2018年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)数学文

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合A={x||x|＜2}，B={-2，0，1，2}，则A∩B=(　　)

A.{0，1}

B.{-1，0，1}

C.{-2，0，1，2}

D.{-1，0，1，2}

解析：∵集合A={x||x|＜2}={x|-2＜x＜2}，B={-2，0，1，2}，∴A∩B={0，1}.

答案：A

2.在复平面内，复数$\frac{1}{1-i}$的共轭复数对应的点位于(　　)

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

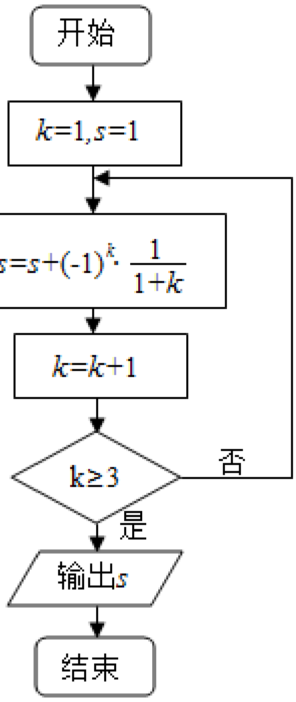
D.第四象限

解析：复数$\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

共轭复数对应点的坐标$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$在第四象限.

答案：D

3.执行如图所示的程序框图，输出的s值为(　　)



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{7}{12}$

解析：在执行第一次循环时，k=1，S=1.

在执行第一次循环时，S=1-$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 由于 k=2≤3，

所以执行下一次循环. S=$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，k=3，直接输出 S=$\frac{5}{6}$.

答案：B

4. 设 a，b，c，d 是非零实数，则“ad=bc”是“a，b，c，d 成等比数列”的(　　)

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：若 a，b，c，d 成等比数列，则 ad=bc，

反之数列-1，-1，1，1. 满足-1×1=-1×1，

但数列-1，-1，1，1 不是等比数列，

即“ad=bc”是“a，b，c，d 成等比数列”的必要不充分条件.

答案：B

5.“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为f，则第八个单音的频率为(　　)

A. $\sqrt[3]{2}f$

B. $\sqrt[3]{2^2}f$

C. $\sqrt[12]{2^5}f$

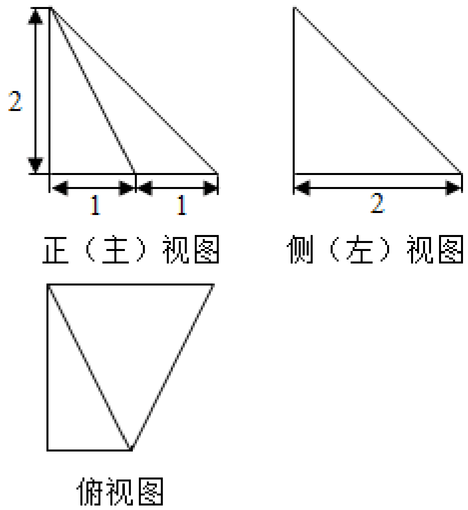
D. $\sqrt[12]{2^7}f$

解析：从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.

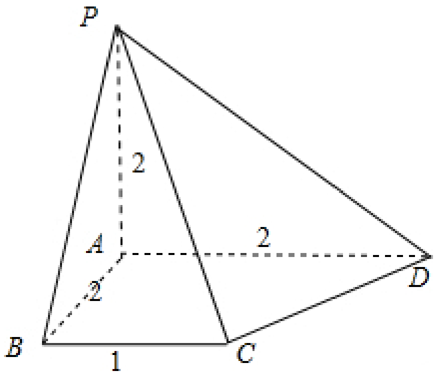
若第一个单音的频率为f，则第八个单音的频率为：$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 ?f = \sqrt[12]{2^7}f$.

答案：D

6.某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为(　　)



A.1
B.2
C.3
D.4
解析：四棱锥的三视图对应的直观图为：PA⊥底面ABCD，

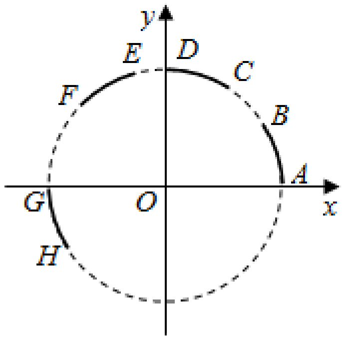


$AC=\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{5}$，PC=3，PD=2$\sqrt{2}$，可得三角形 PCD 不是直角三角形.

所以侧面中有 3 个直角三角形，分别为：△PAB，△PBC，△PAD.

答案：C

7.在平面直角坐标系中，$\overset{\frown}{AB},\overset{\frown}{CD},\overset{\frown}{EF},\overset{\frown}{GH}$ 是圆 $x^2+y^2=1$ 上的四段弧(如图)，点 P 其中一段上，角α 以 Ox 为始边，OP 为终边.若 tanα ＜cosα ＜sinα ，则 P 所在的圆弧是(　　)



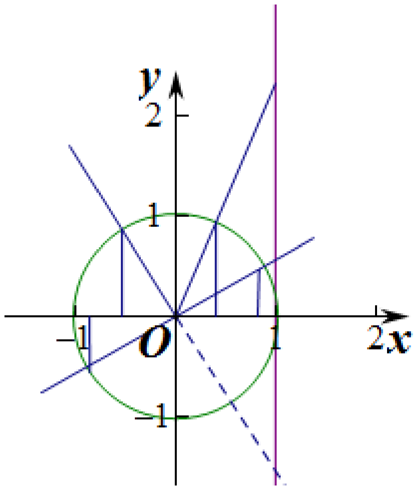
A. $\overset{\frown}{AB}$

B. $\overset{\frown}{CD}$

C. $\overset{\frown}{EF}$

D. $\overset{\frown}{GH}$

解析：A、在 AB 段，正弦线小于余弦线，即 cosα ＜sinα 不成立，故 A 不满足条件.



B、在 CD 段正切线最大，则 cosα ＜sinα ＜tanα ，故 B 不满足条件.
C、在 EF 段，正切线，余弦线为负值，正弦线为正，
满足 tanα ＜cosα ＜sinα ，
D、在 GH 段，正切线为正值，正弦线和余弦线为负值，
满足 cosα ＜sinα ＜tanα 不满足 tanα ＜cosα ＜sinα .
答案：C

8.设集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}，则(　　)
A.对任意实数 a，(2，1)∈A
B.对任意实数 a，(2，1)$\notin$A
C.当且仅当 a＜0 时，(2，1)$\notin$A
D.当且仅当 a≤$\frac{3}{2}$时，(2，1)$\notin$A
解析：当 a=-1 时，集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}={(x，y)|x-y≥1，-x+y＞4，x+y≤2}，显然(2，1)不满足，-x+y＞4，x+y≤2，所以 A，C 不正确；
当 a=4，集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}={(x，y)|x-y≥1，4x+y＞4，x-4y≤2}，显然(2，1)在可行域内，满足不等式，所以 B 不正确.
答案：D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.设向量$\vec{a}$=(1，0)，$\vec{b}$=(-1，m).若$\vec{a}\perp\left(m\vec{a}-\vec{b}\right)$，则 m=________.

解析：向量$\vec{a}$=(1，0)，$\vec{b}$=(-1，m)，$m\vec{a}-\vec{b}$=(m+1，-m).

∵$\vec{a}\perp\left(m\vec{a}-\vec{b}\right)$，∴m+1=0，解得 m=-1.

答案：-1

10.已知直线 l 过点(1，0)且垂直于 x 轴.若 l 被抛物线 y^2=4ax 截得的线段长为 4，则抛物线的焦点坐标为________.
解析：∵直线 l 过点(1，0)且垂直于 x 轴，∴x=1，

代入到 y^2=4ax，可得 y^2=4a，显然 a＞0，∴y=±2$\sqrt{a}$，

∵l 被抛物线 y^2=4ax 截得的线段长为 4，

∴4$\sqrt{a}$=4，解得 a=1，∴y^2=4x，∴抛物线的焦点坐标为(1，0).

答案：(1，0)

11.能说明“若 a＞b，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”为假命题的一组 a，b 的值依次为________.

解析：当 a＞0，b＜0 时，满足 a＞b，但$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$为假命题，故答案可以是 a=1，b=-1.

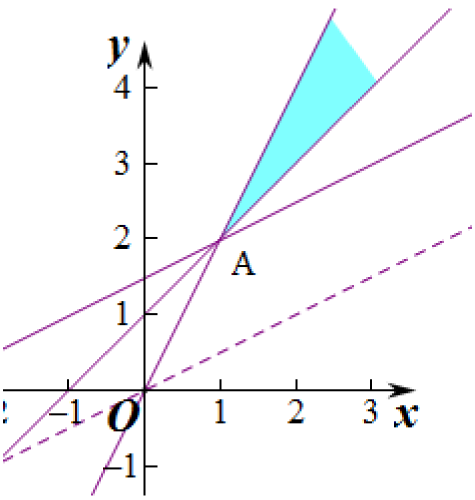
答案：a=1，b=-1

12.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$(a＞0)的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 a=________.

解析：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$(a＞0)的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，可得：$\frac{a^2+4}{a^2}=\frac{5}{4}$，解得 a=4.

答案：4

13.若 x，y 满足 x+1≤y≤2x，则 2y-x 的最小值是________.
解析：作出不等式组对应的平面区域如图：



设 z=2y-x，则 y=$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，平移 y=$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，

由图象知当直线 y=$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 经过点 A 时，

直线的截距最小，此时 z 最小，

由$\begin{cases}x+1=y,\\y=2x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$即 A(1，2)，此时 z=2×2-1=3.

答案：3

14.若△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$($a^2+c^2-b^2$)，且∠C 为钝角，则∠B=________；$\frac{c}{a}$的取值范围是________.

解析：△ABC 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$($a^2+c^2-b^2$)，

可得：$\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+c^2-b^2)=\frac{1}{2}ac\sin B$，$\frac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$，

可得：$\tan B=\sqrt{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，∠C 为钝角，$A\in(0,\frac{\pi}{6})$，$\cot A\in(3,+\infty)$.

$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin(A+B)}{\sin A}=\cos B+\cot A\sin B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cot A\in(2,+\infty)$.

答案：$\frac{\pi}{3}$；$(2,+\infty)$

三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.设$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=\ln2$，$a_2+a_3=5\ln2$.
(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)求$e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n}$.

解析：(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；
(Ⅱ)化简数列的通项公式，利用等比数列求和公式求解即可.
答案：(Ⅰ)$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_1=\ln2$，$a_2+a_3=5\ln2$.
可得：$2a_1+3d=5\ln2$，可得 $d=\ln2$，
$\{a_n\}$的通项公式；$a_n=a_1+(n-1)d=n\ln2$，

(Ⅱ)$e^{a_n}=e^{ln2^n}=2^n$，$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\ldots+e^{a_n}=2^1+2^2+2^3+\ldots+2^n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$.

16.已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

(Ⅰ)求 f(x)的最小正周期；

(Ⅱ)若 f(x)在区间$[-\frac{\pi}{3}$，m]上的最大值为$\frac{3}{2}$，求 m 的最小值.

解析：(I)运用二倍角公式的降幂公式和两角差的正弦公式和周期公式，即可得到所求值；

(Ⅱ)求得 $2x-\frac{\pi}{6}$的范围，结合正弦函数的图象可得 $2m-\frac{\pi}{6}\geq\frac{\pi}{2}$，即可得到所求最小值.

答案：(I)函数 f(x)=$\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，

f(x)的最小正周期为 T=$\dfrac{2\pi}{2}$=π；

(II)若 f(x)在区间[$-\dfrac{\pi}{3}$，m]上的最大值为$\dfrac{3}{2}$，

可得$2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{5\pi}{6},2m-\dfrac{\pi}{6}]$，即有 2m$-\dfrac{\pi}{6}\geq\dfrac{\pi}{2}$，解得 m≥$\dfrac{\pi}{3}$，则 m 的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$.

17.电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.
(Ⅰ)从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；
(Ⅱ)随机选取 1 部电影，估计这部电影没有获得好评的概率；
(Ⅲ)电影公司为增加投资回报，拟改变投资策略，这将导致不同类型电影的好评率发生变化.假设表格中只有两类电影的好评率数据发生变化，那么哪类电影的好评率增加 0.1，哪类电影的好评率减少 0.1，使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大？(只需写出结论)

解析：(Ⅰ)先求出总数，再求出则第四类电影的频率为$\dfrac{200}{2000}$=0.1，即可求出答案，
(Ⅱ)根据互斥事件的概率公式计算即可，
(Ⅲ)由题意可得，增加电影部数多的，减少部数少的，即可得到.
答案：(Ⅰ)总的电影部数为 140+50+300+200+800+510=2000 部，

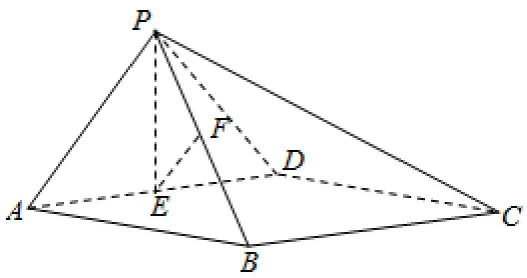
则第四类电影的频率为$\dfrac{200}{2000}$=0.1，

故从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率 0.1×0.25=0.025，
(Ⅱ)获得好评的电影部数为 140×0.4+50×0.2+300×0.15+200×0.25+800×0.2+510×0.1=372，

估计这部电影没有获得好评的概率为 1-$\dfrac{372}{2000}$=0.814，

(Ⅲ)故只要第五类电影的好评率增加 0.1，第二类电影的好评率减少 0.1，则使得获得好评的电影总部数与样本中的电影总部数的比值达到最大.

18.如图，在四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为矩形，平面 PAD⊥平面 ABCD，PA⊥PD，PA=PD，E，F 分别为 AD，PB 的中点.



(Ⅰ)求证：$PE\perp BC$；

(Ⅱ)求证：平面 PAB⊥平面 PCD；

(Ⅲ)求证：EF∥平面 PCD.

解析：(Ⅰ)由等腰三角形的三线合一性质和矩形的对边平行性质，即可得证；

(Ⅱ)作出平面 PAB 和平面 PCD 的交线，注意运用公理 4，再由面面垂直的性质和两个平面所成角的定义，即可得证；

(Ⅲ)取 PC 的中点 H，连接 DH，FH，运用中位线定理和平行四边形的判断和性质，结合线面平行的判定定理，即可得证.

答案：(Ⅰ)$PA=PD$，E 为 AD 的中点，可得 $PE\perp AD$，

底面 ABCD 为矩形，可得 $BC\parallel AD$，则 $PE\perp BC$；

(Ⅱ)由于平面 PAB 和平面 PCD 有一个公共点 P，且 $AB\parallel CD$，

在平面 PAB 内过 P 作直线 $PG\parallel AB$，

可得 $PG\parallel CD$，即有平面 PAB∩平面 PCD=PG，

由平面 PAD⊥平面 ABCD，又 $AB\perp AD$，

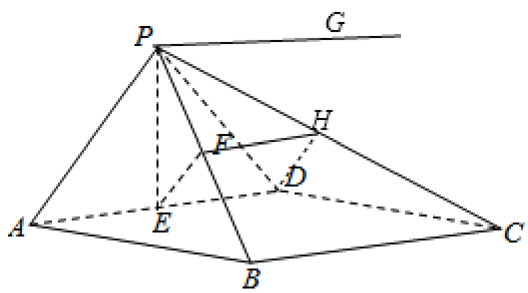
可得 AB⊥平面 PAD，即有 $AB\perp PA$，$PA\perp PG$；

同理可得 $CD\perp PD$，即有 $PD\perp PG$，

可得∠APD 为平面 PAB 和平面 PCD 的平面角，

由 $PA\perp PD$，可得平面 PAB⊥平面 PCD；

(Ⅲ)取 PC 的中点 H，连接 DH，FH，



在三角形 PCD 中，FH 为中位线，可得 $FH\parallel BC$，$FH=\dfrac{1}{2}BC$，由 $DE\parallel BC$，$DE=\dfrac{1}{2}BC$，

可得 $DE=FH$，$DE\parallel FH$，四边形 EFHD 为平行四边形，

可得 $EF\parallel DH$，EF$\not\subset$平面 PCD，DH$\subset$平面 PCD，即有 EF∥平面 PCD.

19. 设函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在点$(2，f(2))$处的切线斜率为 0，求 a；

(Ⅱ)若 $f(x)$在 $x=1$ 处取得极小值，求 a 的取值范围.

解析：(Ⅰ)求得 $f(x)$的导数，由导数的几何意义可得 $f'(2)=0$，解方程可得 a 的值；

(Ⅱ)求得 $f(x)$的导数，注意分解因式，讨论 $a=0$，$a=1$，$a>1$，$0<a<1$，$a<0$，由极小值的

定义，即可得到所求 a 的范围.

答案：(Ⅰ)函数 $f(x)=[ax^2-(3a+1)x+3a+2]e^x$ 的导数为 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2，f(2))$ 处的切线斜率为 0，

可得 $(4a-2a-2+1)e^2=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$；

(Ⅱ) $f(x)$ 的导数为 $f'(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x=(x-1)(ax-1)e^x$，

若 $a=0$ 则 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；$x>1$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

$x=1$ 处 $f(x)$ 取得极大值，不符题意；

若 $a>0$，且 $a=1$，则 $f'(x)=(x-1)^2e^x\geqslant 0$，$f(x)$ 递增，无极值；

若 $a>1$，则 $\frac{1}{a}<1$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}，1)$ 递减；在 $(1，+\infty)$，$(-\infty，\frac{1}{a})$ 递增，

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值；

若 $0<a<1$，则 $\frac{1}{a}>1$，$f(x)$ 在 $(1，\frac{1}{a})$ 递减；在 $(\frac{1}{a}，+\infty)$，$(-\infty，1)$ 递增，

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不符题意；

若 $a<0$，则 $\frac{1}{a}<1$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a}，1)$ 递增；在 $(1，+\infty)$，$(-\infty，\frac{1}{a})$ 递减，

可得 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，不符题意.

综上可得，a 的范围是 $(1，+\infty)$.

20. 已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$，焦距为 $2\sqrt{2}$. 斜率为 k 的直线 l 与椭圆 M 有两个不同的交点 A，B.

(Ⅰ)求椭圆 M 的方程；

(Ⅱ)若 $k=1$，求 $|AB|$ 的最大值；

(Ⅲ)设 $P(-2，0)$，直线 PA 与椭圆 M 的另一个交点为 C，直线 PB 与椭圆 M 的另一个交点为 D. 若 C，D 和点 $Q(-\frac{7}{4},\frac{1}{4})$ 共线，求 k.

解析：(Ⅰ)根据椭圆的离心率公式即可求得 a 的值，即可求得 b 的值，求得椭圆方程；

(Ⅱ)当 $k=1$ 时，设直线 AB 的方程，代入椭圆方程，根据弦长公式即可求得 $|AB|$ 的最大值；

(Ⅲ)求得直线 PA 的方程，代入椭圆方程，即可根据韦达定理即可求得 C 点坐标，同理求得 D 点坐标，即可求得 $\overrightarrow{QC}$ 与 $\overrightarrow{QD}$，根据向量的共线定理，即可求得直线 AB 的斜率.

答案：(Ⅰ)由题意可知：$2c=2\sqrt{2}$，则 $c=\sqrt{2}$，椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $a=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=1$，

∴椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

(Ⅱ)设直线 AB 的方程为：$y=x+m$，$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

联立 $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 整理得：$4x^2+6mx+3m^2-3=0$，$\triangle=(6m)^2-4\times 4\times 3(m^2-1)>0$，整理得：$m^2<4$，

$x_1+x_2=-\frac{3m}{2}$，$x_1x_2=\frac{3\left(m^2-1\right)}{4}$，

$\therefore\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{4-m^2}$，

∴当 m=0 时，|AB|取最大值，最大值为$\sqrt{6}$；

(III)设直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{y_1}{x_1+2}$，直线 PA 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

联立$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2\left(x+2\right)},\\ \frac{x^2}{3}+y^2=1,\end{cases}$

消去 y 整理得：$(x_1^2+4x_1+4+3y_1^2)x^2+12y_1^2x+(12y_1^2-3x_1^2-12x_1-12)=0$，

由$\frac{x_1^2}{3}+y_1^2=1$代入上式得，整理得：$(4x_1+7)x^2+(12-4x_1^2)x-(7x_1^2+12x_1)=0$，

$x_1\cdot x_C=-\frac{\left(7x_1^2+12x_1\right)}{4x_1+7}$，$x_C=-\frac{7x_1+12}{4x_1+7}$，

则 $y_C=\frac{y_1}{x_1+2}\left(\frac{-7x_1+12}{4x_1+7}+2\right)=\frac{y_1}{4x_1+7}$，

则 $C(\frac{-7x_1+12}{4x_1+7},\frac{y_1}{4x_1+7})$，同理可得：$D(\frac{-7x_2+12}{4x_2+7},\frac{y_2}{4x_2+7})$，由 $Q(-\frac{7}{4},\frac{1}{4})$，

则$\overrightarrow{QC}=\left(\frac{1}{4\left(4x_1+7\right)},\frac{4y_1-4x_1-7}{4\left(4x_1+7\right)}\right),\overrightarrow{QD}=\left(\frac{1}{4\left(4x_2+7\right)},\frac{4y_2-x_2-7}{4\left(4x_2+7\right)}\right)$，

由$\overrightarrow{QC}$与$\overrightarrow{QD}$三点共线，则$\frac{1}{4\left(4x_1+7\right)}\times\frac{4y_2-4x_2-7}{4\left(4x_2+7\right)}=\frac{1}{4\left(4x_2+7\right)}\times\frac{4y_1-4x_1-7}{4\left(4x_1+7\right)}$，

整理得：$x_1-x_1=y_1-y_1$，则直线 AB 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，∴k 的值为 1.