2018年安徽省淮南市高考一模数学文

一、选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知$\frac{a+2i}{i}=b-i$(a，b∈R)，其中i是虚数单位，则a+b=(　)

A.-1

B.3

C.2

D.1

解析：利用复数代数形式的乘除运算化简，再由复数相等的条件计算得答案.

$\because \frac{a+2i}{i}=\frac{-i\left(a+2i\right)}{-i^2}=2-ai=b-i$，

∴a=1，b=2.

∴a+b=3.

答案：B

2.已知集合A={x|y=$\sqrt{3x-x^2}$}，B={y|y=2^x，x＞1}，则A∩B为(　)

A.[0，3]

B.[3，+∞)

C.[1，3]

D.(2，3]

解析：求定义域和值域得出集合A、B，根据交集的定义写出A∩B.

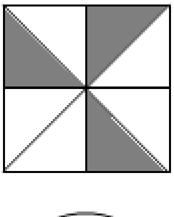
集合A={x|y=$\sqrt{3x-x^2}$}={x|3x-x^2≥0}={x|0≤x≤3}=[0，3]，

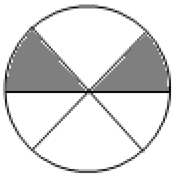
B={y|y=2^x，x＞1}={y|y＞2}=(2，+∞)；

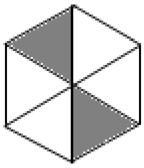
则A∩B=(2，3].

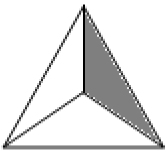
答案：D

3.有四个游戏盘，将它们水平放稳后，在上面扔一颗玻璃小球，若小球落在阴影部分，则可中奖，小明要想增加中奖机会，应选择的游戏盘是(　)

A. 

B. 

C. 

D. 

解析：根据几何概型的概率公式，要使中奖率增加，则对应的面积最大即可.
要使中奖率增加，则对应的面积最大即可，
则根据几何概型的概率公式可得，

A、概率$P=\frac{3}{8}$；

B、概率$P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$；

C、概率$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$；

D、概率$P=\frac{1}{3}$；

则概率最大的为$\frac{3}{8}$.

答案：A

4.已知函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{3\pi}{2})(x\in R)$，下列说法错误的是(　)

A.函数 $f(x)$ 最小正周期是π

B.函数 $f(x)$ 是偶函数

C.函数 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是增函数

D.函数 $f(x)$ 图象关于$(\frac{\pi}{4},0)$对称

解析：根据正弦函数的性质依次判断各选项即可.

由函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{3\pi}{2})=\cos 2x(x\in R)$，∴B 对；

其周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，∴A 对；

令$-\pi+2k\pi\leqslant 2x\leqslant 2k\pi$，可得 $k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant k\pi$，$k\in Z$.

∴$f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上不是增函数；∴C 不对；

令 $x=\frac{\pi}{4}$，则 $f(\frac{\pi}{4})=\cos\frac{\pi}{2}=0$，∴函数 $f(x)$ 图象关于$(\frac{\pi}{4},0)$对称，∴D 对.

答案：C

5.若实数 x，y 满足$\begin{cases} x-y+1\le 0 \\ x>0 \\ y\le 2 \end{cases}$，则$\dfrac{y+1}{x}$的取值范围是(　)

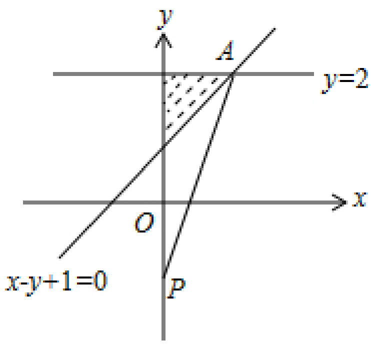
A.(0，3)

B.[0，3]

C.(3，+∞)

D.[3，+∞)

解析：由约束条件$\begin{cases} x-y+1\le 0 \\ x>0 \\ y\le 2 \end{cases}$作出可行域如图，



联立$\begin{cases} y=2 \\ x-y+1=0 \end{cases}$，解得 A(1，2)，

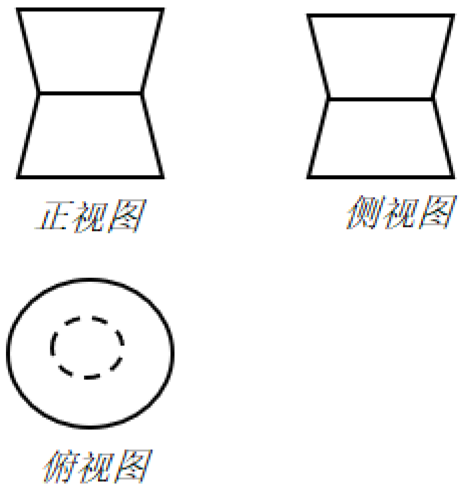
$\dfrac{y+1}{x}$的几何意义为可行域内动点与定点 P(0，-1)连线的斜率，

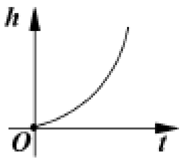
$\because k_{PA}=\dfrac{-1-2}{0-1}=3$，

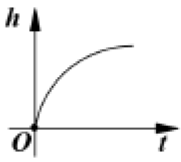
$\therefore \dfrac{y+1}{x}$的取值范围是[3，+∞).

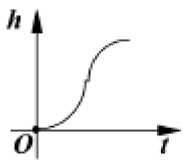
答案：D

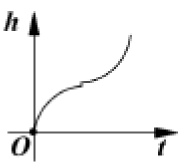
6.如图所示是某一容器的三视图，现向容器中匀速注水，容器中水面的高度 h 随时间 t 变化的可能图象是(　)



A. 

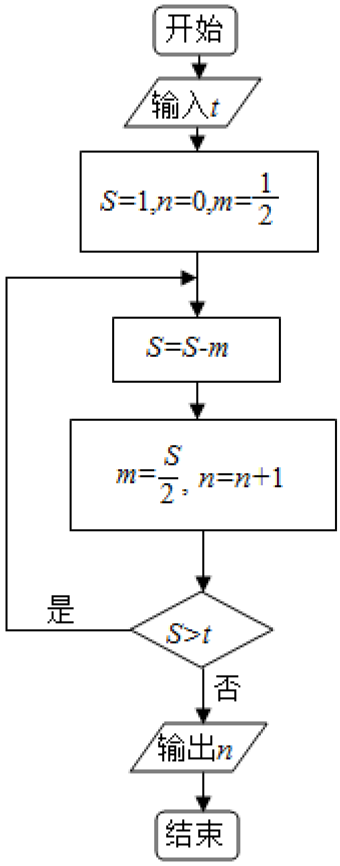
B. 

C. 

D. 

解析：由三视图，可知几何体是下部是已改圆台，上部是与下部相同倒放的圆台，
因为圆台下面粗，上面细，水面高度开始增加的慢，后来增加的快，
然后上面先快后慢.函数的图象是 C.
答案：C

7.执行如图所示的程序框图，如果输入的 t=0.01，则输出的 n=(　)



A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
解析：由已知中的程序框图可知：该程序的功能是利用循环结构计算并输出变量 n 的值，模拟程序的运行过程，分析循环中各变量值的变化情况，可得答案.

第一次执行循环体后，$S=\frac{1}{2}$，$m=\frac{1}{4}$，n=1，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，$S=\frac{1}{4}$，$m=\frac{1}{8}$，n=2，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，$S=\frac{1}{8}$，$m=\frac{1}{16}$，n=3，不满足退出循环的条件；

再次执行循环体后，$S=\frac{1}{16}$，$m=\frac{1}{32}$，n=4，不满足退出循环的条件；

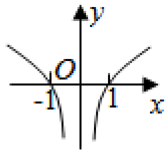
再次执行循环体后，$S=\frac{1}{32}$，$m=\frac{1}{64}$，n=5，不满足退出循环的条件；

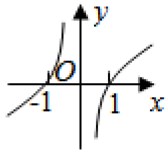
再次执行循环体后，$S=\frac{1}{64}$，$m=\frac{1}{128}$，n=6，不满足退出循环的条件；

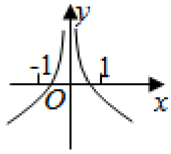
再次执行循环体后，$S=\frac{1}{128}$，$m=\frac{1}{256}$，n=7，满足退出循环的条件；

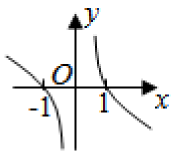
故输出的 n 值为 7.
答案：C

8. 函数 $y=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 的图象是( )

A.


B.


C.


D.


解析：利用函数的奇偶性排除选项，特殊点的位置判断即可.

函数 $y=\dfrac{x\ln|x|}{|x|}$ 是奇函数，排除 A，C；

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\ln\dfrac{1}{2}<0$，对应点在第四象限，排除 D.

答案：B

9. △ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 b=c，$a^2=2b^2(1-\sin A)$，则 A=( )

A. $\dfrac{3\pi}{4}$

B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$

D. $\dfrac{\pi}{6}$

解析：利用余弦定理，建立方程关系得到 $1-\cos A=1-\sin A$，即 $\sin A=\cos A$，进行求解即可.

∵b=c，

∴$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2-2b^2\cos A=2b^2(1-\cos A)$，

∵$a^2=2b^2(1-\sin A)$，

∴$1-\cos A=1-\sin A$，

则 sinA=cosA，即 tanA=1，

即 A=$\dfrac{\pi}{4}$.

答案：C

10.设 F 为抛物线 C：$y^2=3x$ 的焦点，过 F 且倾斜角为 30° 的直线交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点，则△OAB 的面积为(　)

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

B. $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$

C. $\dfrac{63}{32}$

D. $\dfrac{9}{4}$

解析：由抛物线方程求出焦点坐标，由直线的倾斜角求出斜率，写出过 A，B 两点的直线方程，和抛物线方程联立后化为关于 y 的一元二次方程，由根与系数关系得到 A，B 两点纵坐标的和与积，把△OAB 的面积表示为两个小三角形 AOF 与 BOF 的面积和得答案.

由 $y^2=2px$，得 $2p=3$，$p=\dfrac{3}{2}$，

则 F($\dfrac{3}{4}$，0).

∴过 A，B 的直线方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)$，

即 $x=\sqrt{3}y+\dfrac{3}{4}$.

联立 $\begin{cases} y^2=3x \\ x=\sqrt{3}y+\dfrac{3}{4} \end{cases}$，得 $4y^2-12\sqrt{3}y-9=0$.

设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，

则 $y_1+y_2=3\sqrt{3}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{4}$.

∴

$$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OAF}+S_{\triangle OFB}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\left|y_1-y_2\right|=\frac{3}{8}\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\frac{3}{8}\times\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+9}=\frac{9}{4}.$$

答案：D

11.已知 G 是△ABC 的重心，过点 G 作直线 MN 与 AB，AC 交于点 M，N，且 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，（x，y＞0），则 3x+y 的最小值是（　）

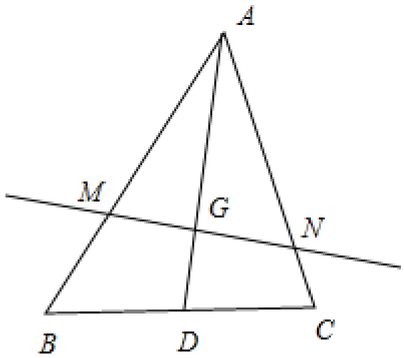
A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{7}{2}$

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$

解析：设 BC 的中点为 D，则 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3x}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{3y}\overrightarrow{AN}$，



∵M，G，N 三点共线，故 $\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}=1$.

∴ $3x+y=(3x+y)\left(\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}\right)=\frac{4}{3}+\frac{y}{3x}+\frac{x}{y}\geq\frac{4}{3}+2\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当且仅当 $\frac{y}{3x}=\frac{x}{y}$ 时，即 $x=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{9}$ 时取等号.

答案：D

12. 已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\left|\log_{3}(x-1)\right|$ 有两个零点 x_1，x_2，则（　）

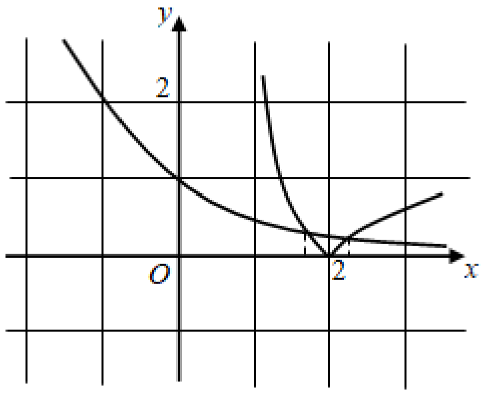
A. $x_1\cdot x_2<x_1+x_2$

B. $x_1\cdot x_2<1$

C. $x_1\cdot x_2=x_1+x_2$

D. $x_1\cdot x_2>x_1+x_2$

解析：如图所示：



由对数函数的定义知所给函数的定义域是(1，+∞)，因为 f($\frac{3}{2}$)＞0，f(2)＜0，f(4)＞0，

由零点存在性定理知在区间($\frac{3}{2}$，2)，(2，4)分别存在零点，记为 x_1，x_2，不妨设 x_1＜x_2，

可以得到 1＜x_1＜2＜x_2，

又由 $f\left(x_1\right)=\left|\log_3\left(x_1-1\right)\right|-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}=0$，$f\left(x_2\right)=\left|\log_3\left(x_2-1\right)\right|-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}=0$，

得 $-\log_3\left(x_1-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$，$-\log_3\left(x_2-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$，

两式相减得 $\log_3\left(x_2-1\right)-\log_3\left(x_1-1\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}<0$，

即：$\log_3(x_2-1)-\log_3(x_1-1)<0$，

故$(x_2-1)(x_1-1)<1$，解得 $x_1\cdot x_2<x_1+x_2$.

答案：A

二、填空题(本大题共 4 小题，每题 5 分，满分 20 分)

13. 若 A={x|ax^2-ax+1≤0，x∈R}=∅，则 a 的取值范围是_____.

解析：∵A={x|ax^2-ax+1≤0，x∈R}=∅，

∴a=0 或$\begin{cases}a>0\\ \text{V}=\left(-a\right)^2-4a<0\end{cases}$，

解得 0≤a＜4.

∴a 的取值范围是[0，4).

答案：[0，4)

14.《九章算术》“竹九节”问题：现有 1 根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，则第五节的容积为_____.

解析：设第九节容积为 a_1，

∵自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，

$\therefore \begin{cases} a_1+a_2+a_3+a_4=4a_1+6d=3 \\ a_9+a_8+a_7=3a_1+21d=4 \end{cases}$，

解得 $a_1=\dfrac{13}{22}$， $d=\dfrac{7}{66}$，

∴第五节的容积为 $a_5=a_1+4d=\dfrac{13}{22}+4\dfrac{7}{66}=\dfrac{67}{66}$.

答案：$\dfrac{67}{66}$

15.已知函数 $f(x)=e^{1+|x|}-\dfrac{1}{1+x^2}$，则使得 f(x)＞f(2x-1)成立的 x 的取值范围是_____.
解析:首先确定函数的单调性和函数的奇偶性,然后脱去 f 符号计算自变量的取值范围即可.
由函数的解析式可得函数为偶函数，且当 x≥0 时：

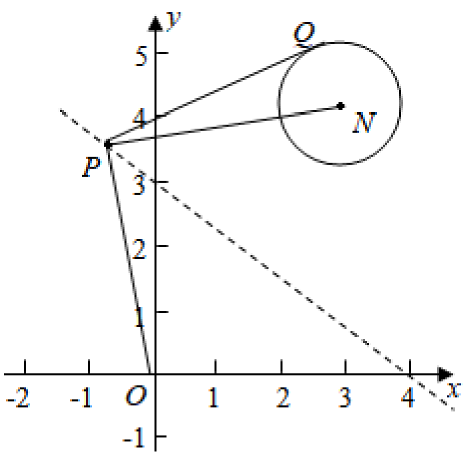
$f(x)=e^{1+x}-\dfrac{1}{1+x^2}$， $f'(x)=e^{1+x}+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}>0$，

即函数 f(x)是在区间[0，+∞)上单调递增的偶函数，
不等式 f(x)＞f(2x-1)成立，则：|x|＞|2x-1|，即：$x^2>(2x-1)^2$，

求解二次不等式可得 x 的取值范围是($\dfrac{1}{3}$，1).

答案：($\dfrac{1}{3}$，1)

16.过动点 P 作圆:$(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的切线 PQ,其中 Q 为切点,若|PQ|=|PO|(O 为坐标原点),则|PQ|的最小值是_____.
解析：根据题意，设 P 的坐标为(m，n)，圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为 N，由圆的切线的性质可得 $|PN|^2=|PQ|^2+|NQ|^2=|PQ|^2+1$，结合题意可得 $|PN|^2=|PO|^2+1$，代入点的坐标可得 $(m-3)^2+(n-4)^2=m^2+n^2+1$，变形可得：6m+8n=24，可得 P 的轨迹，分析可得|PQ|的最小值即点 O 到直线 6x+8y=24 的距离，由点到直线的距离公式计算可得答案.
根据题意，设 P 的坐标为(m，n)，圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的圆心为 N，则 N(3，4)，



PQ 为圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的切线，则有 $|PN|^2=|PQ|^2+|NQ|^2=|PQ|^2+1$，

又由|PQ|=|PO|,
则有$|PN|^2=|PO|^2+1$,
即$(m-3)^2+(n-4)^2=m^2+n^2+1$,
变形可得：6m+8n=24,
即P在直线6x+8y=24上,
则|PQ|的最小值即点O到直线6x+8y=24的距离,

且$d=\frac{|6\times 0+8\times 0-24|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{12}{5}$;

即|PQ|的最小值是$\frac{12}{5}$.

答案：$\frac{12}{5}$

三、解答题(本大题共6小题，共70分，第17~21题为必考题，每小题12分，第22、23题为选考题，有10分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_3=5$，$a_5=9$，数列$\{b_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.
解析：(1)利用等差数列通项公式求出首项和公差，由此能求出$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.由数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$，求出$\{b_n\}$是首项为1，公比为-2的等比数列，由此能求出$b_n=(-2)^{n-1}$.
答案：(1)∵数列{an}为等差数列，且a3=5，a5=9,

$\therefore d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=\frac{9-5}{2}=2$,

$\therefore a_1=a_3-2d=5-4=1$,
$\therefore a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$.

∵数列$\{b_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{3}$.

∴n=1时，$S_1=\frac{2}{3}b_1+\frac{1}{3}$，由$S_1=b_1$，解得$b_1=1$,

当n≥2时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2}{3}b_n-\frac{2}{3}b_{n-1}$,

$\therefore b_n=-2b_{n-1}$,
∴$\{b_n\}$是首项为1，公比为-2的等比数列,
$\therefore b_n=(-2)^{n-1}$.

(2)设$c_n=a_n|b_n|$，求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.
解析：(2)由$c_n=a_n|b_n|=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$，利用错位相减法能求出数列$\{c_n\}$的前n项和.
答案：(2)$c_n=a_n|b_n|=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$,
∴数列$\{c_n\}$的前n项和：

$T_n=1\times1+3\times2+5\times2^2+\cdots+(2n-1)\times2^{n-1}$，

$2T_n=1\times2+3\times2^2+5\times2^3+\cdots+(2n-1)\times2^n$，

两式相减，得：

$-T_n=1+2(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-(2n-1)\cdot2^n$

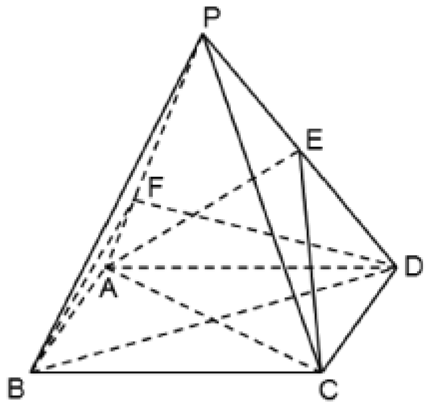
$=1+2\times\dfrac{2-2^n}{1-2}-(2n-1)\cdot2^n$

$=1+2^{n+1}-4-(2n-1)\cdot2^n$

$=-3+(3-2n)\cdot2^n$，

$\therefore T_n=(2n-3)\cdot2^n+3$.

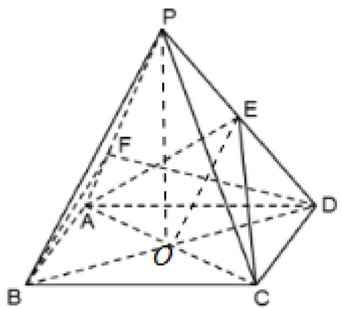
18.如图所示，正四棱椎 P-ABCD 中，底面 ABCD 的边长为 2，侧棱长为 $2\sqrt{2}$，E 为 PD 的中点.



(1)求证：PB∥平面 AEC.

解析：(1)设 BD 交 AC 于 O，连接 OE，由三角形中位线定理可得 OE∥PB，再由线面平行的判定可得 PB∥平面 AEC.

答案：(1)证明：设 BD 交 AC 于 O，连接 OE，则



在三角形 BDP 中，O、E 分别为 BD、PD 的中点，

∴OE∥PB，

又 OE⊂平面 AEC，PB⊂平面 AEC，

∴PB∥平面 AEC.

(2)若 F 为 PA 上的一点，且 $\dfrac{PF}{FA}=3$，求三棱椎 A-BDF 的体积.

解析：(2)求出 PO，结合已知可得 F 到平面 ABD 的距离为$\frac{1}{4}$PO，然后利用等积法求三棱椎 A-BDF 的体积.

答案：(2)由已知可得，$PO=\sqrt{PD^2-OD^2}=\sqrt{6}$.

又 PO⊥平面 ABCD，且$\frac{PF}{FA}=3$，

∴F 到平面 ABD 的距离为$\frac{1}{4}$PO.

$$\therefore V_{A-BDF}=V_{F-ABD}=\frac{1}{3}\times S_{\triangledown ABD}\times\left(\frac{1}{4}PO\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{1}{4}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

19.某中学为研究学生的身体素质与与课外体育锻炼时间的关系，对该校 200 名高三学生的课外体育锻炼平均每天运动的时间进行调查，如表：(平均每天锻炼的时间单位：分钟)将学生日均课外体育运动时间在[40，60)上的学生评价为“课外体育达标”.

平均每天锻炼的时间（分钟）	[0，10)	[10，20)	[20，30)	[30，40)	[40，50)	[50，60)
总人数	20	36	44	50	40	10

(1)请根据上述表格中的统计数据填写下面 2×2 列联表，并通过计算判断是否能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为“课外体育达标”与性别有关?

	课外体育不达标	课外体育达标	合计
男			
女		20	110
合计			

解析：(1)根据题意，由由频率分布表可得 2×2 列联表，计算 K^2 可得 $K^2=\frac{200\times(60\times20-30\times90)^2}{150\times50\times90\times110}\approx6.061<6.635$，由独立性检验的意义分析可得答案.

答案：(1)根据题意，由频率分布表可得：

	课外体育不达标	课外体育达标	合计
男	60	30	90
女	90	20	110
合计	150	50	200

则$K^2=\dfrac{200\times\left(60\times20-30\times90\right)^2}{150\times50\times90\times110}\approx6.061<6.635$，

顾在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下不能认为“课外体育达标”与性别有关.

(2)从上述 200 名学生中，按“课外体育达标”、“课外体育不达标”分层抽样，抽取 4 人得到一个样本，再从这个样本中抽取 2 人，求恰好抽到一名“课外体育不达标”学生的概率.

参考公式：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中 n=a+b+c+d.

参考数据：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

解析：(2)根据题意，样本中“课外体育不达标”有 3 人，分别记为 a、b、c，“课外体育达标”的有 1 人，记为 1；列举从 4 名学生中任意选出 2 人以及恰好抽到一名“课外体育不达标”学生的情况，由古典概型的计算公式计算可得答案.

答案：(2)根据题意，样本中“课外体育不达标”有 3 人，分别记为 a、b、c，“课外体育达标”的有 1 人，记为 1；

从 4 名学生中任意选出 2 人，有 ab、ac、a_1、bc、b_1、c_1，共 6 种情况，

其中恰好抽到一名“课外体育不达标”学生的情况有：a_1、b_1、c_1，共 3 种情况，

则恰好抽到一名“课外体育不达标”学生的概率$P=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

20.椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (a＞b＞0)的左顶点为 A，右焦点为 F，上顶点为 B，下顶点为 C，若直线 AB 与直线 CF 的交点为(3a，16).

(1)求椭圆 C 的标准方程.

解析：(1)推导出直线 AB 的方程为 y=$\dfrac{b}{a}$x+b，直线 CF 的方程为 y=$\dfrac{b}{c}$x-b.把点(3a，16)分别代入直线的方程$\begin{cases}16=\dfrac{b}{a}\times3a+b\\16=\dfrac{b}{c}\times3a-b\end{cases}$，b=4，且 3a=5c，由此能求出椭圆的标准方程.

答案：(1)由椭圆 C 的左顶点 A(-a，0)，上下顶点坐标为 B(0，b)，C(0，-b)，

右焦点为 F(c，0)，则直线 AB 的方程为 y=$\dfrac{b}{a}$x+b，

直线 CF 的方程为 y=$\frac{b}{c}$x-b.

又∵直线 AB 与直线 CF 的交点为(3a，16)，

把点(3a，16)分别代入直线的方程$\begin{cases} 16=\frac{b}{a}\times 3a+b \\ 16=\frac{b}{c}\times 3a-b \end{cases}$，

解得 b=4，且 3a=5c，
又∵$a^2=b^2+c^2$，解得 a=5，

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)点 P(m，0)为椭圆 C 的长轴上的一个动点，过点 P 且斜率为$\frac{4}{5}$的直线 l 交椭圆 C 于 S，T 两点，证明：$|PS|^2+|PT|^2$为定值.

解析：(2)设直线的方程为 x=$\frac{5}{4}$y+m，代入$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，得：$25y^2+20my+8(m^2-25)=0$，由此利用韦达定理、弦长公式，结合已知条件能证明 $PS|^2+|PT|^2$是定值.

答案：(2)设直线的方程为 x=$\frac{5}{4}$y+m，代入$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$，

并整理得：$25y^2+20my+8(m^2-25)=0$，

设 $S(x_1，y_1)$，$T(x_2，y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{4}{5}m$，$y_1y_2=\frac{8\left(m^2-25\right)}{25}$，

又∵$|PS|^2=(x_1-m)^2+y_1^2=\frac{41}{16}y_1^2$，

同理，$|PT|^2=\frac{41}{16}y_2^2$，

则

$$|PS|^2+|PT|^2=\frac{41}{16}\left(y_1^2+y_2^2\right)=\frac{41}{16}\left[\left(y_1+y_2\right)^2-2y_1y_2\right]=\frac{41}{16}\left[\left(-\frac{4m}{5}\right)^2-\frac{16\left(m^2-25\right)}{25}\right]=41$$

，
∴$|PS|^2+|PT|^2$是定值.

21.已知函数 $f(x)=x^2-\ln x$.

(1)求函数 f(x)在点(1，f(1))处的切线方程.
解析：(1)首先求得切点坐标，然后求解切线的斜率即可求得切线方程.

答案：(1)由题意可得：f(1)=1，且：$f'(x)=2x-\frac{1}{x}$，$f'(1)=2-1=1$，

则所求切线方程为 y-1=1×(x-1)，即 y=x.

(2)在函数 $f(x)=x^2-\ln x$ 的图象上是否存在两点，使以这两点为切点的切线互相垂直，且切点的横坐标都在区间$[\frac{1}{2}，1]$上.若存在，求出这两点的坐标，若不存在，请说明理由.

解析：(2)由题意结合导函数研究函数的切线，结合导函数的单调性和值域即可求得最终结果.

答案：(2)设切点坐标为$(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，x_1，$x_2\in[\frac{1}{2}，1]$，不妨设 $x_1<x_2$，

结合题意和(1)中求得的导函数解析式可得：$\left(2x_1-\frac{1}{x_1}\right)\left(2x_2-\frac{1}{x_2}\right)=-1$，

函数 $f(x)=2x-\frac{1}{x}$ 在区间$[\frac{1}{2}，1]$上单调递增，函数的值域为[-1，1]，故：

$-1\le 2x_1-\frac{1}{x_1}<2x_2-\frac{1}{x_2}\le 1$，据此有：$\begin{cases}2x_1-\frac{1}{x_1}=-1\\2x_2-\frac{1}{x_2}=1\end{cases}$，

解得：$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}\\x_2=1\end{cases}$或$\begin{cases}x_1=-1\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$(舍去)，

故存在两点$(\frac{1}{2}，\ln 2+\frac{1}{4})$，(1，1)即为所求.

选做题：请在 22、23 两题中任选一题作答.注意：只能做所选定的题目，如果多做，则按所做的第一个题目计分.
[选修 4-4：坐标系与参数方程选讲]

22.已知曲线 C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4+5\cos t\\y=5+5\sin t\end{cases}$(t 为参数)，以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$.

(1)把 C_1 的参数方程化为极坐标方程.

解析：(1)曲线 C_1 的参数方程消去参数 t，得到普通方程，再由 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$，能求出 C_1 的极坐标方程.

答案：(1)将 $\begin{cases} x=4+5\cos t \\ y=5+5\sin t \end{cases}$，消去参数 t，化为普通方程 $(x-4)^2+(y-5)^2=25$，

即 C_1：$x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

将 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ 代入 $x^2+y^2-8x-10y+16=0$，

得 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

∴C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-8\rho\cos\theta-10\rho\sin\theta+16=0$.

(2)求 C_1 与 C_2 交点的极坐标($\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$).

解析：(2)曲线 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程，与 C_1 的普通方程联立，求出 C_1 与 C_2 交点的直角坐标，由此能求出 C_1 与 C_2 交点的极坐标.

答案：(2)∵曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta$.

∴曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2y=0$，

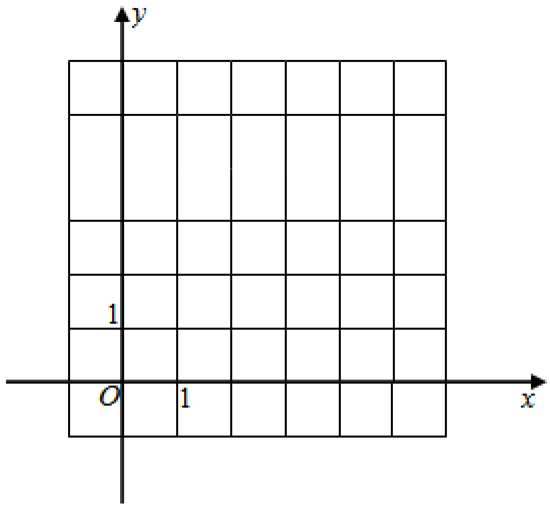
联立 $\begin{cases} x^2+y^2-8x-10y+16=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$，

∴C_1 与 C_2 交点的极坐标为($\sqrt{2}$，$\frac{\pi}{4}$)和(2，$\frac{\pi}{2}$).

[选修 4-5：不等式选讲]

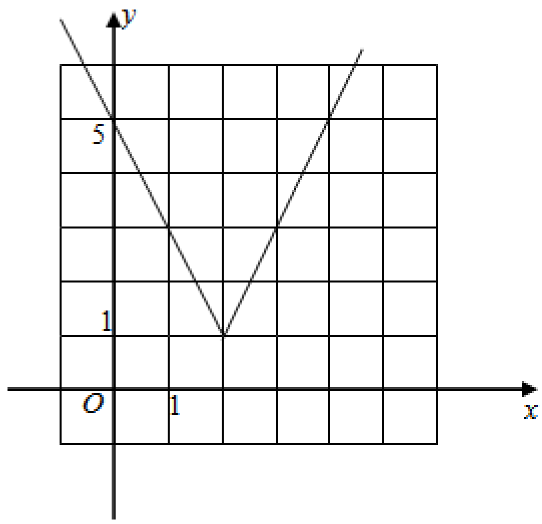
23.设函数 $f(x)=|2x-4|+1$.



(1)画出函数 y=f(x)的图象.

解析：(1)取得绝对值符号，得到分段函数，然后画出函数的图象.

答案：(1)由于 $f\left(x\right)=\begin{cases}-2x+5，& x<2\\ 2x-3，& x\geq 2\end{cases}$，则 y=f(x)的图象如图所示：



(2)若不等式 f(x)≤ax 的解集非空，求 a 的取值范围.

解析：(2)利用函数的图象，转化求解 a 的范围即可.

答案：(2)由函数 y=f(x)与函数 y=ax 的图象可知，当且仅当 a≥$\frac{1}{2}$或 a<-2 时，

函数 y=f(x)与函数 y=ax 的图象有交点，

故不等式 f(x)≤ax 的解集非空时，a 的取值范围是(-∞，-2)∪[$\frac{1}{2}$，+∞).