

2013 年普通高等学校招生全国统一考试（大纲版）数学文

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (5 分) 设集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A=\{1, 2\}$, 则 $C_U A=(\quad)$

- A. $\{1, 2\}$
- B. $\{3, 4, 5\}$
- C. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
- D. \emptyset

解析: 因为 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, \}$, 集合 $A=\{1, 2\}$, 所以 $C_U A=\{3, 4, 5\}$.

答案: B

2. (5 分) 已知 α 是第二象限角, $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, 则 $\cos \alpha = (\quad)$

- A. $-\frac{12}{13}$
- B. $-\frac{5}{13}$
- C. $\frac{5}{13}$
- D. $\frac{12}{13}$

解析: $\because \alpha$ 为第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\therefore \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{12}{13}$

答案: A

3. (5 分) 已知向量 $\vec{m}=(\lambda+1, 1)$, $\vec{n}=(\lambda+2, 2)$, 若 $(\vec{m}+\vec{n}) \perp (\vec{m}-\vec{n})$, 则 $\lambda=(\quad)$

- A. -4
- B. -3
- C. -2
- D. -1

解析: $\because \vec{m}=(\lambda+1, 1)$, $\vec{n}=(\lambda+2, 2)$ $\therefore \vec{m}+\vec{n}=(2\lambda+3, 3)$,

$\vec{m}-\vec{n}=(-1, -1)$.

$\because (\vec{m}+\vec{n}) \perp (\vec{m}-\vec{n})$, $\therefore (\vec{m}+\vec{n}) \cdot (\vec{m}-\vec{n})=0$, $\therefore -(2\lambda+3)-3=0$, 解得 $\lambda=-3$.

答案: B.

4. (5 分) 不等式 $|x^2-2|<2$ 的解集是 (\quad)

- A. $(-1, 1)$

- B. $(-2, 2)$
 C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$
 D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

解析：不等式 $|x^2-2| < 2$ 的解集等价于，不等式 $-2 < x^2-2 < 2$ 的解集，即 $0 < x^2 < 4$ ，解得 $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ 。

答案：D.

5. (5分) $(x+2)^8$ 的展开式中 x^6 的系数是()

- A. 28
 B. 56
 C. 112
 D. 224

解析： $(x+2)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} 2^r$ 令 $8-r=6$ 得 $r=2$ ，

\therefore 展开式中 x^6 的系数是 $2^2 C_8^2 = 112$ 。

答案：C.

6. (5分) 函数 $f(x) = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ($x > 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) = ()$

- A. $\frac{1}{2^x - 1}$ ($x > 0$)
 B. $\frac{1}{2^x + 1}$ ($x \neq 0$)
 C. $2^x - 1$ ($x \in \mathbb{R}$)
 D. $2^x - 1$ ($x > 0$)

解析：设 $y = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ，把 y 看作常数，求出 x ： $1 + \frac{1}{x} = 2^y$ ， $x = \frac{1}{2^y - 1}$ ，其中 $y > 0$ ，

x, y 互换，得到 $y = \log_2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)$ 的反函数： $y = \frac{1}{2^x - 1}$ ($x > 0$)，

答案：A.

7. (5分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $3a_{n+1} + a_n = 0$ ， $a_2 = -\frac{4}{3}$ ，则 $\{a_n\}$ 的前 10 项和等于()

- A. $-6(1-3^{-10})$
 B. $\frac{1}{9}(1-3^{-10})$
 C. $3(1-3^{-10})$
 D. $3(1+3^{-10})$

解析： $\therefore 3a_{n+1} + a_n = 0$ ， $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{1}{3}$ ， \therefore 数列 $\{a_n\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列，

$$\because a_2 = -\frac{4}{3}, \therefore a_1 = 4,$$

$$\text{由等比数列的求和公式可得, } s_{10} = \frac{4[1 - (-\frac{1}{3})^{10}]}{1 + \frac{1}{3}} = 3(1 - 3^{-10}).$$

答案: C

8. (5分) 已知 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$ 是椭圆 C 的两个焦点, 过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交于 A、B 两点, 且 $|AB|=3$, 则 C 的方程为()

A. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

B. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

解析: 设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 可得 $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$, 所以 $a^2 - b^2 = 1 \dots \textcircled{1}$

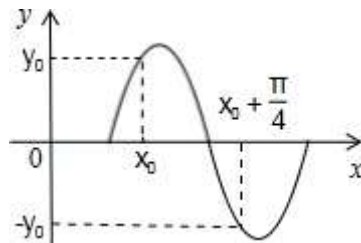
\because AB 经过右焦点 F_2 且垂直于 x 轴, 且 $|AB|=3$,

\therefore 可得 $A(1, \frac{3}{2})$, $B(1, -\frac{3}{2})$, 代入椭圆方程得 $\frac{1^2}{a^2} + \frac{(\frac{3}{2})^2}{b^2} = 1, \dots \textcircled{2}$

联解 $\textcircled{1}\textcircled{2}$, 可得 $a^2=4$, $b^2=3$, \therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

答案: C

9. (5分) 若函数 $y = \sin(\omega x + \phi)$ ($\omega > 0$) 的部分图象如图, 则 $\omega =$ ()



- A. 5
- B. 4
- C. 3
- D. 2

解析：由函数的图象可知， (x_0, y_0) 与 $(x_0 + \frac{\pi}{4}, -y_0)$ ，纵坐标相反，而且不是相邻的对称点，所以函数的周期 $T = 2(x_0 + \frac{\pi}{4} - x_0) = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 。

答案：B.

10. (5分) 已知曲线 $y = x^4 + ax^2 + 1$ 在点 $(-1, a+2)$ 处切线的斜率为8， $a = (\quad)$

- A. 9
- B. 6
- C. -9
- D. -6

解析： $\because y = x^4 + ax^2 + 1, \therefore y' = 4x^3 + 2ax,$

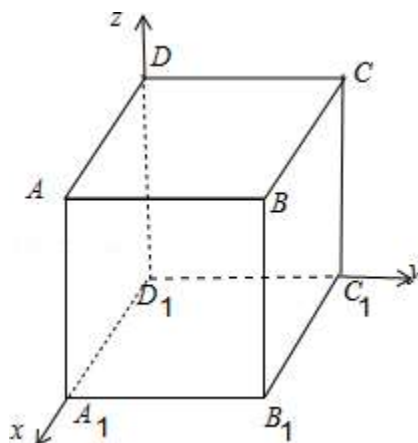
\because 曲线 $y = x^4 + ax^2 + 1$ 在点 $(-1, a+2)$ 处切线的斜率为8， $\therefore -4 - 2a = 8 \therefore a = -6$

答案：D.

11. (5分) 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 2AB$ ，则 CD 与平面 BDC_1 所成角的正弦值等于 (\quad)

- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- D. $\frac{1}{3}$

解析：设 $AB = 1$ ，则 $AA_1 = 2$ ，分别以 $\overrightarrow{D_1A_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1C_1}$ 、 $\overrightarrow{D_1D}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如下图所示：



则 $D(0, 0, 2)$ ， $C_1(0, 1, 0)$ ， $B(1, 1, 2)$ ， $C(0, 1, 2)$ ，

$\overrightarrow{DB} = (1, 1, 0)$ ， $\overrightarrow{DC_1} = (0, 1, -2)$ ， $\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$ ，

设 $\vec{n}=(x, y, z)$ 为平面 BDC_1 的一个法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DB}=0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DC}_1=0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x+y=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$, 取 $\vec{n}=(-2, 2,$

1),

设 CD 与平面 BDC_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \frac{\vec{n} \cdot \vec{DC}}{|\vec{n}| |\vec{DC}|} \right| = \frac{2}{3}$,

答案: A.

12. (5分) 已知抛物线 $C: y^2=8x$ 与点 $M(-2, 2)$, 过 C 的焦点, 且斜率为 k 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $\vec{MA} \cdot \vec{MB}=0$, 则 $k=(\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- C. $\sqrt{2}$
- D. 2

解析: 由抛物线 $C: y^2=8x$ 得焦点 $(2, 0)$,

由题意可知: 斜率 $k \neq 0$, 设直线 AB 为 $my=x-2$, 其中 $m=\frac{1}{k}$.

联立 $\begin{cases} my=x-2 \\ y^2=8x \end{cases}$, 得到 $y^2-8my-16=0$, $\Delta > 0$,

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. $\therefore y_1+y_2=8m$, $y_1y_2=-16$.

又 $\vec{MA}=(x_1+2, y_1-2)$, $\vec{MB}=(x_2+2, y_2-2)$,

$\therefore \vec{MA} \cdot \vec{MB}=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-2)(y_2-2)=(my_1+4)(my_2+4)+(y_1-2)(y_2-2)$
 $= (m^2+1)y_1y_2+(4m-2)(y_1+y_2)+20=-16(m^2+1)+(4m-2) \times 8m+20=4(2m-1)^2$.

由 $4(2m-1)^2=0$, 解得 $m=\frac{1}{2}$. $\therefore k=\frac{1}{m}=2$.

答案: D

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. (5分) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且当 $x \in [1, 3)$ 时, $f(x)=x-2$, 则 $f(-1)=\underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 因设 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数, 且当 $x \in [1, 3)$ 时, $f(x)=x-2$, 则 $f(-1)=f(1)=1-2=-1$.

答案: -1.

14. (5分) 从进入决赛的 6 名选手中决出 1 名一等奖, 2 名二等奖, 3 名三等奖, 则可能的决赛结果共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种. (用数字作答)

解析: 依题意, 可分三步, 第一步从 6 名选手中决出 1 名一等奖有 A_6^1 种方法,

第二步，再决出 2 名二等奖，有 C_5^2 种方法，

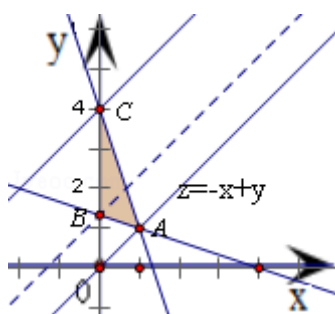
第三步，剩余三人为三等奖，

根据分步乘法计数原理得：共有 $A_6^1 \cdot C_5^2 = 60$ 种方法。

答案：60.

15. (5 分) 若 x 、 y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 4 \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$ ，则 $z=-x+y$ 的最小值为_____.

解析：作出不等式组 $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3y \geq 4 \\ 3x+y \leq 4 \end{cases}$ 表示的平面区域，



得到如图的 $\triangle ABC$ 及其内部，其中 $A(1, 1)$ ， $B(0, \frac{4}{3})$ ， $C(0, 4)$

设 $z=F(x, y)=-x+y$ ，将直线 $l: z=-x+y$ 进行平移，

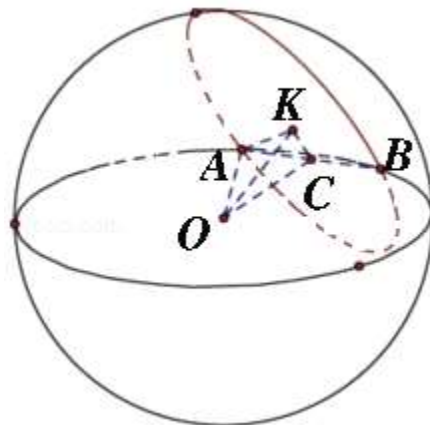
当 l 经过点 A 时，目标函数 z 达到最小值， $\therefore z_{\text{最小值}}=F(1, 1)=-1+1=0$ ，

答案：0

16. (5 分) 已知圆 O 和圆 K 是球 O 的大圆和小圆，其公共弦长等于球 O 的半径，

$OK=\frac{3}{2}$ ，且圆 O 与圆 K 所在的平面所成角为 60° ，则球 O 的表面积等于_____.

解析：如图所示，设球 O 的半径为 r ， AB 是公共弦， $\angle OCK$ 是面面角，



根据题意得 $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}r$ ， $CK=\frac{\sqrt{3}}{4}r$ ，

在 $\triangle OCK$ 中, $OC^2=OK^2+CK^2$, 即 $\frac{3}{4}r^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{16}r^2$, $\therefore r^2=4$, \therefore 球 O 的表面积等于 $4\pi r^2=16\pi$.

答案: 16π

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7=4$, $a_{19}=2a_9$,

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n=\frac{1}{na_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

解析: (I) 由 $a_7=4$, $a_{19}=2a_9$, 结合等差数列的通项公式可求 a_1 , d , 进而可求 a_n

(II) 由 $b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$, 利用裂项求和即可求解

答案: (I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_7=4, a_{19}=2a_9, \therefore \begin{cases} a_1+6d=4 \\ a_1+18d=2(a_1+8d) \end{cases}, \text{解得 } a_1=1, d=\frac{1}{2}, \therefore a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1+n}{2}.$$

$$(II) \because b_n=\frac{1}{na_n}=\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}, \therefore S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}.$$

18. (12分) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的内角对边分别为 a, b, c , 满足 $(a+b+c)(a-b+c)=ac$.

(I) 求 B .

(II) 若 $\sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$, 求 C .

解析: (I) 已知等式左边利用多项式乘多项式法则计算, 整理后得到关系式, 利用余弦定理表示出 $\cos B$, 将关系式代入求出 $\cos B$ 的值, 由 B 为三角形的内角, 利用特殊角的三角函数值即可求出 B 的度数;

(II) 由 (I) 得到 $A+C$ 的度数, 利用两角和与差的余弦函数公式化简 $\cos(A-C)$, 变形后将 $\cos(A+C)$ 及 $2\sin A \sin C$ 的值代入求出 $\cos(A-C)$ 的值, 利用特殊角的三角函数值求出 $A-C$ 的值, 与 $A+C$ 的值联立即可求出 C 的度数.

$$\text{答案: (I) } \because (a+b+c)(a-b+c)=(a+c)^2-b^2=ac, \therefore a^2+c^2-b^2=-ac, \therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2},$$

又 B 为三角形的内角, 则 $B=120^\circ$;

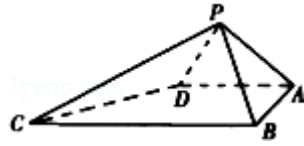
$$(II) \text{ 由 (I) 得: } A+C=60^\circ, \therefore \sin A \sin C=\frac{\sqrt{3}-1}{4}, \cos(A+C)=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos(A-C)=\cos A \cos C+\sin A \sin C=\cos A \cos C-\sin A \sin C+2\sin A \sin C=\cos(A+C)+2\sin A \sin C=\frac{1}{2}$$

$$+2 \times \frac{\sqrt{3}-1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore A-C=30^\circ$ 或 $A-C=-30^\circ$, 则 $C=15^\circ$ 或 $C=45^\circ$.

19. (12分) 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $BC = 2AD$, $\triangle PAB$ 与 $\triangle PAD$ 都是边长为 2 的等边三角形.



(I) 证明: $PB \perp CD$;

(II) 求点 A 到平面 PCD 的距离.

解析: (I) 取 BC 的中点 E, 连接 DE, 则 ABED 为正方形, 过 P 作 $PO \perp$ 平面 ABCD, 垂足为 O, 连接 OA, OB, OD, OE, 证明 $PB \perp OE$, $OE \parallel CD$, 即可证明 $PB \perp CD$;

(II) 取 PD 的中点 F, 连接 OF, 证明 O 到平面 PCD 的距离 OF 就是 A 到平面 PCD 的距离, 即可求得点 A 到平面 PCD 的距离.

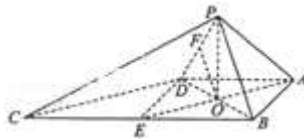
答案: (I) 取 BC 的中点 E, 连接 DE, 则 ABED 为正方形, 过 P 作 $PO \perp$ 平面 ABCD, 垂足为 O, 连接 OA, OB, OD, OE,

由 $\triangle PAB$ 和 $\triangle PAD$ 都是等边三角形知 $PA = PB = PD$,

$\therefore OA = OB = OD$, 即 O 为正方形 ABED 对角线的交点, $\therefore OE \perp BD$, $\therefore PB \perp OE$,

\because O 是 BD 的中点, E 是 BC 的中点, $\therefore OE \parallel CD$, $\therefore PB \perp CD$.

(II) 取 PD 的中点 F, 连接 OF, 则 $OF \parallel PB$,



由 (I) 知 $PB \perp CD$, $\therefore OF \perp CD$,

$\because OD = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$, $OP = \sqrt{PD^2 - OD^2} = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle POD$ 为等腰三角形, $\therefore OF \perp PD$,

$\because PD \cap CD = D$, $\therefore OF \perp$ 平面 PCD,

$\because AE \parallel CD$, $CD \subset$ 平面 PCD, $AE \not\subset$ 平面 PCD, $\therefore AE \parallel$ 平面 PCD,

\therefore O 到平面 PCD 的距离 OF 就是 A 到平面 PCD 的距离,

$\because OF = \frac{1}{2}PB = 1$, \therefore 点 A 到平面 PCD 的距离为 1.

20. (12分) 甲、乙、丙三人进行羽毛球练习赛, 其中两人比赛, 另一人当裁判, 每局比赛结束时, 负的一方在下一局当裁判, 设各局中双方获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$, 各局比赛的结果都相互独立, 第 1 局甲当裁判.

(I) 求第 4 局甲当裁判的概率;

(II) 求前 4 局中乙恰好当 1 次裁判概率.

解析: (I) 设 A_1 表示事件“第二局结果为甲胜”, A_2 表示事件“第三局甲参加比赛结果为甲负”, A 表示事件“第四局甲当裁判”, 可得 $A = A_1 \cdot A_2$. 利用相互独立事件的概率计算公式即可得出;

(II) 设 B_1 表示事件“第一局比赛结果为乙胜”, B_2 表示事件“第二局乙参加比赛结果为乙胜”, B_3 表示事件“第三局乙参加比赛结果为乙胜”, B 表示事件“前 4 局中乙恰好当 1 次

裁判”. 可得 $B = \overline{B_1} \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + B_1 \cdot \overline{B_2}$, 利用互斥事件和相互独立事件的概率计算

公式即可得出.

答案: (I) 设 A_1 表示事件“第二局结果为甲胜”, A_2 表示事件“第三局甲参加比赛结果为甲负”, A 表示事件“第四局甲当裁判”. 则 $A = A_1 \cdot A_2$.

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) P(A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(II) 设 B_1 表示事件“第一局比赛结果为乙胜”, B_2 表示事件“第二局乙参加比赛结果为乙胜”,

B_3 表示事件“第三局乙参加比赛结果为乙胜”, B 表示事件“前 4 局中乙恰好当 1 次裁判”.

$$\text{则 } B = \overline{B_1} \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + B_1 \cdot \overline{B_2},$$

$$\text{则 } P(B) = P(\overline{B_1} \cdot B_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3} + B_1 \cdot \overline{B_2})$$

$$= P(\overline{B_1} \cdot B_3) + P(B_1 \cdot B_2 \cdot \overline{B_3}) + P(B_1 \cdot \overline{B_2})$$

$$= P(\overline{B_1}) P(B_3) + P(B_1) P(B_2) P(\overline{B_3}) + P(B_1) P(\overline{B_2})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}.$$

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x + 1$.

(I) 求 $a = \sqrt{2}$ 时, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$, 求 a 的取值范围.

解析: (I) 把 $a = \sqrt{2}$ 代入可得函数 $f(x)$ 的解析式, 求导数令其为 0 可得 $x = -\sqrt{2} - 1$, 或 $x = \sqrt{2} + 1$, 判断函数在区间 $(-\infty, -\sqrt{2} - 1)$, $(-\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$, $(\sqrt{2} + 1, +\infty)$ 的正负

可得单调性; (II) 由 $f(2) \geq 0$, 可得 $a \geq -\frac{5}{4}$, 当 $a \geq -\frac{5}{4}$, $x \in (2, +\infty)$ 时, 由不等式的证

明方法可得 $f'(x) > 0$, 可得单调性, 进而可得当 $x \in [2, +\infty)$ 时, 有 $f(x) \geq f(2) \geq 0$ 成立, 进而可得 a 的范围.

答案: (I) 当 $a = \sqrt{2}$ 时, $f(x) = x^3 + 3\sqrt{2}x^2 + 3x + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 6\sqrt{2}x + 3, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 可得 } x = -\sqrt{2} - 1, \text{ 或 } x = -\sqrt{2} + 1,$$

当 $x \in (-\infty, -\sqrt{2} - 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (-\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} + 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-\sqrt{2} + 1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

(II) 由 $f(2) \geq 0$, 可解得 $a \geq -\frac{5}{4}$, 当 $a \geq -\frac{5}{4}$, $x \in (2, +\infty)$ 时,

$$f'(x) = 3(x^2 + 2ax + 1) \geq 3(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = 3(x - \frac{1}{2})(x - 2) > 0,$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 单调递增, 于是当 $x \in [2, +\infty)$ 时, $f(x) \geq f(2) \geq 0$,

综上所述, a 的取值范围是 $[-\frac{5}{4}, +\infty)$

22. (12分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 离心率为

3, 直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$.

(I) 求 a, b ;

(II) 设过 F_2 的直线 l 与 C 的左、右两支分别相交于 A, B 两点, 且 $|AF_1| = |BF_1|$, 证明: $|AF_2|$ 、 $|AB|$ 、 $|BF_2|$ 成等比数列.

解析: (I) 由题设, 可由离心率为 3 得到参数 a, b 的关系, 将双曲线的方程用参数 a 表示出来, 再由直线 $y=2$ 与 C 的两个交点间的距离为 $\sqrt{6}$ 建立方程求出参数 a 即可得到双曲线的方程;

(II) 由 (I) 的方程求出两焦点坐标, 设出直线 l 的方程设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将其与双曲线 C 的方程联立, 得出 $x_1+x_2 = \frac{6k^2}{k^2-8}, x_1x_2 = \frac{9k^2+8}{k^2-8}$, 再利用 $|AF_1| = |BF_1|$ 建立关于 A, B

坐标的方程, 得出两点横坐标的关系 $x_1+x_2 = -\frac{2}{3}$, 由此方程求出 k 的值, 得出直线的方程, 从而可求得: $|AF_2|$ 、 $|AB|$ 、 $|BF_2|$, 再利用等差数列的性质进行判断即可证明出结论.

答案: (I) 由题设知 $\frac{c}{a} = 3$, 即 $\frac{b^2+a^2}{a^2} = 9$, 故 $b^2 = 8a^2$, 所以 C 的方程为 $8x^2 - y^2 = 8a^2$,

将 $y=2$ 代入上式, 并求得 $x = \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}$, 由题设知, $2\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{6}$, 解得 $a^2 = 1$,

所以 $a=1, b=2\sqrt{2}$.

(II) 由 (I) 知, $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$, C 的方程为 $8x^2 - y^2 = 8$ ①.

由题意, 可设 l 的方程为 $y=k(x-3)$, $|k| < 2\sqrt{2}$ 代入 ① 并化简得 $(k^2-8)x^2 - 6k^2x + 9k^2 + 8 = 0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 \leq -1, x_2 \geq 1, x_1+x_2 = \frac{6k^2}{k^2-8}, x_1x_2 = \frac{9k^2+8}{k^2-8}$,

于是 $|AF_1| = \sqrt{(x_1+3)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1+3)^2 + 8x_1^2 - 8} = -(3x_1+1)$,

$|BF_1| = \sqrt{(x_2+3)^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_2+3)^2 + 8x_2^2 - 8} = 3x_2+1$,

$|AF_1| = |BF_1|$ 得 $-(3x_1+1) = 3x_2+1$, 即 $x_1+x_2 = -\frac{2}{3}$,

故 $\frac{6k^2}{k^2-8} = -\frac{2}{3}$, 解得 $k^2 = \frac{4}{5}$, 从而 $x_1x_2 = \frac{9k^2+8}{k^2-8} = \frac{19}{9}$,

由于 $|AF_2| = \sqrt{(x_1-3)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1+3)^2 + 8x_1^2 - 8} = 1-3x_1$,

$|BF_2| = \sqrt{(x_2-3)^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_2+3)^2 + 8x_2^2 - 8} = 3x_2-1$,

故 $|AB| = |AF_2| - |BF_2| = 2-3(x_1+x_2) = 4, |AF_2| \cdot |BF_2| = 3(x_1+x_2) - 9x_1x_2 - 1 = 16$,

因而 $|AF_2| \cdot |BF_2| = |AB|^2$, 所以 $|AF_2|$ 、 $|AB|$ 、 $|BF_2|$ 成等比数列.