

## 2013 年湖北省恩施州中考真题数学

一、选择题(本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，恰有一项是符合要求的。)

1. (3 分)  $-\frac{1}{3}$  的相反数是( )

A.  $\frac{1}{3}$

B.  $-\frac{1}{3}$

C. 3

D. -3

解析： $-\frac{1}{3}$  的相反数是  $\frac{1}{3}$ .

答案：A.

2. (3 分) 今年参加恩施州初中毕业学业考试的考试约有 39360 人，请将数 39360 用科学记数法表示为(保留三位有效数字)( )

A.  $3.93 \times 10^4$

B.  $3.94 \times 10^4$

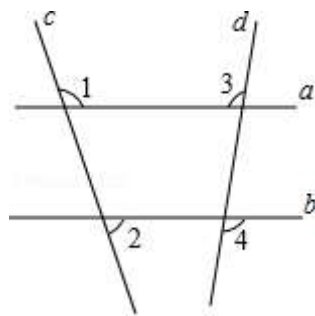
C.  $0.39 \times 10^5$

D.  $394 \times 10^2$

解析： $39360 = 3.936 \times 10^4 \approx 3.94 \times 10^4$ .

答案：B.

3. (3 分) 如图所示， $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\angle 3 = 100^\circ$ ，则  $\angle 4$  等于( )



A.  $70^\circ$

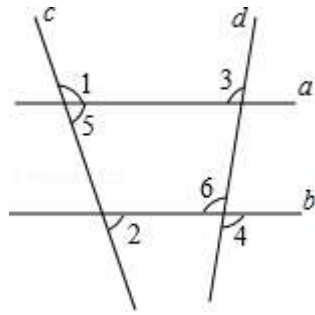
B.  $80^\circ$

C.  $90^\circ$

D.  $100^\circ$

解析： $\because \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ ， $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ ， $\therefore \angle 2 = \angle 5$ ， $\therefore a \parallel b$ ， $\therefore \angle 3 = \angle 6 = 100^\circ$ ， $\therefore \angle 4 = 100^\circ$ .

答案：D.



4. (3分) 把  $x^2y - 2y^2x + y^3$  分解因式正确的是( )

A.  $y(x^2 - 2xy + y^2)$

B.  $x^2y - y^2(2x - y)$

C.  $y(x - y)^2$

D.  $y(x + y)^2$

解析:  $x^2y - 2y^2x + y^3 = y(x^2 - 2yx + y^2) = y(x - y)^2$ .

答案: C.

点评: 本题主要考查了提公因式法, 公式法分解因式, 提取公因式后利用完全平方公式进

5. (3分) 下列运算正确的是( )

A.  $x^3 \cdot x^2 = x^6$

B.  $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$

C.  $a(a - 1) = a^2 - 1$

D.  $(a^3)^4 = a^7$

解析: A、 $x^3 \cdot x^2 = x^5$ , 故本选项错误;

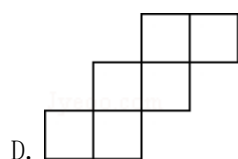
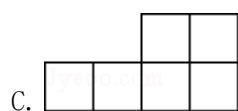
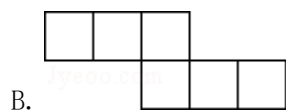
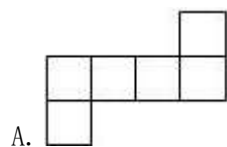
B、 $3a^2 + 2a^2 = 5a^2$ , 故本选项正确;

C、 $a(a - 1) = a^2 - a$ , 故本选项错误;

D、 $(a^3)^4 = a^{12}$ , 故本选项错误;

答案: B.

6. (3分) 如图所示, 下列四个选项中, 不是正方体表面展开图的是( )



解析：选项 A, B, D 折叠后都可以围成正方体；  
而 C 折叠后第一行两个面无法折起来，而且下边没有面，不能折成正方体。  
答案：C.

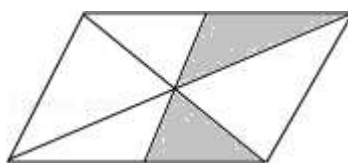
7. (3分) 下列命题正确的是( )

- A. 若  $a > b$ ,  $b < c$ , 则  $a > c$
- B. 若  $a > b$ , 则  $ac > bc$  C. 若  $a > b$ , 则  $ac^2 > bc^2$
- D. 若  $ac^2 > bc^2$ , 则  $a > b$

解析：A、可设  $a=4$ ,  $b=3$ ,  $c=4$ , 则  $a=c$ . 故本选项错误；  
B、当  $c=0$  或  $c < 0$  时，不等式  $ac > bc$  不成立. 故本选项错误；  
C、当  $c=0$  时，不等式  $ac^2 > bc^2$  不成立. 故本选项错误；  
D、由题意知， $c^2 > 0$ , 则在不等式  $ac^2 > bc^2$  的两边同时除以  $c^2$ , 不等式仍成立，即  $a > b$ , 故本选项正确.

答案：D.

8. (3分) 如图所示，在平行四边形纸片上作随机扎针实验，针头扎在阴影区域内的概率为( )



- A.  $\frac{1}{3}$
- B.  $\frac{1}{4}$
- C.  $\frac{1}{5}$
- D.  $\frac{1}{6}$

解析：∵ 四边形是平行四边形，∴ 对角线把平行四边形分成面积相等的四部分，  
观察发现：图中阴影部分面积 =  $\frac{1}{4} S_{\text{四边形}}$ ，∴ 针头扎在阴影区域内的概率为  $\frac{1}{4}$ .

答案：B.

9. (3分) 把抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$  先向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，得到的抛物线的解析式为( )

- A.  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$
- B.  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$
- C.  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 1$

D.  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

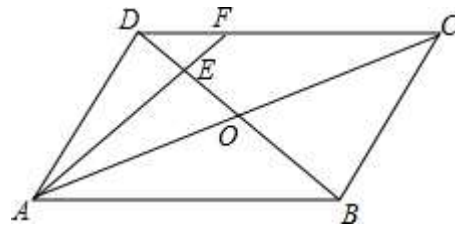
解析：抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$  的顶点坐标为  $(0, -1)$ ，

∵ 向右平移一个单位，再向下平移 2 个单位，∴ 平移后的抛物线的顶点坐标为  $(1, -3)$ ，

∴ 得到的抛物线的解析式为  $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 3$ 。

答案：B.

10. (3 分) 如图所示，在平行四边形 ABCD 中，AC 与 BD 相交于点 O，E 为 OD 的中点，连接 AE 并延长交 DC 于点 F，则 DF:FC = ( )



A. 1: 4

B. 1: 3

C. 2: 3

D. 1: 2

解析：在平行四边形 ABCD 中， $AB \parallel DC$ ，则  $\triangle DFE \sim \triangle BAE$ ，∴  $\frac{DF}{AB} = \frac{DE}{EB}$ ，

∵ O 为对角线的交点，∴  $DO = BO$ ，

又∵ E 为 OD 的中点，∴  $DE = \frac{1}{4}DB$ ，则  $DE:EB = 1:3$ ，∴  $DF:AB = 1:3$ ，

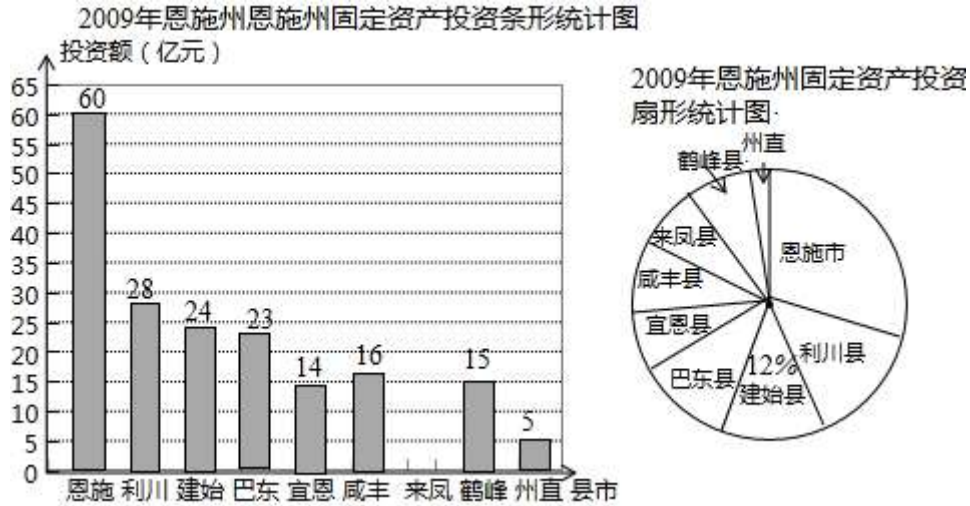
∵  $DC = AB$ ，∴  $DF:DC = 1:3$ ，∴  $DF:FC = 1:2$ 。

答案：D.

11. (3 分) 如甲、乙两图所示，恩施州统计局对 2009 年恩施州各县市的固定资产投资情况进行了统计，并绘成了以下图表，请根据相关信息解答下列问题：

2009 年恩施州各县市的固定资产投资情况表：(单位：亿元)

单位	恩施市	利川县	建始县	巴东县	宜恩县	咸丰县	来凤县	鹤峰县	州直
投资额	60	28	24	23	14	16		15	5



下列结论不正确的是( )

- A. 2009年恩施州固定资产投资总额为200亿元
- B. 2009年恩施州各单位固定资产投资额的中位数是16亿元
- C. 2009年来凤县固定资产投资额为15亿元
- D. 2009年固定资产投资扇形统计图中表示恩施市的扇形的圆心角为 $110^\circ$

解析：A、 $24 \div 12\% = 200$  (亿元)，故此选项不合题意；

B、来凤投资额： $200 - 60 - 28 - 24 - 23 - 14 - 16 - 15 - 5 = 15$  (亿元)，

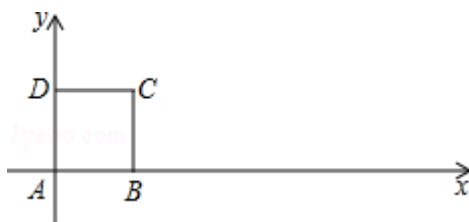
把所有的数据从小到大排列：60, 28, 24, 23, 16, 15, 15, 14, 5，位置处于中间的数是16，故此选项不合题意；

C、来凤投资额： $200 - 60 - 28 - 24 - 23 - 14 - 16 - 15 - 5 = 15$  (亿元)，故此选项不合题意；

D、 $360^\circ \times \frac{60}{200} = 108^\circ$ ，故此选项符合题意；

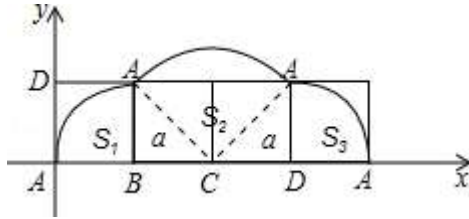
答案：D.

12. (3分) 如图所示，在直角坐标系中放置一个边长为1的正方形ABCD，将正方形ABCD沿x轴的正方向无滑动的在x轴上滚动，当点A离开原点后第一次落在x轴上时，点A运动的路径线与x轴围成的面积为( )



- A.  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}$
- B.  $\frac{\pi}{2} + 1$
- C.  $\pi + 1$
- D.  $\pi + \frac{1}{2}$

解析：如图所示：



点 A 运动的路径线与 x 轴围成的面积  $= S_1 + S_2 + S_3 + 2a = \frac{90\pi \times 1^2}{360} + \frac{90\pi \times (\sqrt{2})^2}{360} +$

$$\frac{90\pi \times 1^2}{360} + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) = \pi + 1.$$

答案: C.

## 二、填空题(本大题共有 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

13. (3 分) 25 的平方根是\_\_\_\_\_.

解析:  $\because (\pm 5)^2 = 25 \therefore 25$  的平方根  $\pm 5$ .

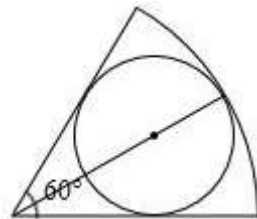
答案:  $\pm 5$ .

14. (3 分) 函数  $y = \frac{\sqrt{3-x}}{x+2}$  的自变量 x 的取值范围是\_\_\_\_\_.

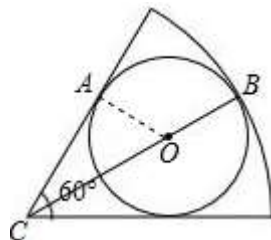
解析: 根据题意得,  $3-x \geq 0$  且  $x+2 \neq 0$ , 解得  $x \leq 3$  且  $x \neq -2$ .

答案:  $x \leq 3$  且  $x \neq -2$ .

15. (3 分) 如图所示, 一半径为 1 的圆内切于一个圆心角为  $60^\circ$  的扇形, 则扇形的周长为\_\_\_\_\_.



解析: 如图所示: 设  $\odot O$  与扇形相切于点 A, B, 则  $\angle CAO = 90^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ ,



$\therefore$  一半径为 1 的圆内切于一个圆心角为  $60^\circ$  的扇形,  $\therefore AO = 1$ ,  $\therefore CO = 2AO = 2$ ,

$\therefore BC = 2 + 1 = 3$ ,  $\therefore$  扇形的弧长为:  $\frac{60\pi \times 3}{180} = \pi$ ,  $\therefore$  则扇形的周长为:  $3 + 3 + \pi = 6 + \pi$ .

答案:  $6 + \pi$ .

16. (3 分) 把奇数列成下表,

1	3	7	13	21	31	.....
5	9	15	23	33	.....	
11	17	25	35	.....		
19	27	37	.....			
29	39	.....				
.....	.....					

根据表中数的排列规律，则上起第 8 行，左起第 6 列的数是\_\_\_\_\_.

解析：由图表可得出：第 6 列数字从 31 开始，依次加 14, 16, 18...

则第 8 行，左起第 6 列的数为：31+14+16+18+20+22+24+26=171.

答案：171.

### 三、解答题(本大题共有 8 个小题，共 72 分)

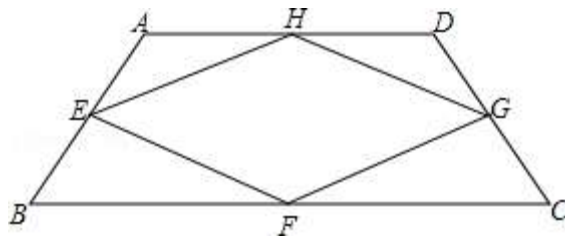
17. (8 分)先简化，再求值： $\frac{x-2}{2x-6} \div \left(\frac{-5}{x-3} - x - 3\right)$ ，其中  $x = \sqrt{2} - 2$ .

解析：先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 x 的值代入进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{答案：原式} &= \frac{x-2}{2(x-3)} \div \frac{-(x-2)(x+2)}{x-3} \\ &= \frac{x-2}{2(x-3)} \times \frac{x-3}{-(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{-2(x+2)}, \end{aligned}$$

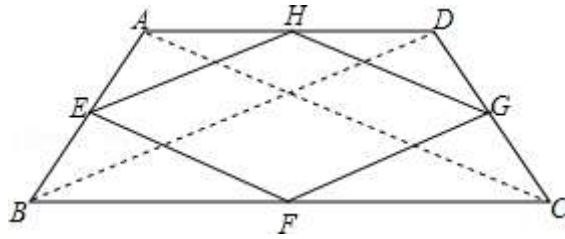
$$\text{当 } x = \sqrt{2} - 2 \text{ 时，原式} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

18. (8 分)如图所示，在梯形 ABCD 中，AD//BC，AB=CD，E、F、G、H 分别为边 AB、BC、CD、DA 的中点，求证：四边形 EFGH 为菱形.



解析：连接 AC、BD，根据等腰梯形的对角线相等可得 AC=BD，再根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半求出 EF=GH= $\frac{1}{2}$ AC，HE=FG= $\frac{1}{2}$ BD，从而得到 EF=FG=GH=HE，再根据四条边都相等的四边形是菱形判定即可.

答案：如图，连接 AC、BD，



∵AD//BC, AB=CD, ∴AC=BD,

∵E、F、G、H 分别为边 AB、BC、CD、DA 的中点, ∴在△ABC 中,  $EF=\frac{1}{2}AC$ ,

在△ADC 中,  $GH=\frac{1}{2}AC$ , ∴ $EF=GH=\frac{1}{2}AC$ ,

同理可得,  $HE=FG=\frac{1}{2}BD$ , ∴ $EF=FG=GH=HE$ , ∴四边形 EFGH 为菱形.

19. (8分) 一个不透明的袋子里装有编号分别为 1、2、3 的球 (除编号以外, 其余都相同), 其中 1 号球 1 个, 3 号球 3 个, 从中随机摸出一个球是 2 号球的概率为  $\frac{1}{3}$ .

(1) 求袋子里 2 号球的个数.

(2) 甲、乙两人分别从袋中摸出一个球 (不放回), 甲摸出球的编号记为  $x$ , 乙摸出球的编号记为  $y$ , 用列表法求点  $A(x, y)$  在直线  $y=x$  下方的概率.

解析: (1) 首先设袋子里 2 号球的个数为  $x$  个. 根据题意得:  $\frac{x}{1+x+3}=\frac{1}{3}$ , 解此方程即可求得

答案:

(2) 首先根据题意列出表格, 然后由表格即可求得所有等可能的结果与点  $A(x, y)$  在直线  $y=x$  下方的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

答案: (1) 设袋子里 2 号球的个数为  $x$  个. 根据题意得:  $\frac{x}{1+x+3}=\frac{1}{3}$ , 解得:  $x=2$ ,

经检验:  $x=2$  是原分式方程的解, ∴袋子里 2 号球的个数为 2 个.

(2) 列表得:

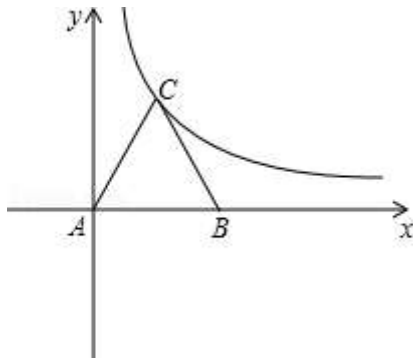
3	(1, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(3, 3)	-
3	(1, 3)	(2, 3)	(2, 3)	(3, 3)	-	(3, 3)
3	(1, 3)	(2, 3)	(2, 3)	-	(3, 3)	(3, 3)
2	(1, 2)	(2, 2)	-	(3, 2)	(3, 2)	(3, 2)
2	(1, 2)	-	(2, 2)	(3, 2)	(3, 2)	(3, 2)
1	-	(2, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)
	1	2	2	3	3	3

∴共有 30 种等可能的结果, 点  $A(x, y)$  在直线  $y=x$  下方的有 11 个,

∴点  $A(x, y)$  在直线  $y=x$  下方的概率为:  $\frac{11}{30}$ .

20. (8分) 如图所示, 等边三角形 ABC 放置在平面直角坐标系中, 已知  $A(0, 0)$ 、 $B(6, 0)$ , 反比例函数的图象经过点 C.





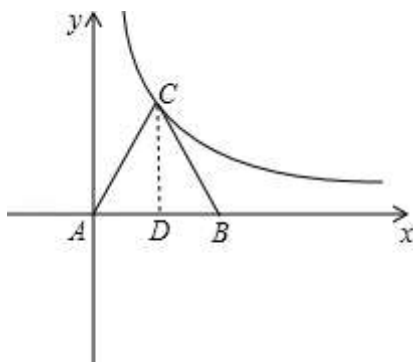
(1) 求点 C 的坐标及反比例函数的解析式.

(2) 将等边  $\triangle ABC$  向上平移  $n$  个单位, 使点 B 恰好落在双曲线上, 求  $n$  的值.

解析: (1) 过 C 点作  $CD \perp x$  轴, 垂足为 D, 设反比例函数的解析式为  $y = \frac{k}{x}$ , 根据等边三角形的知识求出 AC 和 CD 的长度, 即可求出 C 点的坐标, 把 C 点坐标代入反比例函数解析式求出 k 的值.

(2) 若等边  $\triangle ABC$  向上平移  $n$  个单位, 使点 B 恰好落在双曲线上, 则此时 B 点的横坐标即为 6, 求出纵坐标, 即可求出  $n$  的值.

答案: (1) 过 C 点作  $CD \perp x$  轴, 垂足为 D, 设反比例函数的解析式为  $y = \frac{k}{x}$ ,



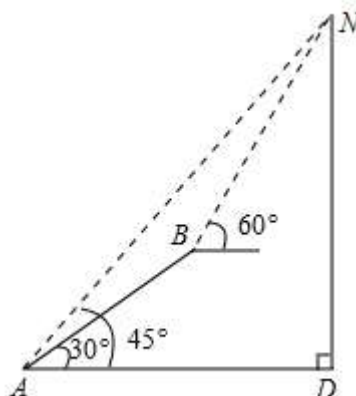
$\because \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore AC=AB=6, \angle CAB=60^\circ, \therefore AD=3, CD=\sin 60^\circ \times AC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  点 C 坐标为  $(3, 3\sqrt{3})$ ,

$\because$  反比例函数的图象经过点 C,  $\therefore k=9\sqrt{3}, \therefore$  反比例函数的解析式  $y = \frac{9\sqrt{3}}{x}$ ;

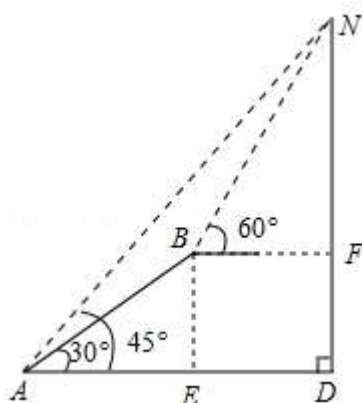
(2) 若等边  $\triangle ABC$  向上平移  $n$  个单位, 使点 B 恰好落在双曲线上, 则此时 B 点的横坐标为 6, 即纵坐标  $y = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 也是向上平移  $n = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

21. (8分) “一炷香”是闻名中外的恩施大峡谷著名的景点. 某校综合实践活动小组先在峡谷对面的广场上的 A 处测得“香顶”N 的仰角为  $45^\circ$ , 此时, 他们刚好与“香底”D 在同一水平线上. 然后沿着坡度为  $30^\circ$  的斜坡正对着“一炷香”前行 110, 到达 B 处, 测得“香顶”N 的仰角为  $60^\circ$ . 根据以上条件求出“一炷香”的高度. (测角器的高度忽略不计, 结果精确到 1 米, 参考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3}, 1.732$ ).



解析：首先过点 B 作  $BF \perp DN$  于点 F，过点 B 作  $BE \perp AD$  于点 E，可得四边形 BEDF 是矩形，然后在  $Rt\triangle ABE$  中，由三角函数的性质，可求得 AE 与 BE 的长，再设  $BF=x$  米，利用三角函数的知识即可求得方程： $55\sqrt{3}+x=\sqrt{3}x+55$ ，继而可求得答案。

答案：过点 B 作  $BF \perp DN$  于点 F，过点 B 作  $BE \perp AD$  于点 E，



$\because \angle D=90^\circ$ ， $\therefore$  四边形 BEDF 是矩形， $\therefore BE=DF$ ， $BF=DE$ ，

在  $Rt\triangle ABE$  中， $AE=AB \cdot \cos 30^\circ = 110 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 55\sqrt{3}$  (米)， $BE=AB \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 110 = 55$  (米)；

设  $BF=x$  米，则  $AD=AE+ED=55\sqrt{3}+x$  (米)，

在  $Rt\triangle BFN$  中， $NF=BF \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}x$  (米)， $\therefore DN=DF+NF=55+\sqrt{3}x$  (米)，

$\because \angle NAD=45^\circ$ ， $\therefore AD=DN$ ，即  $55\sqrt{3}+x=\sqrt{3}x+55$ ，解得： $x=55$ ， $\therefore DN=55+\sqrt{3}x \approx 150$  (米)。

答：“一炷香”的高度约为 150 米。

22. (10 分) 某商店欲购进甲、乙两种商品，已知甲的进价是乙的进价的一半，进 3 件甲商品和 1 件乙商品恰好用 200 元. 甲、乙两种商品的售价每件分别为 80 元、130 元，该商店决定用不少于 6710 元且不超过 6810 元购进这两种商品共 100 件.

(1) 求这两种商品的进价；

(2) 该商店有几种进货方案？哪种进货方案可获得最大利润，最大利润是多少？

解析：(1) 设甲商品的进价为  $x$  元，乙商品的进价为  $y$  元，就有  $x=\frac{1}{2}y$ ， $3x+y=200$ ，由这两个

方程构成方程组求出其解即可以；

(2) 设购进甲种商品  $m$  件，则购进乙种商品  $(100-m)$  件，根据不少于 6710 元且不超过 6810 元购进这两种商品 100 件建立不等式，求出其值就可以得出进货方案，设利润为  $W$  元，根据利润=售价-进价建立解析式就可以求出结论。

答案：设甲商品的进价为  $x$  元，乙商品的进价为  $y$  元，

$$\text{由题意，得：} \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ 3x + y = 200 \end{cases}, \text{解得：} \begin{cases} x = 40 \\ y = 80 \end{cases}.$$

答：甲商品的进价为 40 元，乙商品的进价为 80 元；

(2) 设购进甲种商品  $m$  件，则购进乙种商品  $(100-m)$  件，

$$\text{由题意，得：} \begin{cases} 40m + 80(100 - m) \geq 6710 \\ 40m + 80(100 - m) \leq 6810 \end{cases}, \text{解得：} 29\frac{3}{4} \leq m \leq 32\frac{1}{4}$$

$\because m$  为整数， $\therefore m = 30, 31, 32$ ,

故有三种进货方案：

方案 1，甲种商品 30 件，乙商品 70 件，

方案 2，甲种商品 31 件，乙商品 69 件，

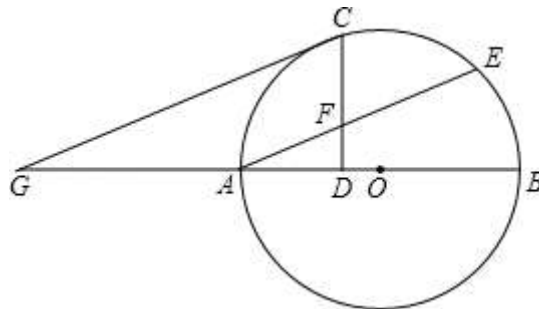
方案 3，甲种商品 32 件，乙商品 68 件，

设利润为  $W$  元，由题意，得  $W = 40m + 50(100 - m) = -10m + 5000$ ，

$\because k = -10 < 0$ ， $\therefore W$  随  $m$  的增大而减小， $\therefore m = 30$  时， $W_{\text{最大}} = 4700$ 。

答：该商店有 3 种进货方案；当甲种商品进货 30 件，乙商品进货 70 件时可获得最大利润，最大利润为 4700 元。

23. (10 分) 如图所示， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $AE$  是弦， $C$  是劣弧  $AE$  的中点，过  $C$  作  $CD \perp AB$  于点  $D$ ， $CD$  交  $AE$  于点  $F$ ，过  $C$  作  $CG \parallel AE$  交  $BA$  的延长线于点  $G$ 。



(1) 求证： $CG$  是  $\odot O$  的切线。

(2) 求证： $AF = CF$ 。

(3) 若  $\angle EAB = 30^\circ$ ， $CF = 2$ ，求  $GA$  的长。

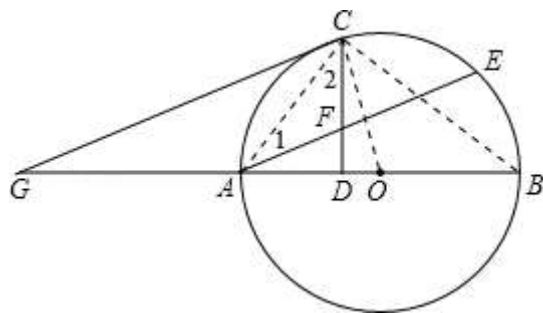
解析：(1) 连结  $OC$ ，由  $C$  是劣弧  $AE$  的中点，根据垂径定理得  $OC \perp AE$ ，而  $CG \parallel AE$ ，所以  $CG \perp OC$ ，然后根据切线的判定定理即可得到结论；

(2) 连结  $AC$ 、 $BC$ ，根据圆周角定理得  $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle 1$ ，而  $CD \perp AB$ ，则  $\angle CDB = 90^\circ$ ，根据等角的余角相等得到  $\angle B = \angle 2$ ，所以  $\angle 1 = \angle 2$ ，于是得到  $AF = CF$ ；

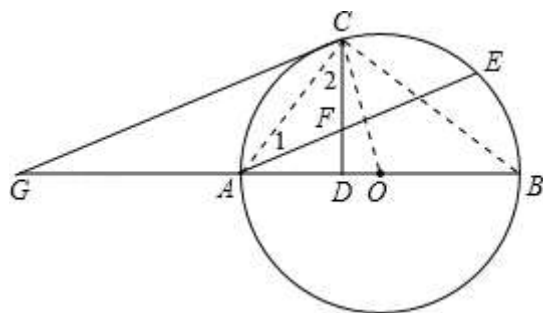
(3) 在  $Rt\triangle ADF$  中，由于  $\angle DAF = 30^\circ$ ， $FA = FC = 2$ ，根据含  $30^\circ$  的直角三角形三边的关系得到  $DF = 1$ ， $AD = \sqrt{3}$ ，再由  $AF \parallel CG$ ，根据平行线分线段成比例得到  $DA : AG = DF : CF$

然后把  $DF = 1$ ， $AD = \sqrt{3}$ ， $CF = 2$  代入计算即可。

答案：(1) 连结  $OC$ ，如图，



$\because C$  是劣弧  $AE$  的中点,  $\therefore OC \perp AE$ ,  $\because CG \parallel AE$ ,  $\therefore CG \perp OC$ ,  $\therefore CG$  是  $\odot O$  的切线;  
 (2) 连结  $AC$ 、 $BC$ ,



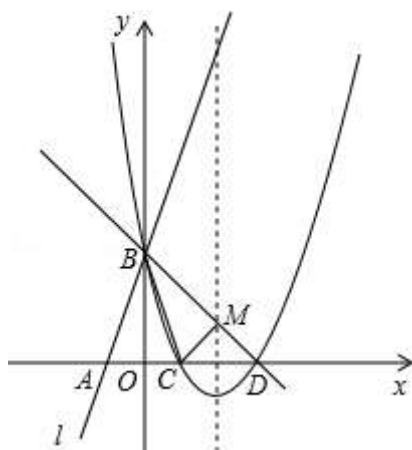
$\because AB$  是  $\odot O$  的直径,  $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle 2 + \angle BCD = 90^\circ$ ,  
 而  $CD \perp AB$ ,  $\therefore \angle B + \angle BCD = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle B = \angle 2$ ,

$\because C$  是劣弧  $AE$  的中点,  $\therefore \widehat{AC} = \widehat{CE}$ ,  $\therefore \angle 1 = \angle B$ ,  $\therefore \angle 1 = \angle 2$ ,  $\therefore AF = CF$ ;

(3) 在  $Rt\triangle ADF$  中,  $\angle DAF = 30^\circ$ ,  $FA = FC = 2$ ,  $\therefore DF = \frac{1}{2}AF = 1$ ,  $\therefore AD = \sqrt{3}DF = \sqrt{3}$ ,

$\because AF \parallel CG$ ,  $\therefore DA : AG = DF : CF$ , 即  $\sqrt{3} : AG = 1 : 2$ ,  $\therefore AG = 2\sqrt{3}$ .

24. (12分) 如图所示, 直线  $l: y = 3x + 3$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 与  $y$  轴交于点  $B$ . 把  $\triangle AOB$  沿  $y$  轴翻折, 点  $A$  落到点  $C$ , 抛物线过点  $B$ 、 $C$  和  $D(3, 0)$ .



(1) 求直线  $BD$  和抛物线的解析式.

(2) 若  $BD$  与抛物线的对称轴交于点  $M$ , 点  $N$  在坐标轴上, 以点  $N$ 、 $B$ 、 $D$  为顶点的三角形与  $\triangle MCD$  相似, 求所有满足条件的点  $N$  的坐标.

(3) 在抛物线上是否存在点  $P$ , 使  $S_{\triangle PBD} = 6$ ? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 说明理由.

解析: (1) 由待定系数法求出直线  $BD$  和抛物线的解析式;

(2) 首先确定  $\triangle MCD$  为等腰直角三角形, 因为  $\triangle BND$  与  $\triangle MCD$  相似, 所以  $\triangle BND$  也是等腰直角三角形. 如答图 1 所示, 符合条件的点  $N$  有 3 个;

(3) 如答图 2、答图 3 所示, 解题关键是求出  $\triangle PBD$  面积的表达式, 然后根据  $S_{\triangle PBD}=6$  的已知条件, 列出一元二次方程求解.

答案: (1)  $\because$  直线  $l: y=3x+3$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 与  $y$  轴交于点  $B$ ,  $\therefore A(-1, 0), B(0, 3)$ ;

$\because$  把  $\triangle AOB$  沿  $y$  轴翻折, 点  $A$  落到点  $C$ ,  $\therefore C(1, 0)$ .

设直线  $BD$  的解析式为:  $y=kx+b$ ,

$\because$  点  $B(0, 3), D(3, 0)$  在直线  $BD$  上,  $\therefore \begin{cases} b=3 \\ 3k+b=0 \end{cases}$ , 解得  $k=-1, b=3$ ,

$\therefore$  直线  $BD$  的解析式为:  $y=-x+3$ .

设抛物线的解析式为:  $y=a(x-1)(x-3)$ ,

$\because$  点  $B(0, 3)$  在抛物线上,  $\therefore 3=a \times (-1) \times (-3)$ , 解得:  $a=1$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为:  $y=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ .

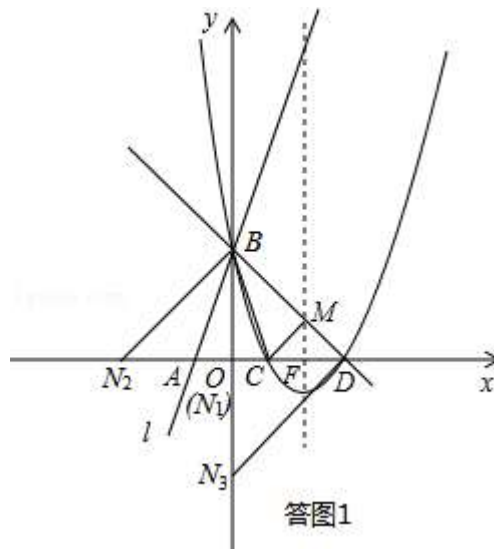
(2) 抛物线的解析式为:  $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$ ,  $\therefore$  抛物线的对称轴为直线  $x=2$ , 顶点坐标为  $(2, -1)$ .

直线  $BD: y=-x+3$  与抛物线的对称轴交于点  $M$ , 令  $x=2$ , 得  $y=1$ ,  $\therefore M(2, 1)$ .

设对称轴与  $x$  轴交点为点  $F$ , 则  $CF=FD=MF=1$ ,  $\therefore \triangle MCD$  为等腰直角三角形.

$\because$  以点  $N, B, D$  为顶点的三角形与  $\triangle MCD$  相似,  $\therefore \triangle BND$  为等腰直角三角形.

如答图 1 所示:



(I) 若  $BD$  为斜边, 则易知此时直角顶点为原点  $O$ ,  $\therefore N_1(0, 0)$ ;

(II) 若  $BD$  为直角边,  $B$  为直角顶点, 则点  $N$  在  $x$  轴负半轴上,

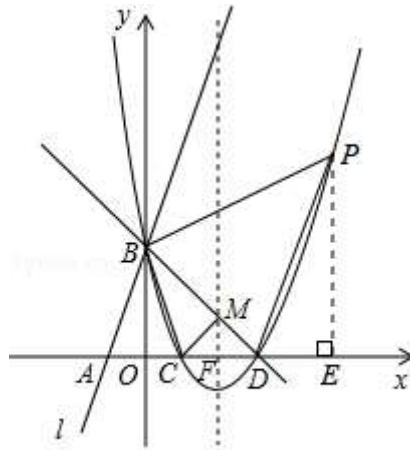
$\because OB=OD=ON_2=3$ ,  $\therefore N_2(-3, 0)$ ;

(III) 若  $BD$  为直角边,  $D$  为直角顶点, 则点  $N$  在  $y$  轴负半轴上,

$\because OB=OD=ON_3=3$ ,  $\therefore N_3(0, -3)$ .  $\therefore$  满足条件的点  $N$  坐标为:  $(0, 0), (-3, 0)$  或  $(0, -3)$ .

(3) 假设存在点  $P$ , 使  $S_{\triangle PBD}=6$ , 设点  $P$  坐标为  $(m, n)$ .

(I) 当点  $P$  位于直线  $BD$  上方时, 如答图 2 所示: 过点  $P$  作  $PE \perp x$  轴于点  $E$ , 则  $PE=n, DE=m-3$ .

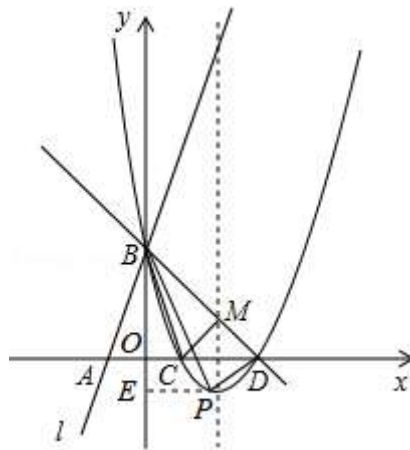


答图2

$$S_{\triangle PBD} = S_{\text{梯形} PEOB} - S_{\triangle BOD} - S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}(3+n) \cdot m - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2}(m-3) \cdot n = 6, \text{ 化简得: } m+n=7 \quad \textcircled{1},$$

$\because P(m, n)$  在抛物线上,  $\therefore n=m^2-4m+3$ , 代入①式整理得:  $m^2-3m-4=0$ , 解得:  $m_1=4, m_2=-1$ ,  
 $\therefore n_1=3, n_2=8, \therefore P_1(4, 3), P_2(-1, 8)$ ;

(II) 当点 P 位于直线 BD 下方时, 如答图 3 所示: 过点 P 作  $PE \perp y$  轴于点 E,



答图3

则  $PE=m, OE=-n, BE=3-n$ .

$$S_{\triangle PBD} = S_{\text{梯形} PEOD} + S_{\triangle BOD} - S_{\triangle PBE} = \frac{1}{2}(3+m) \cdot (-n) + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2}(3-n) \cdot m = 6, \text{ 化简得: } m+n=-1 \quad \textcircled{2},$$

$\because P(m, n)$  在抛物线上,  $\therefore n=m^2-4m+3$ ,

代入②式整理得:  $m^2-3m+4=0, \Delta=-7 < 0$ , 此方程无解. 故此时点 P 不存在.

综上所述, 在抛物线上存在点 P, 使  $S_{\triangle PBD}=6$ , 点 P 的坐标为  $(4, 3)$  或  $(-1, 8)$ .