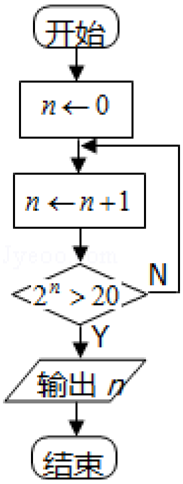
2014年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）数学

一、填空题(本大题共14小题，每小题5分，共计70分)

1.已知集合 $A=\{-2，-1，3，4\}$，$B=\{-1，2，3\}$，则 $A\cap B=$_______.
解析：∵$A=\{-2，-1，3，4\}$，$B=\{-1，2，3\}$，∴$A\cap B=\{-1，3\}$，
答案：$\{-1，3\}$

2.已知复数 $z=(5-2i)^2$(i为虚数单位)，则z的实部为________.
解析：$z=(5-2i)^2=25-10i-4=21-10i$，故z的实部为21，
答案：21

3.如图是一个算法流程图，则输出的n的值是_______.



解析：由程序框图知：算法的功能是求满足 $2^n>20$ 的最小的正整数n的值，
∵$2^4=16<20$，$2^5=32>20$，∴输出n=5.
答案：5.

4.从1,2,3,6这4个数中一次随机抽取2个数,则所取2个数的乘积为6的概率是_______.
解析：从1，2，3，6这4个数中一次随机抽取2个数的所有基本事件有(1，2)，(1，3)，(1，6)，(2，3)，(2，6)，(3，6)共6个，
所取2个数的乘积为6的基本事件有(1，6)，(2，3)共2个，故所求概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
答案：$\frac{1}{3}$.

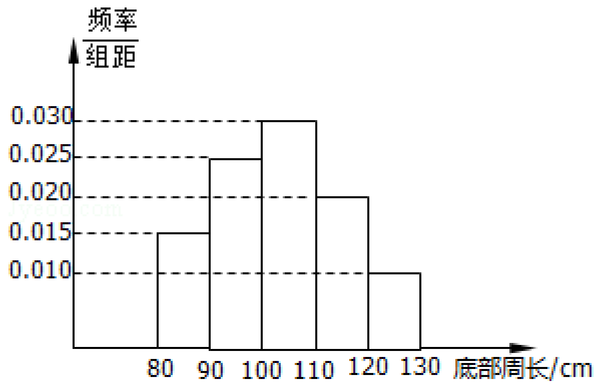
5.已知函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin(2x+\phi)(0\leq\phi<\pi)$，它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，则 ϕ 的值是_______.
解析：∵函数 $y=\cos x$ 与 $y=\sin(2x+\phi)$，它们的图象有一个横坐标为 $\frac{\pi}{3}$ 的交点，

$\therefore \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\phi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

$\because 0\leqslant\phi<\pi$，$\therefore \frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}+\phi\leqslant\frac{5\pi}{3}$，$\therefore \frac{2\pi}{3}+\phi=\frac{5\pi}{6}$，解得 $\phi=\frac{\pi}{6}$.

答案：$\frac{\pi}{6}$.

6.为了了解一片经济林的生长情况，随机抽测了其中 60 株树木的底部周长(单位：cm)，所得数据均在区间[80，130]上，其频率分布直方图如图所示，则在抽测的 60 株树木中，有__24株树木的底部周长小于 100cm.



解析：由频率分布直方图知：底部周长小于 100cm 的频率为(0.015+0.025)×10=0.4，
∴底部周长小于 100cm 的频数为 60×0.4=24(株).
答案：24.

7.在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_2=1$，$a_8=a_6+2a_4$，则 a_6的值是______.
解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q>0$，$a_1>0$.
$\because a_8=a_6+2a_4$，$\therefore a_1q^7=a_1q^5+2a_1q^3$，化为 $q^4-q^2-2=0$，解得 $q^2=2$. $\therefore a_6=a_1q^5=a_2q^4=1\times2^2=4$.
答案：4.

8.设甲、乙两个圆柱的底面积分别为 S_1，S_2，体积分别为 V_1，V_2，若它们的侧面积相等，且$\frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{4}$，则$\frac{V_1}{V_2}$的值是______.

解析：设两个圆柱的底面半径分别为 R，r；高分别为 H，h；

$\because \frac{S_1}{S_2}=\frac{9}{4}$，$\therefore \frac{R}{r}=\frac{3}{2}$，它们的侧面积相等，$\frac{2\pi RH}{2\pi rh}=1 \therefore \frac{H}{h}=\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{V_1}{V_2}=\frac{\pi R^2H}{\pi r^2h}=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{2}$.

答案：$\frac{3}{2}$.

9.在平面直角坐标系 x0y 中，直线 x+2y-3=0 被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$截得的弦长为______.

解析：圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$的圆心为 C(2，-1)，半径 r=2，

∵点 C 到直线直线 x+2y-3=0 的距离 $d=\frac{|2-2-3|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$,

∴根据垂径定理，得直线 x+2y-3=0 被圆$(x-2)^2+(y+1)^2=4$截得的弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{9}{5}}=\frac{2\sqrt{55}}{5}$

答案：$\frac{2\sqrt{55}}{5}$.

10.已知函数 $f(x)=x^2+mx-1$，若对于任意 x∈[m，m+1]，都有 f(x)＜0 成立，则实数 m 的取值范围是________.

解析：∵二次函数 $f(x)=x^2+mx-1$ 的图象开口向上，对称轴为 $x=-\frac{m}{2}$,

对于任意 x∈[m,m+1],都有 f(x)＜0 成立,∴$\begin{cases} f(m)=2m^2-1<0 \\ f(m+1)=(m+1)^2+m(m+1)-1<0 \end{cases}$,

即 $\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2m(m+3)<0 \end{cases}$，解得$-\frac{\sqrt{2}}{2}<m<0$,

答案：$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

11.在平面直角坐标系 x0y 中，若曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$(a，b 为常数)过点 P(2，-5)，且该曲线在点 P 处的切线与直线 7x+2y+3=0 平行，则 a+b 的值是________.

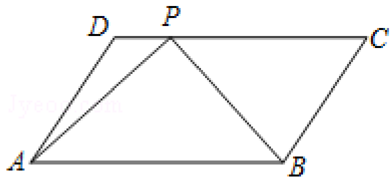
解析：∵直线 7x+2y+3=0 的斜率 $k=-\frac{7}{2}$,

曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$(a，b 为常数)过点 P(2，-5)，且该曲线在点 P 处的切线与直线 7x+2y+3=0 平行，

∴$y'=2ax-\frac{b}{x^2}$，∴$\begin{cases} 4a+\frac{b}{2}=-5 \\ 4a-\frac{b}{4}=-\frac{7}{2} \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$，故 a+b=-3,

答案：-3

12.如图，在平行四边形 ABCD 中，已知 AB=8，AD=5，$\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=2$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$的值是__________.



解析：∵ $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{PD}$，∴ $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

又∵AB=8，AD=5，

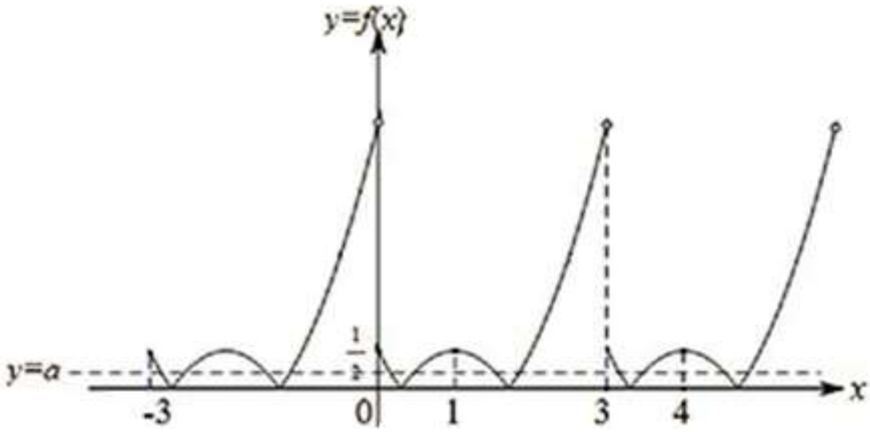
∴ $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB})=|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{3}{16}|\overrightarrow{AB}|^2=25-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-12=2$，

故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=22$，

答案：22.

13.已知 f(x)是定义在 R 上且周期为 3 的函数，当 x∈[0，3)时，$f(x)=|x^2-2x+\frac{1}{2}|$，若函数 y=f(x)-a 在区间[-3，4]上有 10 个零点(互不相同)，则实数 a 的取值范围是________.

解析：f(x)是定义在 R 上且周期为 3 的函数，当 x∈[0，3)时，$f(x)=|x^2-2x+\frac{1}{2}|$，若函数 y=f(x)-a 在区间[-3，4]上有 10 个零点(互不相同)，在同一坐标系中画出函数 f(x)与 y=a 的图象如图：



由图象可知 $a\in(0,\frac{1}{2})$.

答案：$(0,\frac{1}{2})$.

14.若△ABC 的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，则 cosC 的最小值是__$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$__.

解析：由整形定理得 $a+\sqrt{2}b=2c$，

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a^2+b^2-\frac{1}{4}(a+\sqrt{2}b)^2}{2ab}=\dfrac{\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2}{2ab}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\geqslant\dfrac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}b}{2ab}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

当且仅当$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$时，取等号，

答案：$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

二、解答题(本大题共 6 小题，共计 90 分)

15.(14 分)已知 $\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 $\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$的值；

(2)求 $\cos(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha)$的值.

解析：(1)通过已知条件求出 $\cos\alpha$，然后利用两角和的正弦函数求 $\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$的值；

(2)求出 $\cos2\alpha$，然后利用两角差的余弦函数求 $\cos(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha)$的值.

答案：$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. $\therefore\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(1)$\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5})+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$;

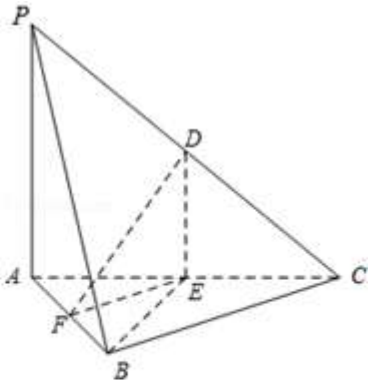
$\therefore\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$的值为：$-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(2)$\because\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\ \pi)$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. $\therefore\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore\cos(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha)=\cos\dfrac{5\pi}{6}\cos2\alpha+\sin\dfrac{5\pi}{6}\sin2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times(-\dfrac{4}{5})=-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

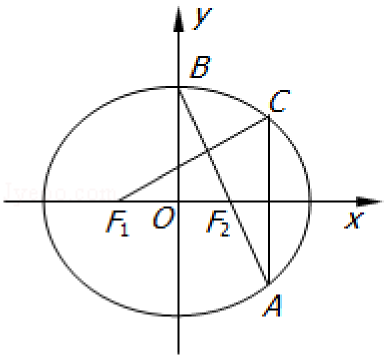
$\cos(\dfrac{5\pi}{6}-2\alpha)$的值为：$-\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

16.(14 分)如图，在三棱锥 P-ABC 中，D，E，F 分别为棱 PC，AC，AB 的中点，已知 PA⊥AC，PA=6，BC=8，DF=5.求证：



(1)直线 PA∥平面 DEF；
(2)平面 BDE⊥平面 ABC.
解析：(1)由 D、E 为 PC、AC 的中点，得出 DE∥PA，从而得出 PA∥平面 DEF；
(2)要证平面 BDE⊥平面 ABC，只需证 DE⊥平面 ABC，即证 DE⊥EF，且 DE⊥AC 即可.
答案：(1)∵D、E 为 PC、AC 的中点，∴DE∥PA，
又∵PA⊄平面 DEF，DE⊂平面 DEF，∴PA∥平面 DEF；
(2)∵D、E 为 PC、AC 的中点，∴$DE=\frac{1}{2}PA=3$；
又∵E、F 为 AC、AB 的中点，∴$EF=\frac{1}{2}BC=4$；
∴$DE^2+EF^2=DF^2$，∴∠DEF=90°，
∴DE⊥EF；
∵DE∥PA，PA⊥AC，∴DE⊥AC；
∵AC∩EF=E，∴DE⊥平面 ABC；
∵DE⊂平面 BDE，∴平面 BDE⊥平面 ABC.

17.(14 分)如图，在平面直角坐标系 x0y 中，F_1，F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的左、右焦点，顶点 B 的坐标为(0，b)，连接 BF_2并延长交椭圆于点 A，过点 A 作 x 轴的垂线交椭圆于另一点 C，连接 F_1C.



(1)若点 C 的坐标为($\frac{4}{3}$，$\frac{1}{3}$)，且 $BF_2=\sqrt{2}$，求椭圆的方程；
(2)若 F_1C⊥AB，求椭圆离心率 e 的值.
解析：(1)根据椭圆的定义，建立方程关系即可求出 a，b 的值.

(2)求出 C 的坐标，利用 $F_1C\perp AB$ 建立斜率之间的关系，解方程即可可求出 e 的值.

答案：(1)∵C 的坐标为$(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3})$，∴$\frac{\frac{16}{9}}{a^2}+\frac{\frac{1}{9}}{b^2}=1$，即$\frac{16}{a^2}+\frac{1}{b^2}=9$，

∵ $BF_2^2=b^2+c^2=a^2$，∴$a^2=(\sqrt{2})^2=2$，即 $b^2=1$，则椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2)设 $F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$，

∵B(0，b)，∴直线 BF_2：$y=-\frac{b}{c}x+b$，代入椭圆方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>得$(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})x^2-\frac{2}{c}x=0$，

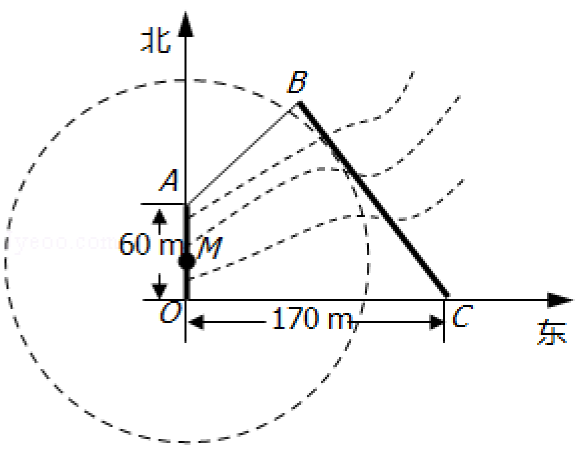
解得 x=0，或 $x=\frac{2a^2c}{a^2+c^2}$，

∵$A(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\ b-\frac{2a^2c}{a^2+c^2})$，且 A，C 关于 x 轴对称，∴$C(\frac{2a^2c}{a^2+c^2},\ \frac{2a^2c}{a^2+c^2}-b)$，

则 $k_{F_1C}=\frac{\frac{2a^2b}{a^2+c^2}-b}{\frac{2a^2c}{a^2+c^2}+c}=\frac{a^2b-bc^2}{3a^2c+c^2}$，

∵$F_1C\perp AB$，∴$\frac{a^2b-bc^2}{3a^2c+c^2}\times(-\frac{b}{c})=-1$，由 $b^2=a^2-c^2$ 得$\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{5}$，即 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18.(16 分)如图，为保护河上古桥 OA，规划建一座新桥 BC，同时设立一个圆形保护区，规划要求：新桥 BC 与河岸 AB 垂直；保护区的边界为圆心 M 在线段 OA 上并与 BC 相切的圆，且古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80m，经测量，点 A 位于点 O 正北方向 60m 处，点 C 位于点 O 正东方向 170m 处(OC 为河岸)，$\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$.



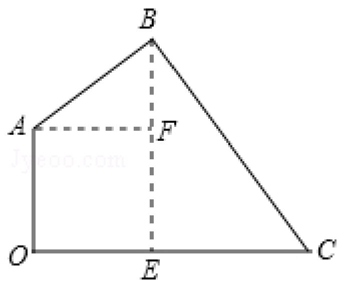
(1)求新桥 BC 的长；

(2)当 OM 多长时，圆形保护区的面积最大？

解析：(1)在四边形 AOCB 中，过 B 作 BE⊥OC 于 E，过 A 作 AF⊥BE 于 F，设出 AF，然后通过解直角三角形列式求解 BE，进一步得到 CE，然后由勾股定理得答案；

(2)设 BC 与⊙M 切于 Q，延长 QM、CO 交于 P，设 OM=xm，把 PC、PQ 用含有 x 的代数式表示，再结合古桥两端 O 和 A 到该圆上任意一点的距离均不少于 80m 列式求得 x 的范围，得到 x 取最小值时圆的半径最大，即圆形保护区的面积最大.

答案：(1)如图，



过 B 作 BE⊥OC 于 E，过 A 作 AF⊥BE 于 F，

∵∠ABC=90°，∠BEC=90°，∴∠ABF=∠BCE，

∴ $\tan\angle ABF=\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$.

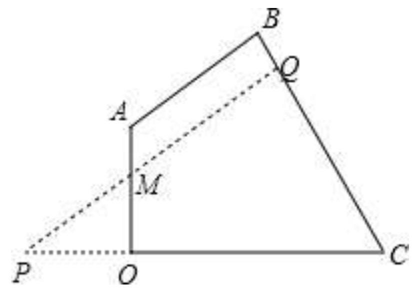
设 AF=4x(m)，则 BF=3x(m).

∵∠AOE=∠AFE=∠OEF=90°，∴OE=AF=4x(m)，EF=AO=60(m)，∴BE=(3x+60)m.

∵ $\tan\angle BCO=\frac{4}{3}$，∴CE=$\frac{3}{4}$BE=（$\frac{9}{4}x+45$）(m).∴OC=（$4x+\frac{9}{4}x+45$）(m).

∴ $4x+\frac{9}{4}x+45=170$，解得：x=20.∴BE=120m，CE=90m，则 BC=150m；

(2)如图，



设 BC 与⊙M 切于 Q，延长 QM、CO 交于 P，

∵∠POM=∠PQC=90°，∴∠PMO=∠BCO.

设 OM=xm，则 OP=$\frac{4}{3}x$m，PM=$\frac{5}{3}x$m.∴PC=（$\frac{4}{3}x+170$）m，PQ=（$\frac{16}{15}x+136$）m.

设⊙M 半径为 R，

∴R=MQ=（$\frac{16}{15}x+136-\frac{5}{3}x$）m=（$136-\frac{3}{5}x$）m.

∵A、O 到⊙M 上任一点距离不少于 80m，

则 R-AM≥80，R-OM≥80，∴$136-\frac{3}{5}x-(60-x)\geq 80$，$136-\frac{3}{5}x-x\geq 80$.解得：10≤x≤35.

∴当且仅当 x=10 时 R 取到最大值.∴OM=10m 时，保护区面积最大.

19.(16 分)已知函数 $f(x)=e^x+e^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数.

(1)证明：$f(x)$是 R 上的偶函数；
(2)若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant e^{-x}+m-1$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，求实数 m 的取值范围；
(3)已知正数 a 满足：存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，试比较 e^{a-1} 与 a^{e-1} 的大小，并证明你的结论.

解析：(1)根据函数奇偶性的定义即可证明 $f(x)$是 R 上的偶函数；
(2)利用参数分离法，将不等式 $mf(x)\leqslant e^{-x}+m-1$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，进行转化求最值问题即可求实数 m 的取值范围；
(3)构 u 造函数，利用函数的单调性，最值与单调性之间的关系，分别进行讨论即可得到结论.

答案：(1)∵$f(x)=e^x+e^{-x}$，∴$f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)$，即函数：$f(x)$是 R 上的偶函数；
(2)若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant e^{-x}+m-1$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，
即 $m(e^x+e^{-x}-1)\leqslant e^{-x}-1$，
∵$x>0$，∴$e^x+e^{-x}-1>0$，即 $m\leqslant\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+e^{-x}-1}$在$(0,+\infty)$上恒成立，
设 $t=e^x$，$(t>1)$，则 $m\leqslant\dfrac{1-t}{t^2-t+1}$在$(1,+\infty)$上恒成立，
∵$\dfrac{1-t}{t^2-t+1}=-\dfrac{t-1}{(t-1)^2+(t-1)+1}=-\dfrac{1}{t-1+\dfrac{1}{t-1}+1}\geqslant-\dfrac{1}{3}$，当且仅当 $t=2$ 时等号成立，∴$m\leqslant-\dfrac{1}{3}$.
(3)$f'(x)=e^x-e^{-x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，此时函数单调递增，
令 $h(x)=a(-x_0^3+3x_0)$，则 $h'(x)=-3ax_0(x_0-1)$，
∵$a>0$，$x>1$，
∴$h'(x)=-3ax_0(x_0-1)<0$，即函数 $h(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，
∵存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$成立，∴$f(1)=e+\dfrac{1}{e}<2a$，即 $a>\dfrac{1}{2}(e+\dfrac{1}{e})$，
∵$\ln\dfrac{a^{e-1}}{e^{a-1}}=\ln a^{e-1}-\ln e^{a-1}=(e-1)\ln a-a+1$，∴设 $m(a)=(e-1)\ln a-a+1$，
则 $m'(a)=\dfrac{e-1}{a}-1=\dfrac{e-1-a}{a}$，$a>\dfrac{1}{2}(e+\dfrac{1}{e})$，
当$\dfrac{1}{2}(e+\dfrac{1}{e})<a<e-1$ 时，$m'(a)>0$，$m(a)$单调递增，
当 $a>e-1$ 时，$m'(a)<0$，$m(a)$单调递减，
因此 $m(a)$至多有两个零点，而 $m(1)=m(e)=0$，∴当 $a>e$ 时，$m(a)<0$，
当$\dfrac{1}{2}(e+\dfrac{1}{e})<a<e-1$ 时，$m(a)>0$，当 $a=e$，$m(a)=0$，
∵$m(a)<0$，等价为 $a^{e-1}<e^{a-1}$，$m(a)>0$ 等价为 $a^{e-1}>e^{a-1}$，$m(a)=0$ 等价为 $a^{e-1}=e^{a-1}$，
∴当$\dfrac{1}{2}(e+\dfrac{1}{e})<a<e$ 时，$a^{e-1}>e^{a-1}$，

当 a=e 时，$a^{e-1}=e^{a-1}$，
当 a＞e 时，$a^{e-1}<e^{a-1}$.

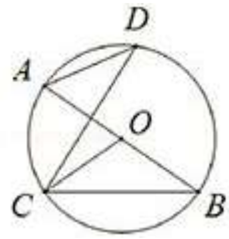
20.(16 分)设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若对任意的正整数 n，总存在正整数 m，使得 $S_n=a_m$，则称$\{a_n\}$是“H 数列”.
(1)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2^n(n\in N^*)$，证明：$\{a_n\}$是“H 数列”；
(2)设$\{a_n\}$是等差数列，其首项 $a_1=1$，公差 d＜0，若$\{a_n\}$是“H 数列”，求 d 的值；
(3)证明：对任意的等差数列$\{a_n\}$，总存在两个“H 数列”$\{b_n\}$和$\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n(n\in N^*)$成立.
解析：(1)利用“当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}$，当 n=1 时，$a_1=S_1$”即可得到 a_n，再利用“H”数列的意义即可得出.
(2)利用等差数列的前 n 项和即可得出 S_n，对$\forall n\in N^*$，$\exists m\in N^*$使 $S_n=a_m$，取 n=2 和根据 d＜0 即可得出；
(3)设$\{a_n\}$的公差为 d，构造数列：$b_n=a_1-(n-1)a_1=(2-n)a_1$，$c_n=(n-1)(a_1+d)$，可证明$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是等差数列.再利用等差数列的前 n 项和公式及其通项公式、“H”的意义即可得出.
答案：(1)当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，
当 n=1 时，$a_1=S_1=2$.
当 n=1 时，$S_1=a_1$.
当 n≥2 时，$S_n=a_{n+1}$.∴数列$\{a_n\}$是“H”数列.
(2)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，
对$\forall n\in N^*$，$\exists m\in N^*$使 $S_n=a_m$，即 $n+\frac{n(n-1)}{2}d=1+(m-1)d$，
取 n=2 时，得 1+d=(m-1)d，解得 $m=2+\frac{1}{d}$，
∵d＜0，∴m＜2，又 $m\in N^*$，∴m=1，∴d=-1.
(3)设$\{a_n\}$的公差为 d，令 $b_n=a_1-(n-1)a_1=(2-n)a_1$，
对$\forall n\in N^*$，$b_{n+1}-b_n=-a_1$，
$c_n=(n-1)(a_1+d)$，
对$\forall n\in N^*$，$c_{n+1}-c_n=a_1+d$，
则 $b_n+c_n=a_1+(n-1)d=a_n$，且数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$是等差数列.
数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}(-a_1)$，
令 $T_n=(2-m)a_1$，则 $m=\frac{n(n-3)}{2}+2$.
当 n=1 时，m=1；当 n=2 时，m=1.
当 n≥3 时，由于 n 与 n-3 的奇偶性不同，即 n(n-3)为非负偶数，$m\in N^*$.
因此对$\forall n\in N^*$，都可找到 $m\in N^*$，使 $T_n=b_m$成立，即$\{b_n\}$为 H 数列.
数列$\{c_n\}$的前 n 项和 $R_n=\frac{n(n-1)}{2}(a_1+d)$，
令 $c_m=(m-1)(a_1+d)=R_n$，则 $m=\frac{n(n-1)}{2}+1$.
∵对$\forall n\in N^*$，n(n-3)为非负偶数，∴$m\in N^*$.
因此对$\forall n\in N^*$，都可找到 $m\in N^*$，使 $R_n=c_m$成立，即$\{c_n\}$为 H 数列.因此命题得证.

三、附加题（本大题包括选做题和必做题两部分）

(一)选择题（本题包括21、22、23、24四小题，请选定其中两个小题作答，若多做，则按作答的前两个小题评分）

【选修4-1：几何证明选讲】

21.(10分)如图，AB是圆O的直径，C，D是圆O上位于AB异侧的两点，证明：∠OCB=∠D.



解析：利用OC=OB，可得∠OCB=∠B，利用同弧所对的圆周角相等，即可得出结论.

答案：∵OC=OB，

∴∠OCB=∠B，

∵∠B=∠D，

∴∠OCB=∠D.

【选修4-2：矩阵与变换】

22.(10分)已知矩阵A=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，向量$\overrightarrow{\alpha}$=$\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$，x，y为实数，若A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，求x，y的值.

解析：利用矩阵的乘法，结合A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，可得方程组，即可求x，y的值.

答案：∵矩阵A=$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & x\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，向量$\overrightarrow{\alpha}$=$\begin{bmatrix}2\\ y\end{bmatrix}$，A$\overrightarrow{\alpha}$=B$\overrightarrow{\alpha}$，

∴$\begin{cases}2y-2=2+y\\ 2+xy=4-y\end{cases}$，∴$x=-\dfrac{1}{2}$，y=4.

【选修4-3：极坐标及参数方程】

23.在平面直角坐标系xOy中，已知直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t为参数)，直线l与抛物线$y^2=4x$相交于A，B两点，求线段AB的长.

解析：直线l的参数方程化为普通方程，与抛物线$y^2=4x$联立，求出A，B的坐标，即可求线段AB的长.

答案：直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，化为普通方程为x+y=3，

与抛物线$y^2=4x$联立，可得$x^2-10x+9=0$，

∴交点 A(1，2)，B(9，-6)，∴$|AB|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$.

【选修 4-4：不等式选讲】

24.已知 x＞0，y＞0，证明$(1+x+y^2)(1+x^2+y)\geqslant 9xy$.

解析：由均值不等式可得 $1+x+y^2\geqslant 3\sqrt[3]{xy^2}$，$1+x^2+y\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y}$，两式相乘可得结论.

答案：由均值不等式可得 $1+x+y^2\geqslant 3\sqrt[3]{xy^2}$，$1+x^2+y\geqslant 3\sqrt[3]{x^2y}$

分别当且仅当 $x=y^2=1$，$x^2=y=1$ 时等号成立，

∴两式相乘可得$(1+x+y^2)(1+x^2+y)\geqslant 9xy$.

(二)必做题（本部分包括 25、26 两题，每题 10 分，共计 20 分）

25.(10 分)盒中共有 9 个球，其中有 4 个红球，3 个黄球和 2 个绿球，这些球除颜色外完全相同.

(1)从盒中一次随机取出 2 个球，求取出的 2 个球颜色相同的概率 P；

(2)从盒中一次随机取出 4 个球，其中红球、黄球、绿球的个数分别记为 x_1，x_2，x_3，随机变量 X 表示 x_1，x_2，x_3 中的最大数，求 X 的概率分布和数学期望 E(X).

解析：(1)先求出取 2 个球的所有可能，再求出颜色相同的所有可能，最后利用概率公式计算即可；

(2)先判断 X 的所有可能值，在分别求出所有可能值的概率，列出分布列，根据数学期望公式计算即可.

答案：(1)一次取 2 个球共有 $C_9^2=36$ 种可能，2 个球颜色相同共有 $C_4^2+C_3^2+C_2^2=10$ 种可能情况∴取出的 2 个球颜色相同的概率 $P=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

(2)X 的所有可能值为 4，3，2，则 $P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_9^4}=\frac{1}{126}$，$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_5^1+C_3^3\cdot C_6^1}{C_9^3}=\frac{13}{63}$,

于是 $P(X=2)=1-P(X=3)-P(X=4)=\frac{11}{14}$，X 的概率分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{11}{14}$	$\frac{13}{63}$	$\frac{1}{126}$

故 X 数学期望 $E(X)=2\times\frac{11}{14}+3\times\frac{13}{63}+4\times\frac{1}{126}=\frac{20}{9}$.

26.(10 分)已知函数 $f_0(x)=\frac{\sin x}{x}(x>0)$，设 $f_n(x)$为 $f_{n-1}(x)$的导数，$n\in N^*$.

(1)求 $2f_1(\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}f_2(\frac{\pi}{2})$的值；

(2)证明：对任意 $n\in N^*$，等式$|nf_{n-1}(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}f_n(\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$都成立.

解析：(1)由于求两个函数的相除的导数比较麻烦，根据条件和结论先将原函数化为：$xf_0(x)=\sin x$，然后两边求导后根据条件两边再求导得：$2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x$，把 $x=\frac{\pi}{2}$代入式子求值；

(2)由(1)得，$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x$ 和 $2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x$，利用相同的方法再对所得的式子两边再求导，并利用诱导公式对所得式子进行化简、归纳，再进行猜想得到等式，用数学归纳法进行证明等式成立，主要利用假设的条件、诱导公式、求导公式以及题意进行证明，最后再把 $x=\frac{\pi}{4}$代入所给的式子求解验证.

答案：(1)∵$f_0(x)=\frac{\sin x}{x}$，∴$xf_0(x)=\sin x$，则两边求导，$[xf_0(x)]'=(\sin x)'$，

∵$f_n(x)$为 $f_{n-1}(x)$的导数，$n\in N^*$，∴$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x$，

两边再同时求导得，$2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x$，

将 $x=\frac{\pi}{2}$代入上式得，$2f_1(\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}f_2(\frac{\pi}{2})=-1$，

(2)由(1)得，$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$，

恒成立两边再同时求导得，$2f_1(x)+xf_2(x)=-\sin x=\sin(x+\pi)$，

再对上式两边同时求导得，$3f_2(x)+xf_3(x)=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$，

同理可得，两边再同时求导得，$4f_3(x)+xf_4(x)=\sin x=\sin(x+2\pi)$，

猜想得，$nf_{n-1}(x)+xf_n(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$对任意 $n\in N^*$恒成立，

下面用数学归纳法进行证明等式成立：

①当 n=1 时，$f_0(x)+xf_1(x)=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ 成立，则上式成立；

②假设 $n=k(k>1$ 且 $k\in N^*)$时等式成立，即 $kf_{k-1}(x)+xf_k(x)=\sin(x+\frac{k\pi}{2})$，

∵$[kf_{k-1}(x)+xf_k(x)]'=kf_{k-1}'(x)+f_k(x)+xf_k'(x)=(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)$

又$[\sin(x+\frac{k\pi}{2})]'=\cos(x+\frac{k\pi}{2})\cdot(x+\frac{k\pi}{2})'$

$=\cos(x+\frac{k\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}+x+\frac{k\pi}{2})=\sin[x+\frac{(k+1)\pi}{2}]$，

∴那么 $n=k(k>1$ 且 $k\in N^*)$时.等式

$(k+1)f_k(x)+xf_{k+1}(x)=\sin[x+\frac{(k+1)\pi}{2}]$也成立，

由①②得，$nf_{n-1}(x)+xf_n(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$对任意 $n\in N^*$恒成立，

令 $x=\frac{\pi}{4}$代入上式得，$nf_{n-1}(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}f_n(\frac{\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2})=\pm\cos\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以，对任意 $n\in N^*$，等式$|nf_{n-1}(\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}f_n(\frac{\pi}{4})|=\frac{\sqrt{2}}{2}$都成立.