2014年普通高等学校招生全国统一考试（大纲版）数学理

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分）

1.设 $z=\frac{10i}{3+i}$，则z的共轭复数为(　　)

A. $-1+3i$

B. $-1-3i$

C. $1+3i$

D. $1-3i$

解析：∵$z=\frac{10i}{3+i}=\frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{10+30i}{10}=1+3i$，∴$\overline{z}=1-3i$.

答案：D.

2.设集合 $M=\{x|x^2-3x-4<0\}$，$N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，则 $M\cap N=$(　　)

A. (0，4]

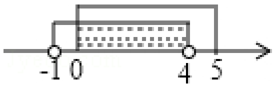
B. [0，4)

C. [-1，0)

D. (-1，0]

解析：由 $x^2-3x-4<0$，得 $-1<x<4$，∴$M=\{x|x^2-3x-4<0\}=\{x|-1<x<4\}$，

又 $N=\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}$，∴$M\cap N=\{x|-1<x<4\}\cap\{x|0\leqslant x\leqslant 5\}=[0，4)$.



答案：B.

3.设 $a=\sin 33°$，$b=\cos 55°$，$c=\tan 35°$，则(　　)

A. $a>b>c$

B. $b>c>a$

C. $c>b>a$

D. $c>a>b$

解析：由诱导公式可得 $b=\cos 55°=\cos(90°-35°)=\sin 35°$，

由正弦函数的单调性可知 $b>a$，而 $c=\tan 35°=\frac{\sin 35°}{\cos 35°}>\sin 35°=b$，∴$c>b>a$

答案：C

4.若向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$满足：$|\vec{a}|=1$，$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，$(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$(　　)

A. 2

B. $\sqrt{2}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析：由题意可得，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=1+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$；

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=-2+\vec{b}^2=0$，∴$b^2=2$，则$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，

答案：B.

5.有 6 名男医生、5 名女医生，从中选出 2 名男医生、1 名女医生组成一个医疗小组，则不同的选法共有(　　)

A. 60 种

B. 70 种

C. 75 种

D. 150 种

解析：根据题意，先从 6 名男医生中选 2 人，有 $C_6^2=15$ 种选法，

再从 5 名女医生中选出 1 人，有 $C_5^1=5$ 种选法，则不同的选法共有 $15\times5=75$ 种；

答案：C.

6.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点为 F_1、F_2，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，过 F_2 的直线 l 交 C 于 A、B 两点，若△AF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，则 C 的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$

B. $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

C. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$

D. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

解析：∵△AF_1B 的周长为 $4\sqrt{3}$，∴$4a=4\sqrt{3}$，∴$a=\sqrt{3}$，

∵离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴$c=1$，∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2}$，∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

答案：A.

7.曲线 $y=xe^{x-1}$ 在点(1，1)处切线的斜率等于(　　)

A. 2e

B. e

C. 2

D. 1

解析：函数的导数为 $f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=(1+x)e^{x-1}$，

当 $x=1$ 时，$f'(1)=2$，

即曲线 $y=xe^{x-1}$ 在点(1，1)处切线的斜率 $k=f'(1)=2$，

答案：C.

8.正四棱锥的顶点都在同一球面上，若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为(　　)

A. $\frac{81\pi}{4}$

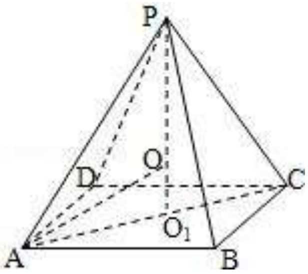
B. 16π

C. 9π

D. $\frac{27\pi}{4}$

解析：设球的半径为R，则棱锥的高为4，底面边长为2，∴$R^2=(4-R)^2+(\sqrt{2})^2$，∴$R=\frac{9}{4}$,

∴球的表面积为$4\pi\cdot(\frac{9}{4})^2=\frac{81\pi}{4}$.



答案：A.

9.已知双曲线C的离心率为2，焦点为F_1、F_2，点A在C上，若$|F_1A|=2|F_2A|$，则$\cos\angle AF_2F_1=$(　　)

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

解析：∵双曲线C的离心率为2，∴$e=\frac{c}{a}=2$，即c=2a,

点A在双曲线上，则$|F_1A|-|F_2A|=2a$,

又$|F_1A|=2|F_2A|$，∴解得$|F_1A|=4a$，$|F_2A|=2a$，$||F_1F_2|=2c$,

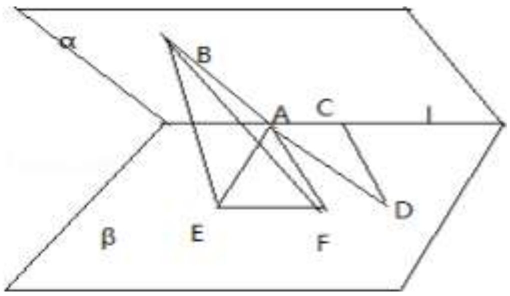
则由余弦定理得$\cos\angle AF_2F_1=\frac{|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-|AF_1|^2}{2|AF_2|\cdot|F_1F_2|}=$

$\frac{4a^2+4c^2-16a^2}{2\times2a\times2c}=\frac{4c^2-12a^2}{8ac}=\frac{c^2-3a^2}{2ac}=\frac{4a^2-3a^2}{4a^2}=\frac{a^2}{4a^2}=\frac{1}{4}$,

答案：A.

10.等比数列{a_n}中，$a_4=2$，$a_5=5$，则数列{$\lg a_n$}的前 8 项和等于(　　)
A. 6
B. 5
C. 4
D. 3
解析：∵等比数列{a_n}中 $a_4=2$，$a_5=5$，∴$a_4 \cdot a_5=2\times5=10$，
∴数列{$\lg a_n$}的前 8 项和 $S=\lg a_1+\lg a_2+\cdots+\lg a_8$
$=\lg(a_1\cdot a_2\cdots a_8)=\lg(a_4\cdot a_5)^4$
$=4\lg(a_4\cdot a_5)=4\lg10=4$
答案：C

11.已知二面角 α-l-β 为 60°，AB⊂α，AB⊥l，A 为垂足，CD⊂β，C∈l，∠ACD=135°，则异面直线 AB 与 CD 所成角的余弦值为(　　)
A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
D. $\frac{1}{2}$
解析：如图，过 A 点做 AE⊥l，使 BE⊥β，垂足为 E，过点 A 做 AF∥CD，过点 E 做 EF⊥AE，连接 BF，



∵AB⊥l，∴∠BAE=60°，
又∠ACD=135°，∴∠EAF=45°，
在 Rt△BEA 中，设 AE=a，则 AB=2a，BE=$\sqrt{3}$a，
在 Rt△AEF 中，则 EF=a，AF=$\sqrt{2}$a，
在 Rt△BEF 中，则 BF=2a，∴异面直线 AB 与 CD 所成的角即是∠BAF，

∴$\cos\angle BAF=\frac{AB^2+AF^2-BF^2}{2AB\cdot AF}=\frac{(2a)^2+(\sqrt{2}a)^2-(2a)^2}{2\times2a\times\sqrt{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

答案：B.

12.函数 y=f(x)的图象与函数 y=g(x)的图象关于直线 x+y=0 对称，则 y=f(x)的反函数是(　　)
A. y=g(x)
B. y=g(-x)

C. y=-g(x)

D. y=-g(-x)

解析：设P(x，y)为y=f(x)的反函数图象上的任意一点，

则P关于y=x的对称点P′(y，x)一点在y=f(x)的图象上，

又∵函数y=f(x)的图象与函数y=g(x)的图象关于直线x+y=0对称，

∴P′(y，x)关于直线x+y=0的对称点P″(-x，-y)在y=g(x)图象上，

∴必有-y=g(-x)，即y=-g(-x)∴y=f(x)的反函数为：y=-g(-x)

答案：D

二、填空题(本大题共4小题，每小题5分)

13. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^2y^2 的系数为_______.(用数字作答)

解析：$\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(-1)^r\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{8-r}\cdot\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^r=$

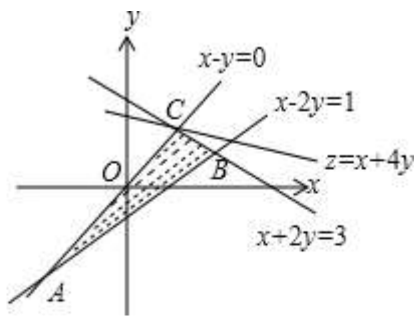
$C_8^r\cdot(-1)^r\cdot x^{8-\frac{3r}{2}}\cdot y^{\frac{3r}{2}-4}$，

令 $8-\frac{3r}{2}=\frac{3r}{2}-4=2$，求得 r=4，故展开式中 x^2y^2 的系数为 $C_8^4=70$，

答案：70.

14.设x、y满足约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+2y\leqslant 3\\x-2y\leqslant 1\end{cases}$ ，则z=x+4y的最大值为_______.

解析：由约束条件 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+2y\leqslant 3\\x-2y\leqslant 1\end{cases}$ 作出可行域如图，



联立 $\begin{cases}x-y=0\\x+2y=3\end{cases}$，解得C(1，1).化目标函数z=x+4y为直线方程的斜截式，得 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$.

由图可知，当直线 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{z}{4}$过 C 点时，直线在 y 轴上的截距最大，z 最大.

此时 $z_{max}=1+4\times1=5$.

答案：5.

15.直线 l_1和 l_2是圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线，若 l_1与 l_2的交点为(1，3)，则 l_1与 l_2的夹角的正切值等于_______.

解析：设 l_1与 l_2的夹角为 2θ，由于 l_1与 l_2的交点 A(1，3)在圆的外部，

且点 A 与圆心 O 之间的距离为 $OA=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$,

圆的半径为 $r=\sqrt{2}$，∴$\sin\theta=\frac{r}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$,

∴$\cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2}$, ∴$\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$,

答案：$\frac{4}{3}$.

16.若函数 f(x)=cos2x+asinx 在区间($\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$)是减函数，则 a 的取值范围是_______.

解析：由 $f(x)=\cos2x+a\sin x=-2\sin^2x+a\sin x+1$，

令 t=sinx，则原函数化为 $y=-2t^2+at+1$.

∵$x\in(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$时 f(x)为减函数，则 $y=-2t^2+at+1$ 在 $t\in(\frac{1}{2}, 1)$上为减函数，

∵$y=-2t^2+at+1$ 的图象开口向下，且对称轴方程为 $t=\frac{a}{4}$. ∴$\frac{a}{4}\leqslant\frac{1}{2}$,

解得：a≤2.∴a 的取值范围是(-∞，2].

答案：(-∞，2].

三、解答题

17.(10 分)△ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 3acosC=2ccosA，$\tan A=\frac{1}{3}$,

求 B.

解析：由 3acosC=2ccosA，利用正弦定理可得 3sinAcosC=2sinCcosA，再利用同角的三角函数基本关系式可得 tanC，利用 tanB=tan[π-(A+B)]=-tan(A+B)即可得出.

答案：∵3acosC=2ccosA，

由正弦定理可得 3sinAcosC=2sinCcosA，∴3tanA=2tanC，

∵$\tan A=\frac{1}{3}$, ∴$2\tan C=3\times\frac{1}{3}=1$，解得 $\tan C=\frac{1}{2}$.

∴$\tan B=\tan[\pi-(A+B)]=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=-1$,

∵B∈(0， π)，∴B=$\frac{3\pi}{4}$

点评：　本题考查了正弦定理、同角的三角函数基本关系式、两角和差的正切公式、诱导公

18.(12 分)等差数列{a_n}的前 n 项和为 S_n.已知 $a_1=10$，a_2 为整数，且 $S_n\leqslant S_4$.

(Ⅰ)求{a_n}的通项公式；

(Ⅱ)设 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列{b_n}的前 n 项和 T_n.

解析：(Ⅰ)由题意得 $a_4\geqslant0$，$a_5\leqslant0$，即 $10+3d\geqslant0$，$10+4d\leqslant0$，解得 d=-3，即可写出通项公式；

(Ⅱ)利用裂项相消法求数列和即可.

答案：(Ⅰ)由 $a_1=10$，a_2 为整数，且 $S_n\leqslant S_4$ 得

$a_4\geqslant0$，$a_5\leqslant0$，即 $10+3d\geqslant0$，$10+4d\leqslant0$，解得$-\frac{10}{3}\leqslant d\leqslant-\frac{5}{2}$，

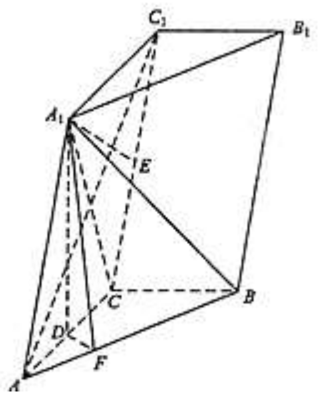
∴d=-3，∴{a_n}的通项公式为 $a_n=13-3n$.

(Ⅱ)∵$b_n=\frac{1}{(13-3n)(10-3n)}=\frac{1}{3}(\frac{1}{10-3n}-\frac{1}{13-3n})$，

∴$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{3}(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{10-3n}-\frac{1}{13-3n})=\frac{1}{3}(\frac{1}{10-3n}-\frac{1}{10})=$

$\frac{n}{10(10-3n)}$.

19.(12 分)如图，三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，点 A_1 在平面 ABC 内的射影 D 在 AC 上，∠ACB=90°，BC=1，AC=CC_1=2.



(Ⅰ)证明：$AC_1\perp A_1B$；

(Ⅱ)设直线 AA_1 与平面 BCC_1B_1 的距离为$\sqrt{3}$，求二面角 A_1-AB-C 的大小.

解析：(Ⅰ)由已知数据结合三垂线定理可得；

(Ⅱ)作辅助线可证∠A_1FD 为二面角 A_1-AB-C 的平面角，解三角形由反三角函数可得.

答案：(Ⅰ)∵$A_1D\perp$平面 ABC，$A_1D\subset$平面 AA_1C_1C，

∴平面 $AA_1C_1C\perp$平面 ABC，又 BC⊥AC

∴BC⊥平面 AA_1C_1C，连结 A_1C，

由侧面 AA_1C_1C 为菱形可得 $AC_1\perp A_1C$，

由三垂线定理可得 $AC_1\perp A_1B$；

(Ⅱ)∵BC⊥平面 AA_1C_1C，BC⊂平面 BCC_1B_1，

∴平面AA_1C_1C⊥平面BCC_1B_1，
作A_1E⊥CC_1，E为垂足，可得A_1E⊥平面BCC_1B_1，
又直线AA_1∥平面BCC_1B_1，
∴A_1E为直线AA_1与平面BCC_1B_1的距离，即$A_1E=\sqrt{3}$，
∵A_1C为∠ACC_1的平分线，∴$A_1D=A_1E=\sqrt{3}$，
作DF⊥AB，F为垂足，连结A_1F，
由三垂线定理可得A_1F⊥AB，
∴∠A_1FD为二面角A_1-AB-C的平面角，
由$AD=\sqrt{AA_1^2-A_1D^2}=1$可知D为AC中点，
∴$DF=\frac{1}{2}\times\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，∴$\tan\angle A_1FD=\frac{A_1D}{DF}=\sqrt{15}$，
∴二面角A_1-AB-C的大小为$\arctan\sqrt{15}$

20.(12分)设每个工作日甲、乙、丙、丁4人需使用某种设备的概率分别为0.6、0.5、0.5、0.4，各人是否需使用设备相互独立.
(Ⅰ)求同一工作日至少3人需使用设备的概率；
(Ⅱ)X表示同一工作日需使用设备的人数，求X的数学期望.
解析：记A_i表示事件：同一工作日乙丙需要使用设备，i=0，1，2，B表示事件：甲需要设备，C表示事件，丁需要设备，D表示事件：同一工作日至少3人需使用设备
(Ⅰ)$P(D)=P(A_1\cdot B\cdot C+A_2\cdot B+A_2\cdot\overline{B}\cdot C)$，代入计算即可，
(Ⅱ)X的可能取值为0，1，2，3，4，分别求出PX_i，再利用数学期望公式计算即可.
答案：记A_i表示事件：同一工作日乙丙需要使用设备，i=0，1，2，
B表示事件：甲需要设备，C表示事件，丁需要设备，D表示事件：同一工作日至少3人需使用设备
(Ⅰ)$D=A_1\cdot B\cdot C+A_2\cdot B+A_2\cdot\overline{B}\cdot C$，

$P(B)=0.6$，$P(C)=0.4$，$P(A_i)=C_2^i\times0.5^2$，i=0，1，2

所以$P(D)=P(A_1\cdot B\cdot C+A_2\cdot B+A_2\cdot\overline{B}\cdot C)=P(A_1\cdot B\cdot C)+P(A_2\cdot B)+P(A_2\cdot\overline{B}\cdot C)=0.31$

(Ⅱ)X的可能取值为0，1，2，3，4

$P(X=0)=P(\overline{B}\cdot A_0\cdot\overline{C})=(1-0.6)\times0.5^2\times(1-0.4)=0.06$

$P(X=1)=P(B\cdot A_0\cdot\overline{C}+\overline{B}\cdot A_0\cdot C+\overline{B}\cdot A_1\cdot\overline{C})=0.6\times0.5^2\times(1-0.4)+(1-0.6)\times0.5^2\times0.4+(1-0.6)\times2\times0.5^2\times(1-0.4)=0.25$
$P(X=4)=P(A_2\cdot B\cdot C)=0.5^2\times0.6\times0.4=0.06$，
$P(X=3)=P(D)-P(X=4)=0.25$，
$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)-P(X=4)=1-0.06-0.25-0.25-0.06=0.38$.
故数学期望$EX=0\times0.06+1\times0.25+2\times0.38+3\times0.25+4\times0.06=2$.

21.(12 分)已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与 C 的交点为 Q，且$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$.

(Ⅰ)求 C 的方程;

(Ⅱ)过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′ 与 C 相交于 M、N 两点，且 A、M、B、N 四点在同一圆上，求 l 的方程.

解析：(Ⅰ)设点 Q 的坐标为$(x_0,4)$，把点 Q 的坐标代入抛物线 C 的方程，求得 $x_0=\frac{8}{p}$，根据$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$求得 p 的值，可得 C 的方程.

(Ⅱ)设 l 的方程为 $x=my+1\ (m\neq0)$，代入抛物线方程化简，利用韦达定理、中点公式、弦长公式求得弦长$|AB|$.把直线 l′ 的方程线 l′ 的方程代入抛物线方程化简，利用韦达定理、弦长公式求得$|MN|$.由于 MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于$|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，求得 m 的值，可得直线 l 的方程.

答案：(Ⅰ)设点 Q 的坐标为$(x_0,4)$，把点 Q 的坐标代入抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$，

可得 $x_0=\frac{8}{p}$，∵点 $P(0,4)$，∴$|PQ|=\frac{8}{p}$.

又$|QF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{8}{p}+\frac{p}{2}$，$|QF|=\frac{5}{4}|PQ|$，

∴$\frac{8}{p}+\frac{p}{2}=\frac{5}{4}\times\frac{8}{p}$，求得 $p=2$，或 $p=-2$(舍去).

故 C 的方程为 $y^2=4x$.

(Ⅱ)由题意可得，直线 l 和坐标轴不垂直，设 l 的方程为 $x=my+1\ (m\neq0)$，

代入抛物线方程可得 $y^2-4my-4=0$，∴$y_1+y_2=4m$，$y_1\bullet y_2=-4$.

∴AB 的中点坐标为 $D(2m^2+1,2m)$，弦长$|AB|=\sqrt{m^2+1}|y_1-y_2|=4(m^2+1)$.

又直线 l′ 的斜率为$-m$，∴直线 l′ 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+2m^2+3$.

过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点，若 AB 的垂直平分线 l′ 与 C 相交于 M、N 两点，

把线 l′ 的方程代入抛物线方程可得 $y^2+\frac{4}{m}y-4(2m^2+3)=0$，∴$y_3+y_4=\frac{-4}{m}$，$y_3\bullet y_4=-4(2m^2+3)$.

故线段 MN 的中点 E 的坐标为$(\frac{2}{m^2}+2m^2+3,\ \frac{-2}{m})$，∴$|MN|=\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}|y_3-y_4|=$

$$\frac{4(m^2+1)\sqrt{2m^2+1}}{m^2},$$

∵MN 垂直平分线段 AB，故 AMBN 四点共圆等价于$|AE|=|BE|=\frac{1}{2}|MN|$，∴$\frac{1}{4}\bullet AB^2+DE^2=\frac{1}{4}MN^2$，

∴$4(m^2+1)^2+(2m+\frac{2}{m})^2+(\frac{2}{m^2}+2)^2=\frac{16(m^2+1)^2(2m^2+1)}{m^4}$，化简可得 $m^2-1=0$，

∴$m=\pm1$∴直线 l 的方程为 $x-y-1=0$，或 $x-+y-1=0$.

22.(12 分)函数 $f(x)=\ln(x+1)-\frac{ax}{x+a}(a>1)$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)$，证明：$\frac{2}{n+2}<a_n\leqslant\frac{3}{n+2}$.

解析：(Ⅰ)求函数的导数，通过讨论 a 的取值服务，即可得到 $f(x)$ 的单调性;

(Ⅱ)利用数学归纳法即可证明不等式.

答案：(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1，+\infty)$，$f'(x)=\frac{x[x-(a^2-2a)]}{(x+1)(x+a)^2}$，

①当 $1<a<2$ 时，若 $x\in(-1，a^2-2a)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1，a^2-2a)$ 上是增函数，

若 $x\in(a^2-2a，0)$，则 $f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(a^2-2a，0)$ 上是减函数，

②当 $a=2$ 时，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1，+\infty)$ 上是增函数，

③当 $a>2$ 时，若 $x\in(-1，0)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1，0)$ 上是增函数，

若 $x\in(0，a^2-2a)$，则 $f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(0，a^2-2a)$ 上是减函数，

若 $x\in(a^2-2a，+\infty)$，则 $f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 在 $(a^2-2a，+\infty)$ 上是增函数.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，当 $a=2$ 时，此时函数 $f(x)$ 在 $(-1，+\infty)$ 上是增函数，

当 $x\in(0，+\infty)$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $f(x+1)>\frac{2x}{x+2}$，$(x>0)$，

又由(Ⅰ)知，当 $a=3$ 时，$f(x)$ 在 $(0，3)$ 上是减函数，

当 $x\in(0，3)$ 时，$f(x)<f(0)=0$，$f(x+1)>\frac{3x}{x+2}$,

下面用数学归纳法进行证明 $\frac{2}{n+2}<a_n\leqslant\frac{3}{n+2}$ 成立，

①当 $n=1$ 时，由已知 $\frac{2}{3}<a_1=1$，故结论成立.

②假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $\frac{2}{k+2}<a_k\leqslant\frac{3}{k+2}$,

则当 $n=k+1$ 时，$a_{n+1}=\ln(a_n+1)>\ln(\frac{2}{k+2}+1)>\frac{2\times\frac{2}{k+2}}{\frac{2}{k+2}+2}=\frac{2}{k+3}$,

$a_{n+1}=\ln(a_n+1)<\ln(\frac{3}{k+2}+1)<\frac{3\times\frac{3}{k+2}}{\frac{3}{k+2}+3}=\frac{3}{k+3}$,

即当 $n=k+1$ 时，$\frac{2}{k+3}<a_{k+1}\leqslant\frac{3}{k+3}$ 成立，

综上由①②可知，对任何 $n\in N^*$ 结论都成立.