3$ 时，$f(x)=\begin{cases}-2x+5, & x\leqslant 2,\\ 1, & 2<x<3,\\ 2x-5, & x\geqslant 3.\end{cases}$

当 $x\leqslant 2$ 时，由 $f(x)\geqslant 3$ 得 $-2x+5\geqslant 3$，解得 $x\leqslant 1$；

当 $2<x<3$ 时，$f(x)\geqslant 3$ 无解；

当 $x\geqslant 3$ 时，由 $f(x)\geqslant 3$ 得 $2x-5\geqslant 3$，解得 $x\geqslant 4$；

所以 $f(x)\geqslant 3$ 的解集为 $\{x\mid x\leqslant 1\}\cup\{x\mid x\geqslant 4\}$．

（Ⅱ）$f(x)\leqslant|x-4| \Leftrightarrow |x-4|-|x-2|\geqslant|x+a|$．

当 $x\in[1,2]$ 时，$|x-4|-|x-2|\geqslant|x+a|$

$$\Leftrightarrow 4-x-(2-x)\geqslant|x+a|$$
$$\Leftrightarrow -2-a\leqslant x\leqslant 2-a.$$

由条件得 $-2-a\leqslant 1$ 且 $2-a\geqslant 2$，即 $-3\leqslant a\leqslant 0$．

故满足条件的 a 的取值范围为 $[-3,0]$．