

## 2018 年河南省南阳市方城县中考一模试卷数学

一、选择题(每小题 3 分, 共 30 分)下列各小题均有四个答案, 其中只有一个是正确的.

1. 下列各数中, 比 $-\frac{1}{2}$ 小的数是( )

A. -1

B.  $\sqrt{3}$

C.  $\frac{1}{2}$

D. 0

解析:  $-1 < -\frac{1}{2} < 0 < \sqrt{3}$ , 最小的数是-1.

答案: A

2. 近期浙江大学的科学家们研制出今为止世界上最轻的材料, 这种被称为“全碳气凝胶”的固态材料密度仅每立方厘米 0.00016 克, 数据 0.00016 用科学记数法表示应是( )

A.  $1.6 \times 10^4$

B.  $0.16 \times 10^{-3}$

C.  $1.6 \times 10^{-4}$

D.  $16 \times 10^{-5}$

解析: 绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为  $a \times 10^n$ , 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.  $0.00016 = 1.6 \times 10^{-4}$ .

答案: C

3. 下列计算正确的是( )

A.  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

B.  $\sqrt{20} = 2\sqrt{10}$

C.  $\sqrt{4} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

D.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$

解析: A、根据二次根式的乘法运算法则,  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ , 运算正确, 故本选项正确;

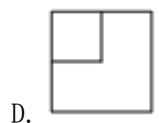
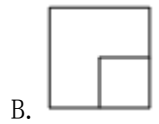
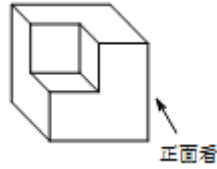
B、 $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ , 所以本项运算错误, 故本选项错误;

C、 $\sqrt{4} = 2$ , 与 $\sqrt{2}$ 不是同类二次根式, 不能进行合并同类二次根式, 故本选项错误;

D、 $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$ ，所以本项中的二次根式化简错误，故本选项错误。

答案：A

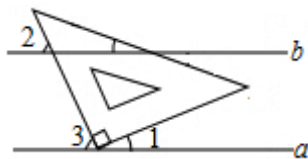
4. 如图，在正方体的一角截去一个小正方体，所得立体图形的主视图是( )



解析：从正面看是一个大正方形内的左上角是一个小正方形。

答案：D

5. 如图，直线  $a \parallel b$ ， $Rt\triangle ABC$  的直角顶点  $B$  落在直线  $a$  上，若  $\angle 1 = 27^\circ$ ，则  $\angle 2$  的度数是( )



A.  $53^\circ$

B.  $63^\circ$

C.  $73^\circ$

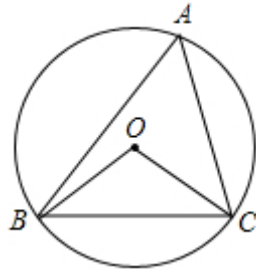
D.  $83^\circ$

解析： $\because \angle 1 = 27^\circ$ ， $\therefore \angle 3 = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$ 。

$\because a \parallel b$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 3 = 63^\circ$ 。

答案：B

6. 如图， $\odot O$  的半径为 2， $\triangle ABC$  是  $\odot O$  的内接三角形，连接  $OB$ 、 $OC$ 。若  $\angle BAC$  与  $\angle BOC$  互补，则弦  $BC$  的长为( )



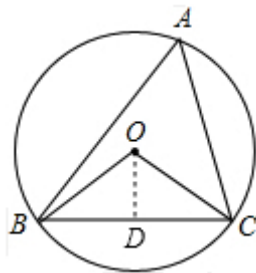
A.  $4\sqrt{3}$

B.  $3\sqrt{3}$

C.  $2\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{3}$

解析:  $\because \angle BAC$  与  $\angle BOC$  互补,  $\therefore \angle BAC + \angle BOC = 180^\circ$ ,  $\because \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ ,  $\therefore \angle BOC = 120^\circ$ ,  
过 O 作  $OD \perp BC$ , 垂足为 D,



$\therefore BD = CD$ ,

$\because OB = OC$ ,  $\therefore OB$  平分  $\angle BOC$ ,  $\therefore \angle DOC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle OCD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,

在  $Rt\triangle DOC$  中,  $OC = 2$ ,  $\therefore OD = 1$ ,  $\therefore DC = \sqrt{3}$ ,  $\therefore BC = 2DC = 2\sqrt{3}$ .

答案: C

7. 不等式组  $\begin{cases} 2x - 1 \geq 5, \\ 8 - 4x < 0 \end{cases}$  的解集是 ( )

A.  $x > 2$

B.  $x \geq 3$

C.  $2 < x \leq 3$

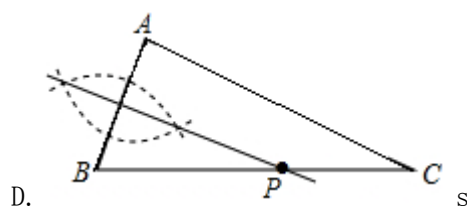
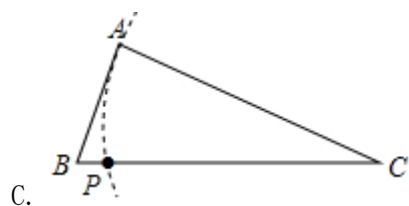
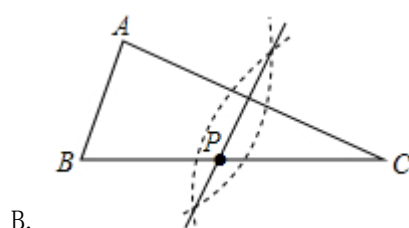
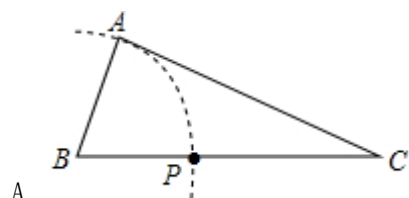
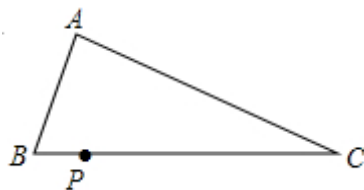
D.  $x \geq 2$

解析:  $\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 \text{ ①,} \\ 8 - 4x < 0 \text{ ②,} \end{cases}$  解不等式①, 得  $x \geq 3$ ; 解不等式②, 得  $x > 2$ ;  $\therefore$  不等式组的解集为  $x$

$\geq 3$ .

答案: B

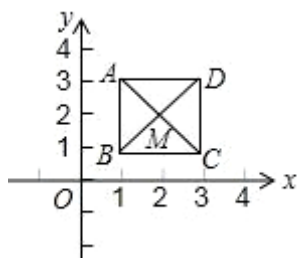
8. 如图，已知 $\triangle ABC$  ( $AC < BC$ )，用尺规在  $BC$  上确定一点  $P$ ，使  $PA+PC=BC$ ，则符合要求的作图痕迹是( )



解析：D 选项中作的是  $AB$  的中垂线， $\therefore PA=PB$ ，  
 $\therefore PB+PC=BC$ ， $\therefore PA+PC=BC$ 。

答案：D

9. 如图，已知正方形  $ABCD$ ，顶点  $A(1, 3)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(3, 1)$ 。规定“把正方形  $ABCD$  先沿  $x$  轴翻折，再向左平移一个单位”为一次变换。如此这样，连续经过 2018 次变换后，正方形  $ABCD$  的对角线交点  $M$  的坐标为( )

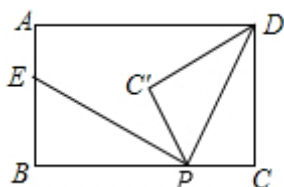


A. (2018, 2)

- B. (2018, -2)  
 C. (-2016, 2)  
 D. (2016, 2)

解析：∵正方形 ABCD，顶点 A(1, 3)、B(1, 1)、C(3, 1). ∴点 M 的坐标为(2, 2)，  
 根据题意得：第 1 次变换后的点 M 的对应点的坐标为(2-1, -2)，即(1, -2)，  
 第 2 次变换后的点 M 的对应点的坐标为：(2-2, 2)，即(0, 2)，  
 第 3 次变换后的点 M 的对应点的坐标为(2-3, -2)，即(-1, -2)，  
 第 n 次变换后的点 M 的对应点的为：当 n 为奇数时为(2-n, -2)，当 n 为偶数时为(2-n, 2)，  
 ∴连续经过 2018 次变换后，点 M 的坐标变为(-2016, 2).  
 答案：C

10. 如图，矩形 ABCD 中，AB=3，BC=5，点 P 是 BC 边上的一个动点(点 P 不与点 B, C 重合)，  
 现将△PCD 沿直线 PD 折叠，使点 C 落下点 C<sub>1</sub>处；作∠BPC<sub>1</sub>的平分线交 AB 于点 E. 设 BP=x，  
 BE=y，那么 y 关于 x 的函数图象大致应为( )



- A.
- B.
- C.
- D.

解析：由翻折的性质得， $\angle CPD = \angle C'PD$ ，  
 $\because PE$  平分  $\angle BPC'$ ， $\therefore \angle BPE = \angle C'PE$ ， $\therefore \angle BPE + \angle CPD = 90^\circ$ ，  
 $\because \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \angle CPD + \angle PDC = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BPE = \angle PDC$ ，

又 $\because \angle B = \angle C = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle PCD \sim \triangle EBP$ ， $\therefore \frac{BE}{PC} = \frac{PB}{CD}$ ，即 $\frac{y}{5-x} = \frac{x}{3}$ ，

$\therefore y = \frac{1}{3}x(5-x) = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{12}$ ， $\therefore$ 函数图象为C选项图象.

答案：C

二、选择题(每小题3分，共15分)

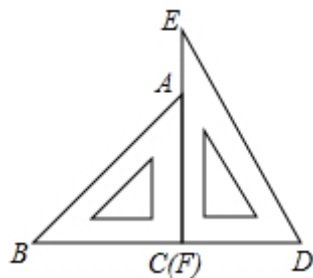
11. 计算： $2\cos 60^\circ - (3+1)^0 =$ \_\_\_\_\_.

解析：原式 $= 2 \times \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$ .

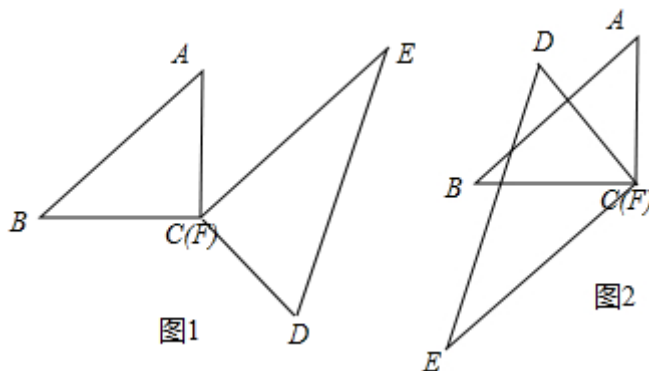
答案：0

12. 一副三角尺按如图的位置摆放(顶点C与F重合，边CA与边FE叠合，顶点B、C、D在一条直线上). 将三角尺DEF绕着点F按顺时针方向旋转 $n^\circ$ 后( $0 < n < 180$ )，如果 $EF \parallel AB$ ，那么n的值是\_\_\_\_\_.

解析：①如图1中， $EF \parallel AB$ 时， $\angle ACE = \angle A = 45^\circ$ ， $\therefore$ 旋转角 $n = 45$ 时， $EF \parallel AB$ .



②如图2中， $EF \parallel AB$ 时， $\angle ACE + \angle A = 180^\circ$ ， $\therefore \angle ACE = 135^\circ$ ， $\therefore$ 旋转角 $n = 360 - 135 = 225$ ，



$\because 0 < n < 180$ ， $\therefore$ 此种情形不合题意，

答案：45

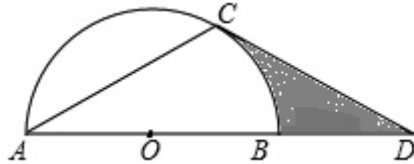
13. 在一个不透明的口袋中放入只有颜色不同的白球6个，黑球4个，黄球n个，搅匀后随机摸出一个球恰好是黄球的概率是 $\frac{1}{3}$ . 则 $n =$ \_\_\_\_\_.

解析： $\because$ 口袋中装有白球6个，黑球4个，黄球n个， $\therefore$ 球的总个数为 $6+4+n$ ，

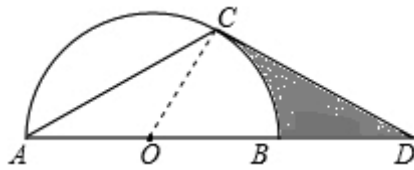
∴从中随机摸出一个球，摸到黄球的概率为 $\frac{1}{3}$ ，∴ $\frac{n}{6+4+n} = \frac{1}{3}$ ，解得， $n=5$ .

答案：5

14. 如图，点 D 在⊙O 的直径 AB 的延长线上，点 C 在⊙O 上，且 AC=CD，∠ACD=120°，CD 是⊙O 的切线：若⊙O 的半径为 2，则图中阴影部分的面积为\_\_\_\_\_.



解析：连接 OC，



∵AC=CD，∠ACD=120°，∴∠CAD=∠D=30°，

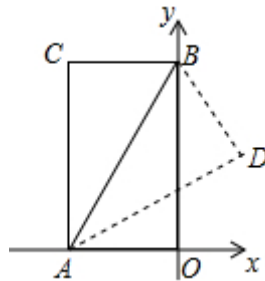
∵DC 切⊙O 于 C，∴OC⊥CD，∴∠OCD=90°，∴∠COD=60°，

在 Rt△OCD 中，∠OCD=90°，∠D=30°，OC=2，∴CD=2√3，

∴阴影部分的面积是  $S_{\triangle OCD} - S_{\text{扇形} COB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi \times 2^2}{360} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$ .

答案：2√3 -  $\frac{2}{3}\pi$

15. 如图，在矩形 AOB C 中，O 为坐标原点，OA、OB 分别在 x 轴、y 轴上，点 B 的坐标为(0, 3√3)，∠ABO=30°，将△ABC 沿 AB 所在直线对折后，点 C 落在点 D 处，则点 D 的坐标为\_\_\_\_\_.



解析：如图，过点 D 作 DM⊥x 轴于点 M，

∵四边形 AOB C 是矩形，∠ABO=30°，点 B 的坐标为(0, 3√3)，

∴AC=OB=3√3，∠CAB=30°，∴BC=AC · tan30° = 3√3 ×  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  = 3，

∵将△ABC沿AB所在直线对折后，点C落在点D处，∴∠BAD=30°，AD=3√3，

∵∠CAB=∠BAD=30°，∴∠DAM=30°，∴DM=1/2 AD = 3/2 √3，

∴AM=3√3 × cos 30° = 9/2，∴MO=9/2 - 3 = 3/2，∴点D的坐标为(3/2, 3/2 √3)。

答案：(3/2, 3/2 √3)

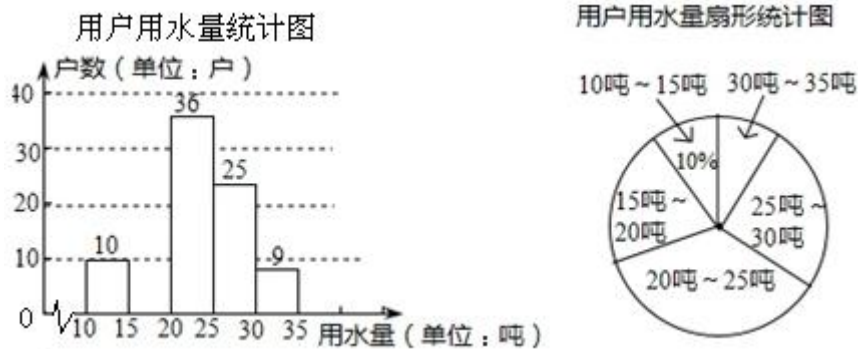
### 三、解答题(本题共8分，满分75分)

16. 先化简，再求值： $(1 - \frac{1}{m+1}) \div \frac{m}{m^2 + 2m + 1}$ ，其中  $m = \sqrt{5} - 1$ 。

解析：根据分式的运算法则即可求出答案。

答案：当  $m = \sqrt{5} - 1$  时，原式 =  $\frac{m}{m+1} \cdot \frac{(m+1)^2}{m} = m+1 = \sqrt{5}$ 。

17. 某市为提倡节约用水，准备实行自来水“阶梯计费”方式，用户用水不超出基本用水量的部分享受基本价格，超出基本用水量的部分实行加价收费，为更好地做决策，自来水公司随机抽取部分用户的用水量数据，并绘制了如图不完整的统计图(每组数据包括最大值但不包括最小值)，请你根据统计图解决下列问题：



(1) 此次抽样调查的样本容量是\_\_\_\_\_。

(2) 补全左侧统计图，并求扇形统计图中“25吨~30吨”部分的圆心角度数。

(3) 如果自来水公司将基本用水量定为每户25吨，那么该地区6万用户中约有多少用户的用水全部享受基本价格？

解析：(1) 根据统计图可知“10吨~15吨”的用户10户占10%，从而可以求得此次调查抽取的户数；

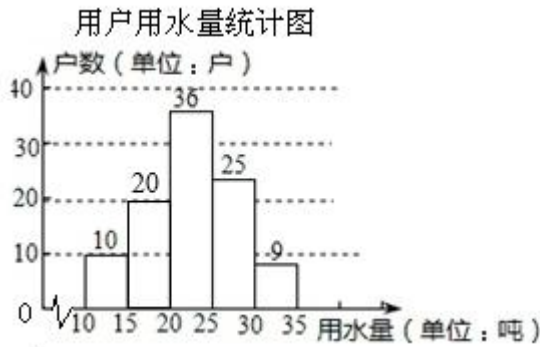
(2) 根据(1)中求得的用户数与条形统计图可以得到“15吨~20吨”的用户数，再用360°乘以“25吨~30吨”户数所占百分比；

(3) 根据前面统计图的信息可以得到该地6万用户中约有多少用户的用水全部享受基本价格。

答案：(1) 此次抽样调查的样本容量是  $10 \div 10\% = 100$ ，

(2) 用水量在15~20的户数为  $100 - (10 + 36 + 25 + 9) = 20$ ，补全图形如下：



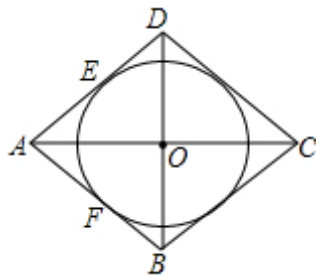


其中扇形统计图中“25吨~30吨”部分的圆心角度数为  $360^\circ \times \frac{25}{100} = 90^\circ$ ;

$$(3) 60000 \times \frac{10 + 20 + 36}{100} = 39600 \text{ (户)},$$

答: 该地区 6 万用户中约有 39600 户的用水全部享受基本价格.

18. 如图, 已知  $\odot O$  与等腰  $\triangle ABD$  的两腰  $AB$ 、 $AD$  分别相切于点  $E$ 、 $F$ , 连接  $AO$  并延长到点  $C$ , 使  $OC=AO$ , 连接  $CD$ 、 $CB$ .



(1) 试判断四边形  $ABCD$  的形状, 并说明理由;

(2) 若  $AB=4\text{cm}$ , 填空:

①当  $\odot O$  的半径为 \_\_\_\_\_  $\text{cm}$  时,  $\triangle ABD$  为等边三角形;

②当  $\odot O$  的半径为 \_\_\_\_\_  $\text{cm}$  时, 四边形  $ABCD$  为正方形.

解析: (1) 由  $AB$ 、 $AD$  分别相切于点  $E$ 、 $F$ , 得到  $\angle EAO = \angle FAO$ , 于是得到  $OD=OB$ , 根据  $AO=OC$ , 推出四边形  $ABCD$  是平行四边形, 于是得到结论;

(2) ①连接  $OE$  由切线的性质得到  $OE \perp AD$ , 由  $\triangle ABD$  为等边三角形, 得到  $BD=AB=AD=4$ , 根据直角三角形的性质得到结论由正方形的性质得到  $\angle DAO = \angle ADO = 45^\circ$ , 由  $AD=AB=4$ , 得到

$OA=OD=2\sqrt{2}$ , 根据等腰直角三角形的性质即可得到结论.

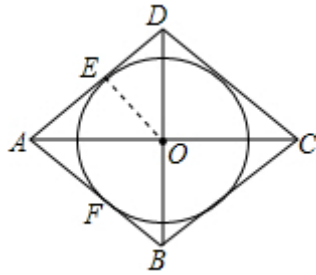
答案: (1) 四边形  $ABCD$  是菱形,

理由如下:  $\because AB$ 、 $AD$  分别相切于点  $E$ 、 $F$ ,  $\therefore \angle EAO = \angle FAO$ ,  $\therefore OD=OB$ ,

$\because AO=OC$ ,  $\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形,  $\because AB=AD$ ,  $\therefore$  平行四边形  $ABCD$  是菱形;

(2) ①当  $\odot O$  的半径为 3 时,  $\triangle ABD$  为等边三角形;

连接  $OE$ ,  $\because AD$  切  $\odot O$  于点  $E$ ,  $\therefore OE \perp AD$ ,



$\because \triangle ABD$  为等边三角形,  $\therefore BD=AB=AD=4$ ,  $\therefore \angle DAO=30^\circ$ ,

$$\therefore OD = \frac{1}{2}BD = 2, AO = 2\sqrt{3}, \therefore OE = \frac{1}{2}AO = \sqrt{3},$$

$\therefore$  当  $\odot O$  的半径为  $\sqrt{3}$  时,  $\triangle ABD$  为等边三角形;

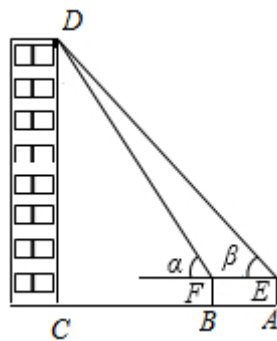
② 当  $\odot O$  的半径为 2cm 时, 四边形 ABCD 为正方形;

如图,  $\therefore \angle DAO = \angle ADO = 45^\circ$ ,

$\because AD=AB=4$ ,  $\therefore OA=OD=2\sqrt{2}$ , 由 (2) 知,  $OE \perp AD$ ,  $\therefore OE=AE=2$ ,

$\therefore$  当  $\odot O$  的半径为 2cm 时, 四边形 ABCD 为正方形.

19. 如图, 某兴趣小组用高为 1.6 米的仪器测量塔 CD 的高度. 由距塔 CD 一定距离的 A 处用仪器观察建筑物顶部 D 的仰角为  $\beta$ , 在 A 和 C 之间选一点 B, 由 B 处用仪器观察建筑物顶部 D 的仰角为  $\alpha$ . 测得 A, B 之间的距离为 10 米,  $\tan \alpha = 1.6$ ,  $\tan \beta = 1.2$ , 试求塔 CD 的大约高度.

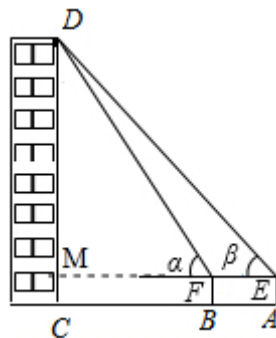


解析: CD 与 EF 的延长线交于点 M, 设  $DM=x$  米. 由三角函数的定义得到, 在  $Rt\triangle DMF$  中,  $\frac{DM}{FM}$

$=\tan \alpha = 1.6$ , 在  $Rt\triangle DGE$  中,  $\frac{DM}{EM} = \tan \beta = 1.2$ , 根据  $EF=EM-FM$ , 得到关于  $x$  的方程, 求出

$x$ , 再加上 1.6 即为建筑物 CD 的高度.

答案: 延长 EF 与 CD 交于点 M,



设  $DM=x$  米, 由题意知,  $EF=EM-FM=AB=10$ ,

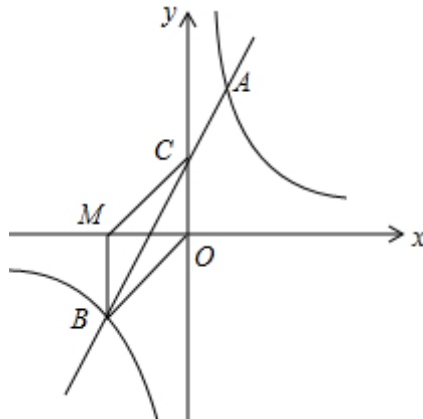
在  $Rt\triangle DMF$  中,  $\frac{DM}{FM} = \tan\alpha = 1.6$ , 在  $Rt\triangle DME$  中,  $\frac{DM}{EM} = \tan\beta = 1.2$ ,

$\therefore FM = \frac{x}{1.6}$ ,  $EM = \frac{x}{1.2}$ ,  $\therefore EM - FM = \frac{x}{1.2} - \frac{x}{1.6} = 10$ , 解得:  $x=48$ ,

$\therefore CD=DM+1.6=49.6$  米,

答: 塔  $CD$  的高度大约是 49.6 米.

20. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数  $y=mx+n$  ( $m \neq 0$ ) 的图象与反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象交于第一、三象限内的  $A$ 、 $B$  两点, 与  $y$  轴交于点  $C$ , 过点  $B$  作  $BM \perp x$  轴, 垂足为  $M$ ,  $BM=OM$ ,  $OB=2\sqrt{2}$ , 点  $A$  的纵坐标为 4.



(1) 求该反比例函数和一次函数的解析式;

(2) 连接  $MC$ , 求四边形  $MBOC$  的面积.

解析: (1) 根据题意可以求得点  $B$  的坐标, 从而可以求得反比例函数的解析式, 进而求得点  $A$  的坐标, 从而可以求得一次函数的解析式;

(2) 根据 (1) 中的函数解析式可以求得点  $C$ , 点  $M$ 、点  $B$ 、点  $O$  的坐标, 从而可以求得四边形  $MBOC$  的面积.

答案: (1) 由题意可得,  $BM=OM$ ,  $OB=2\sqrt{2}$ ,  $\therefore BM=OM=2$ ,  $\therefore$  点  $B$  的坐标为  $(-2, -2)$ ,

设反比例函数的解析式为  $y=\frac{k}{x}$ , 则  $-2=\frac{k}{-2}$ , 得  $k=4$ ,  $\therefore$  反比例函数的解析式为  $y=\frac{4}{x}$ ,

$\therefore$  点  $A$  的纵坐标是 4,  $\therefore 4=\frac{4}{x}$ , 得  $x=1$ ,  $\therefore$  点  $A$  的坐标为  $(1, 4)$ ,

$\therefore$  一次函数  $y=mx+n$  ( $m \neq 0$ ) 的图象过点  $A(1, 4)$ 、点  $B(-2, -2)$ ,

$\therefore \begin{cases} m+n=4, \\ -2m+n=-2, \end{cases}$  得  $\begin{cases} m=2, \\ n=2, \end{cases}$  即一次函数的解析式为  $y=2x+2$ ;

(2)  $\therefore y=2x+2$  与  $y$  轴交与点  $C$ ,  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(0, 2)$ ,

$\therefore$  点  $B(-2, -2)$ , 点  $M(-2, 0)$ , 点  $O(0, 0)$ ,

$\therefore OM=2$ ,  $OC=2$ ,  $MB=2$ ,

∴ 四边形 MBOC 的面积是：
$$\frac{OM \cdot OC}{2} + \frac{OM \cdot MB}{2} = \frac{2 \times 2}{2} + \frac{2 \times 2}{2} = 4.$$

21. 某市正在举行文化艺术节活动，一商店抓住商机，决定购进甲，乙两种艺术节纪念品. 若购进甲种纪念品 4 件，乙种纪念品 3 件，需要 550 元，若购进甲种纪念品 5 件，乙种纪念品 6 件，需要 800 元.

(1) 求购进甲、乙两种纪念品每件各需多少元？

(2) 若该商店决定购进这两种纪念品共 80 件，其中甲种纪念品的数量不少于 60 件. 考虑到资金周转，用于购买这 80 件纪念品的资金不能超过 7100 元，那么该商店共有几种进货方案？

(3) 若销售每件甲种纪念品可获利润 20 元，每件乙种纪念品可获利润 30 元. 在(2)中的各种进货方案中，若全部销售完，哪一种方案获利最大？最大利润多少元？

解析：(1) 根据甲种纪念品 4 件乙种纪念品 3 件需要 550 元，甲种纪念品 5 件乙种纪念品 6 件需要 800 元；列出方程组，求出甲乙的单价；

(2) 根据甲纪念品的进货价+乙纪念品的进货价 ≤ 7100 元，甲纪念品数量不小于 60 件，列出不等式组或不等式，确定一个纪念品的取值范围. 根据取值范围得进货方案.

(3) 根据：总利润=甲种纪念品的利润+乙种纪念品的利润，得函数关系，利用一次函数的性质，得结论.

答案：(1) 设购进甲种纪念品每件需  $x$  元，购进乙种纪念品每件需  $y$  元.

由题意得：
$$\begin{cases} 4x + 3y = 550, \\ 5x + 6y = 800, \end{cases} \text{ 解得：} \begin{cases} x = 100, \\ y = 50, \end{cases}$$

答：购进甲种纪念品每件需 100 元，购进乙种纪念品每件需 50 元.

(2) 设购进甲种纪念品  $a$  ( $a \geq 60$ ) 件，则购进乙种纪念品  $(80-a)$  件. 由题意得： $100a + 50(80-a) \leq 7100$ ，解得  $a \leq 62$ ，

又  $a \geq 60$ ，所以  $a$  可取 60、61、62.

即有三种进货方案.

方案一：甲种纪念品 60 件，乙种纪念品 20 件；

方案二：甲种纪念品 61 件，乙种纪念品 19 件；

方案三：甲种纪念品 62 件，乙种纪念品 18 件.

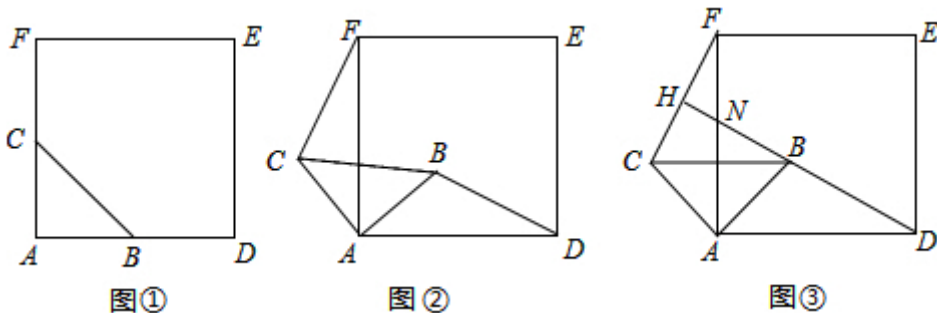
(3) 设利润为  $W$ ，则  $W = 20a + 30(80-a) = -10a + 2400$

所以  $W$  是  $a$  的一次函数， $-10 < 0$ ， $W$  随  $a$  的增大而减小.

所以当  $a$  最小时， $W$  最大. 此时  $W = -10 \times 60 + 2400 = 1800$

答：若全部销售完，方案一获利最大，最大利润是 1800 元.

22. 如图①， $\triangle ABC$  是等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，四边形 ADEF 是正方形，点 B、C 分别在边 AD、AF 上，此时  $BD = CF$ ， $BD \perp CF$  成立.



(1) 当  $\triangle ABC$  绕点 A 逆时针旋转  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ) 时, 如图②,  $BD=CF$  成立吗? 若成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由;

(2) 当  $\triangle ABC$  绕点 A 逆时针旋转  $45^\circ$  时, 如图③, 延长 DB 交 CF 于点 H;

(i) 求证:  $BD \perp CF$ ;

(ii) 当  $AB=2$ ,  $AD=3\sqrt{2}$  时, 求线段 DH 的长.

解析: (1) 欲证明  $BD=CF$ , 只要证明  $\triangle CAF \cong \triangle BAD$  即可;

(2) (i) 由(1)得  $\triangle CAF \cong \triangle BAD$ , 推出  $\angle CFA = \angle BDA$ , 由  $\angle FNH = \angle DNA$ ,  $\angle DNA + \angle NAD = 90^\circ$ , 即可推出  $\angle CFA + \angle FNH = 90^\circ$ , 由此即可解决问题;

(ii) 只要证明  $\triangle DMB \sim \triangle DHF$ , 可得  $\frac{DM}{DH} = \frac{DB}{DF}$ , 构建方程即可解决问题;

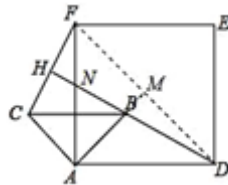
答案: (1)  $BD=CF$ . 理由如下: 由题意得,  $\angle CAF = \angle BAD = \alpha$ ,

$$\text{在 } \triangle CAF \text{ 和 } \triangle BAD \text{ 中, } \begin{cases} CA = BA, \\ \angle CAF = \angle BAD, \therefore \triangle CAF \cong \triangle BAD, \therefore BD = CF. \\ FA = DA, \end{cases}$$

(2) (i) 由(1)得  $\triangle CAF \cong \triangle BAD$ ,  $\therefore \angle CFA = \angle BDA$ ,

$\because \angle FNH = \angle DNA$ ,  $\angle DNA + \angle NAD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle CFA + \angle FNH = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle FHN = 90^\circ$ , 即  $BD \perp CF$ .

(ii) 连接 DF, 延长 AB 交 DF 于 M,



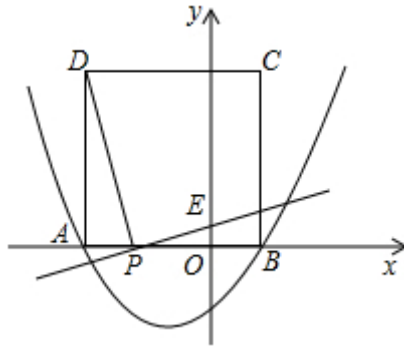
$\because$  四边形 ADEF 是正方形,  $AD=3\sqrt{2}$ ,  $AB=2$ ,

$\therefore AM=DM=3$ ,  $BM=AM-AB=1$ ,  $DB=\sqrt{DM^2+BM^2}=\sqrt{10}$ ,

$\because \angle MAD = \angle MDA = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle AMD = 90^\circ$ , 又  $\angle DHF = 90^\circ$ ,  $\angle MDB = \angle HDF$ ,

$\therefore \triangle DMB \sim \triangle DHF$ ,  $\therefore \frac{DM}{DH} = \frac{DB}{DF}$ , 即  $\frac{3}{DH} = \frac{\sqrt{10}}{6}$ , 解得,  $DH = \frac{9\sqrt{10}}{5}$ .

23. 如图, 已知二次函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{3}{2}$  与 x 轴交于点 A(-3, 0) 和点 B, 以 AB 为边在 x 轴上方作正方形 ABCD, 点 P 是 x 轴上一动点, 连接 DP, 过点 P 作 DP 的垂线与 y 轴交于点 E.



- (1) 试求出二次函数的表达式和点 B 的坐标;  
 (2) 当点 P 在线段 AO (点 P 不与 A、O 重合) 运动至何处时, 线段 OE 的长有最大值, 求出这个最大值;  
 (3) 是否存在这样的点 P, 使  $\triangle PED$  是等腰三角形? 若存在, 请求出点 P 的坐标及此时  $\triangle PED$  与正方形 ABCD 重叠部分的面积; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 将 A 点坐标代入  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{3}{2}$  中求出 b 得到二次函数的表达式为

$y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ , 然后解方程  $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$  得 B 点坐标;

(2) 设  $PA=t$  ( $-3 < t < 0$ ), 则  $OP=3-t$ , 如图 1, 证明  $\triangle DAP \sim \triangle POE$ , 利用相似比得到  $OE = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t$ , 然后利用二次函数的性质解决问题;

(3) 讨论: 当点 P 在 y 轴左侧时, 如图 2, DE 交 AB 于 G 点, 证明  $\triangle DAP \cong \triangle POE$  得到  $PO=AD=4$ , 则  $PA=1$ ,  $OE=1$ , 再利用平行线分线段成比例定理计算出  $AG = \frac{12}{5}$ , 则计算  $S_{\triangle DAG}$  即可得到此时  $\triangle PED$  与正方形 ABCD 重叠部分的面积; 当 P 点在 y 轴右侧时, 如图 3, DE 交 AB 于 G 点, DP 与 BC 相交于 Q, 同理可得  $\triangle DAP \cong \triangle POE$ , 则  $PO=AD=4$ ,  $PA=7$ ,  $OE=7$ , 再利用平行线分线段成比例定理计算出 OG 和 BQ, 然后计算  $S_{\text{四边形 DGBQ}}$  得到此时  $\triangle PED$  与正方形 ABCD 重叠部分的面积.

答案: (1) 将点 A(-3, 0) 代入  $y = \frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{3}{2}$  得  $\frac{9}{2} - 3b - \frac{3}{2} = 0$ , 解得  $b=1$ ,

$\therefore$  二次函数的表达式为  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ ,

当  $y=0$  时,  $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$ , 解得  $x_1=1$ ,  $x_2=-3$ ,  $\therefore B(1, 0)$ ;

(2) 设  $PA=t$  ( $-3 < t < 0$ ), 则  $OP=3-t$ , 如图 1,

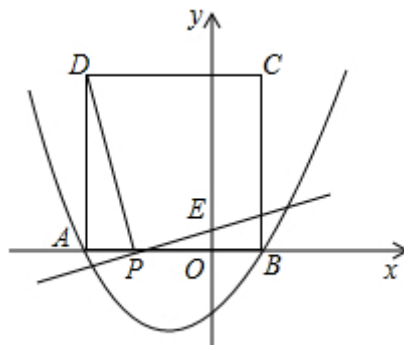


图1

∵ DP ⊥ PE, ∴ ∠DPA = ∠PEO, ∴ △DAP ∽ △POE,

$$\therefore \frac{AP}{OE} = \frac{AD}{PO}, \text{ 即 } \frac{t}{OE} = \frac{4}{3-t}, \therefore OE = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{4}t = -\frac{1}{4}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{16},$$

∴ 当  $t = \frac{3}{2}$  时, OE 有最大值, 即 P 为 AO 中点时, OE 的最大值为  $\frac{9}{16}$ ;

(3) 存在. 当点 P 在 y 轴左侧时, 如图 2, DE 交 AB 于 G 点,

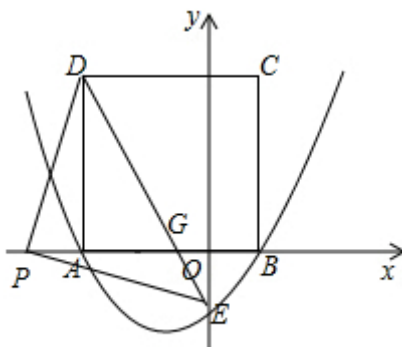


图2

∵ PD = PE, ∠DPE = 90°, ∴ △DAP ≅ △POE, ∴ PO = AD = 4, ∴ PA = 1, OE = 1,

$$\because AD \parallel OE, \therefore \frac{AG}{OG} = \frac{AD}{OE} = 4, \therefore AG = \frac{12}{5}, \therefore S_{\triangle DAG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot 4 = \frac{24}{5},$$

∴ P 点坐标为 (-4, 0), 此时 △PED 与正方形 ABCD 重叠部分的面积为  $\frac{24}{5}$ ;

当 P 点在 y 轴右侧时, 如图 3, DE 交 AB 于 G 点, DP 与 BC 相交于 Q,

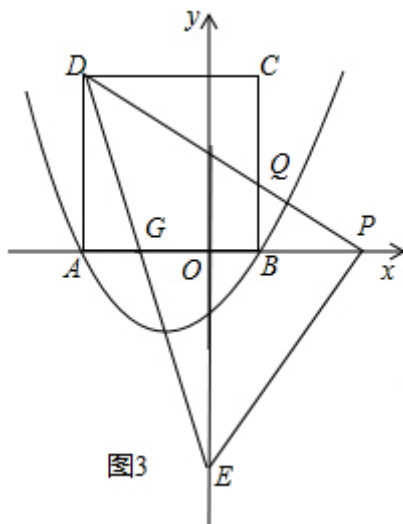


图3

同理可得 △DAP ≅ △POE, ∴ PO = AD = 4, ∴ PA = 7, OE = 7,

$$\because AD \parallel OE, \therefore \frac{AG}{OG} = \frac{AD}{OE} = \frac{4}{7}, \therefore OG = \frac{21}{11}, \text{ 同理可得 } BQ = \frac{12}{7},$$

$$\therefore S_{\text{四边形 } DGBQ} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{21}{11} + 1 \right) \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{12}{7} = \frac{712}{77}.$$

∴ 当点 P 的坐标为 (4, 0) 时, 此时 △PED 与正方形 ABCD 重叠部分的面积为  $\frac{712}{77}$ .