2007年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

文科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3到10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

3．本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

球是表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

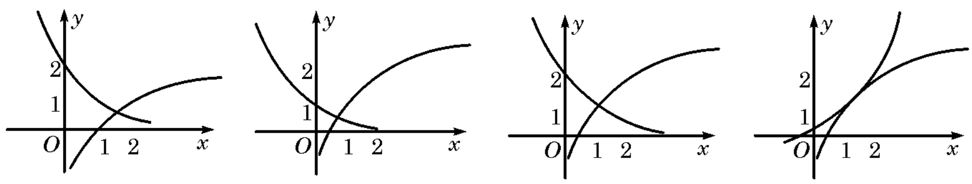
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

其中R表示球的半径

一、选择题

(1)设集合 M={4,5,6,8},集合 N={3,5,7,8}那么 $M\cup N$=

(A){3,4,5,6,7,8}　　(B){5,8}　　(C){3,5,7,8}　　(D){4,5,6,8}



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(2)函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{-x+1}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是

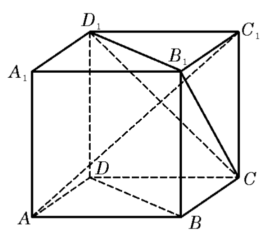
(3)某商场买来一车苹果，从中随机抽取了10个苹果，其重量（单位：克）分别为：150，152，153，149，148，146，151，150，152，147，由此估计这车苹果单个重量的期望值是

(A)150.2克　　(B)149.8克　　(C)149.4克　　(D)147.8克

(4)如图，$ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是

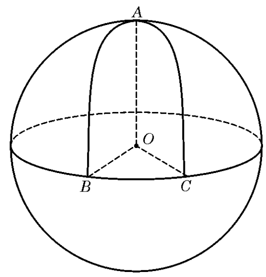
(A）BD∥平面 CB_1D_1　　(B)$AC1\perp$BD

(C)$AC_1\perp$平面 CB_1D_1　　(D)异面直线 AD 与 CB 所成的角为60°



（5）如果双曲线$\frac{x_2}{4}-\frac{y^2}{2}$＝1 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2,那么点 P 到 y 轴的距离是

(A) $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　(B) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　(C) $2\sqrt{6}$　　(D) $2\sqrt{3}$



（6）设球 O 的半径是 1，A、B、C 是球面上三点，已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是$\frac{\pi}{2}$，且二面角 B-OA-C 的大小是$\frac{\pi}{3}$，则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是

(A) $\frac{7\pi}{6}$　　(B) $\frac{5\pi}{4}$　　(C) $\frac{4\pi}{3}$　　(D) $\frac{3\pi}{2}$

（7）等差数列$\{a_n\}$中，a_1=1,a_3+a_5=14，其降 n 项和 S_n=100,则 n=

(A)9　　(B)10　　(C)11　　(D)12

(8)设 A（a,1）,B(2,b),C(4,5)为坐标平面上三点，O 为坐标原点，若 OA 与 OB 在 OC 方向上的投影相同，则 a 与 b 满足的关系式为

A.4a-5b=3　　B.5a-4b=3　　C.4a+5b=14　　D.5a+4b=12

(9)用数字 1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字，并且比 20 000 大的五位偶数共有

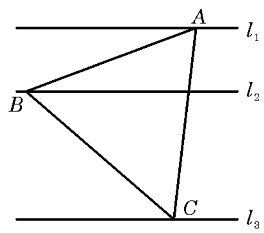
A.48 个　　B.36 个　　C.24 个　　D.18 个

(10)已知抛物线 y-x^2+3 上存在关于直线 x+y=0 对称的相异两点 A、B，则|AB|等于

A.3　　B.4　　C.3$\sqrt{2}$　　D.4$\sqrt{2}$

（11）某公司有 60 万元资金，计划投资甲、乙两个项目，按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的$\frac{2}{3}$倍，且对每个项目的投资不能低于 5 万元，对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润，对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润，该公司正确提财投资后，在两个项目上共可获得的最大利润为

A.36 万元　　B.31.2 万元　　C.30.4 万元　　D.24 万元



(12)如图，l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线，l_1 与 l_2 与 l_3 同的距离是 2，正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上，则△ABC 的边长是

A.2$\sqrt{3}$　　B.$\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C. $\frac{3-\sqrt{7}}{4}$　　D.$\frac{2-\sqrt{21}}{3}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题横线上.

（13）.$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中的第 5 项为常数项，那么正整数$n$的值是__________.

14、在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱长为$\sqrt{2}$，底面三角形的边长为 1，则BC_1与侧面ACC_1A_1所成的角是__________

15、已知$\odot O$的方程是$x^2+y^2-2=0$，$\odot O'$的方程是$x^2+y^2-8x+10=0$，由动点P向$\odot O$和$\odot O'$所引的切线长相等，则运点P的轨迹方程是________________

16、下面有 5 个命题：

①函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π；

②终边在 y 轴上的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$；

③在同一坐标系中，函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有 3 个公共点；

④把函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象；

⑤角 θ 为第一象限角的充要条件是 $\sin\theta>0$

其中，真命题的编号是___________（写出所有真命题的编号）

三、解答题：本大题共 6 小题。共 74 分，解答应写出文字说明。证明过程或运算步骤

（17）（本小题满分 12 分）

厂家在产品出厂前，需对产品做检验，厂家对一般产品致冷商家的，商家符合规定拾取一定数量的产品做检验，以决定是否验收这些产品.

（Ⅰ）若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.3，从中任意取出 4 种进行检验，求至少要 1 件是合格产品的概率.

(Ⅱ)若厂家发给商家 20 件产品，其中有 3 件不合格，按合同规定该商家从中任取 2 件，来进行检验，只有 2 件产品合格时才接收这些产品，否则拒收，分别求出该商家计算出不合格产品为 1 件和 2 件的概率，并求该商家拒收这些产品的概率。

（18）（本小题满分 12 分）

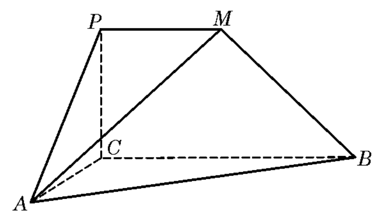
已知 $\cos\alpha=\frac{1}{7}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,

(Ⅰ)求 $\tan2\alpha$ 的值；

（Ⅱ）求 β.

(19) (本小题满分 12 分)

如图,平面 $PCBM\perp$ 平面 ABC,$\angle PCB=90°$,$PM\parallel BC$,直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°，又 $AC=1$,$BC=2PM=2$,$\angle ACB=90°$



(Ⅰ)求证：$AC\perp BM$;

(Ⅱ)求二面角 M-AB-C 的大小；

（Ⅲ）求多面体 $PMABC$ 的体积.

（20）(本小题满分 12 分)

设函数 $f(x)=ax^3+bx+c$（$a\neq0$）为奇函数，其图象在点（$1,f(1)$）处的切线与直线 $x-6y-7=0$ 垂直，导函数 $f'(x)$ 的最小值为－12.

（Ⅰ）求 a，b，c 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间，并求函数 $f(x)$ 在〔$-1,3$〕上的最大值和最小值.

（21）(本小题满分 12 分)

求 F_1、F_2 分别是横线 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点.

（Ⅰ）若 r 是第一象限内该数轴上的一点，$\overrightarrow{PF_1}^2+\overrightarrow{PF_2}^2=-\dfrac{5}{4}$，求点 P 的作标；

（Ⅱ）设过定点 M（0，2）的直线 l 与椭圆交于同的两点 A、B，且∠ADB 为锐角（其中 O 为作标原点)，求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

（22）(本小题满分 14 分)

已知函数 $f(x)=x^2-4$，设曲线 $y=f(x)$ 在点（x_n，$f(x_n)$）处的切线与 x 轴的交点为（x_{n+1},u）（u,N^+），其中为正实数.

（Ⅰ）用 x_x 表示 x_{n+1}；

（Ⅱ）若 a_1=4，记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$，证明数列｛$a_1$｝成等比数列，并求数列｛$x_n$｝的通项公式；

（Ⅲ）若 x_1＝4，b_n＝x_n－2，T_n 是数列｛b_n｝的前 n 项和，证明 T_n<3.

2007年普通高等学校招生全国统一考试(四川卷)

文科数学参考答案(含详细解析)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

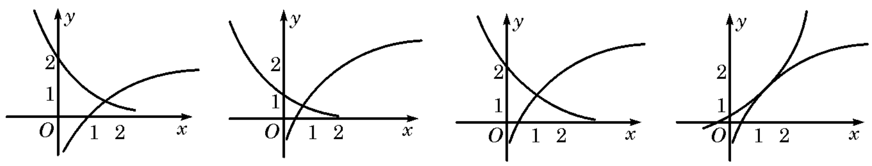
1、设集合$M=\{4,5,6,8\}$，集合$N=\{3,5,7,8\}$，那么$M\cup N=$（　　）

（A）$\{3,4,5,6,7,8\}$　　（B）$\{5,8\}$　　（C）$\{3,5,7,8\}$　　（　D　）

$M=\{4,5,6,8\}$

解析：选A.

2、函数$f(x)=1+\log_2 x$与$g(x)=2^{-x+1}$在同一直角坐标系下的图象大致是（　　）



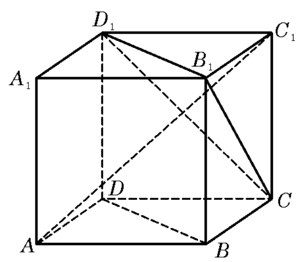
(A)　　(B)　　(C)　　(D)

解析：选C.

3、某商场买来一车苹果，从中随机抽取了10个苹果，其重量（单位：克）分别为：150，152，153，149，148，146，151，150，152，147，由此估计这车苹果单个重量的期望值是（　　）

（A）150.2克　　（B）149.8克　　（C）149.4克　　（D）147.8克

解析：选B.



4、如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，下面结论错误的是（　　）

（A）$BD//$平面CB_1D_1

（B）$AC_1\perp BD$

（C）$AC_1\perp$平面CB_1D_1

（D）异面直线AD与CB_1所成的角为$60°$

解析：选D.

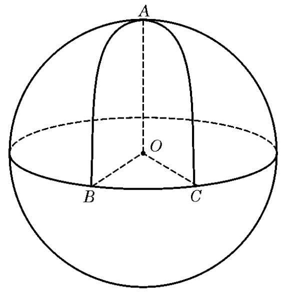
5、如果双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{2}=1$上一点$P$到双曲线右焦点的距离是2，那么点$P$到$y$轴的距离是

（　　）

（A）$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$　　（B）$\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　　（C）$2\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{3}$

解析：选 A．由点 P 到双曲线右焦点 $(\sqrt{6},0)$ 的距离是 2 知 P 在双曲线右支上．又由双曲线的第二定义知点 P 到双曲线右准线的距离是 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，双曲线的右准线方程是 $x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，故点 P 到 y 轴的距离是 $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$．

6、设球 O 的半径是 1，A、B、C 是球面上三点，已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\dfrac{\pi}{2}$，且二面角 $B-OA-C$ 的大小是 $\dfrac{\pi}{3}$，则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是（　　）



（A）$\dfrac{7\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{5\pi}{4}$

（C）$\dfrac{4\pi}{3}$　　（D）$\dfrac{3\pi}{2}$

解析：选 C．$d=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CA}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4\pi}{3}$．本题考查球面距离．

7、等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_3+a_5=14$，其前 n 项和 $S_n=100$，则 $n=$（　　）

（A）9　　（B）10　　（C）11　　（D）12

解析：选 B．

8、设 $A(a,1)$，$B(2,b)$，$C(4,5)$ 为坐标平面上三点，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的投影相同，则 a 与 b 满足的关系式为（　　）

（A）$4a-5b=3$　　（B）$5a-4b=3$　　（C）$4a+5b=14$　　（D）$5a+4b=14$

解析：选 A．由 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向上的投影相同，可得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 即

$$4a+5=8+5b,\ 4a-5b=3.$$

9、用数字 1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字，并且比 20000 大的五位偶数共有（　　）

（A）48 个　　（B）36 个　　（C）24 个　　（D）18 个

解析：选 B．个位是 2 的有 $3A_3^3=18$ 个，个位是 4 的有 $3A_3^3=18$ 个，所以共有 36 个．

10、已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B，则 $|AB|$ 等于（　　）

（A）3　　（B）4　　（C）$3\sqrt{2}$　　（D）$4\sqrt{2}$

解析：选 C．设直线 AB 的方程为 $y=x+b$，由

$\begin{cases} y=-x^2+3 \\ y=x+b \end{cases} \Rightarrow x^2+x+b-3=0 \Rightarrow x_1+x_2=-1$，进而可求出 AB 的中点

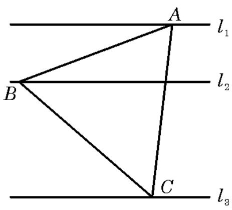
$M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+b)$，又由 $M(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+b)$ 在直线 $x+y=0$ 上可求出 $b=1$，$\therefore x^2+x-2=0$，由弦长公式可求出 $\left|AB\right|=\sqrt{1+1^2}\sqrt{1^2-4\times(-2)}=3\sqrt{2}$．本题考查直线与圆锥曲线的位置关系．自本题起运算量增大．

11、某公司有 60 万元资金，计划投资甲、乙两个项目，按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍，且对每个项目的投资不能低于 5 万元，对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润，对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润，该公司正确规划投资后，在这两个项目上共可获得的最大利润为（　　）

（A）36 万元　　（B）31.2 万元　　（C）30.4 万元　　（D）24 万元

解析：选 B．对甲项目投资 24 万元，对乙项目投资 36 万元，可获最大利润 31.2 万元．因为对乙项目投资获利较大，故在投资规划要求内（对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍）尽可能多地安排资金投资于乙项目，即对项目甲的投资等于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍时可获最大利润．这是最优解法．也可用线性规划的通法求解．注意线性规划在高考中以应用题型的形式出现．

12、如图，l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线，l_1 与 l_2 间的距离是 1，l_2 与 l_3 间的距离是 2，正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上，则⊿ ABC 的边长是（　　）



（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$\frac{4\sqrt{6}}{3}$

（C）$\frac{3\sqrt{17}}{4}$　　（D）$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

解析：选 D．过点 C 作 l_2 的垂线 l_4，以 l_2、l_4 为 x 轴、y 轴建立平面直角坐标系．设 $A(a,1)$、$B(b,0)$、$C(0,-2)$，由 $AB=BC=AC$ 知 $(a-b)^2+1=b^2+4=a^2+9=\text{边长}^2$，检验 A：$(a-b)^2+1=b^2+4=a^2+9=12$，无解；检验 B：$(a-b)^2+1=b^2+4=a^2+9=\frac{32}{3}$，无解；检验 D：$(a-b)^2+1=b^2+4=a^2+9=\frac{28}{3}$，正确．本题是把关题．在基础中考能力，在综合中考能力，在应用中考能力，在新型题中考能力全占全了．是一道精彩的好题．可惜区分度太小．

二、**填空题：**本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分；把答案填在题中的横线上．

13、$(x-\frac{1}{x})^n$ 的展开式中的第 5 项为常数项，那么正整数 n 的值是__________.

解析：$n=8$.

14、在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 $\sqrt{2}$，底面三角形的边长为 1，则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是__________

解析：$BC_1=\sqrt{3}$，点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$，$\theta=30°$.

15、已知 $\odot O$ 的方程是 $x^2+y^2-2=0$，$\odot O'$ 的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$，由动点 P 向 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 所引的切线长相等，则运点 P 的轨迹方程是________________

解析：$\odot O$：圆心 $O(0,0)$，半径 $r=\sqrt{2}$；$\odot O'$：圆心 $O'(4,0)$，半径 $r'=\sqrt{6}$. 设 $P(x,y)$，由切线长相等得

$x^2+y^2-2=x^2+y^2-8x+10$，$x=\frac{3}{2}$.

16、下面有 5 个命题：

①函数 $y=\sin^4 x-\cos^4 x$ 的最小正周期是 π；

②终边在 y 轴上的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in Z\}$；

③在同一坐标系中，函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有 3 个公共点；

④把函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$ 的图象；

⑤角 θ 为第一象限角的充要条件是 $\sin\theta>0$

其中，真命题的编号是__________（写出所有真命题的编号）

解析：① $y=\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x=-cos2x$，正确；②错误；③ $y=\sin x$，$y=\tan x$ 和 $y=x$ 在第一象限无交点，错误；④正确；⑤错误．故选①④.

三、**解答题：**本大题共 6 小题，共 74 分；解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17、(本小题满分 12 分) 厂家在产品出厂前，需对产品做检验，厂家将一批产品发给商家时，商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验，以决定是否接收这些产品.

（Ⅰ）若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8，从中任意取出 4 种进行检验，求至少要 1 件是合格产品的概率.

（Ⅱ）若厂家发给商家 20 件产品，其中有 3 件不合格，按合同规定该商家从中任取 2 件，来进行检验，只有 2 件产品合格时才接收这些产品，否则拒收，分别求出该商家计算出不合格产品为 1 件和 2 件的概率，并求该商家拒收这些产品的概率。

解析：本题考查相互独立事件、互斥事件等的概率计算，考查运用所学知识与方法解决实际问题的能力.

（Ⅰ）记“厂家任取 4 件产品检验，其中至少有 1 件是合格品”为事件 A．用对立事件 $\overline{A}$ 来

算，有

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0.2^4=0.9984$$

（Ⅱ）记“商家任取2件产品检验，其中不合格产品数为i件” $(i=1,2)$为事件A_i.

$$P(A_1)=\frac{C_{17}^1C_3^1}{C_{20}^2}=\frac{51}{190}$$

$$P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_{20}^2}=\frac{3}{190}$$

∴商家拒收这批产品的概率

$$P=P(A_1)+P(A_2)=\frac{51}{190}+\frac{3}{190}=\frac{27}{95}.$$

故商家拒收这批产品的概率为$\frac{27}{95}$.

18、（本小题满分12分）已知$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，且$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

（Ⅰ）求$\tan 2\alpha$的值；

（Ⅱ）求β.

解析：本题考查三角恒等变形的主要基本公式、三角函数值的符号、已知三角函数值求角以及计算能力.

（Ⅰ）由$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{1}{7})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

$$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{7}{1}=4\sqrt{3}.$$

于是$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times4\sqrt{3}}{1-(4\sqrt{3})^2}=-\frac{8\sqrt{3}}{47}$.

（Ⅱ）由$0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，得$0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

又∵$\cos(\alpha-\beta)=\frac{13}{14}$，

$$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-(\frac{13}{14})^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

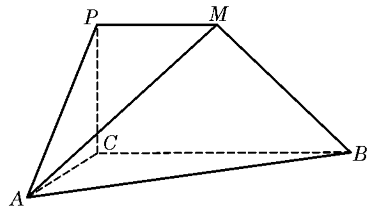
由$\beta=\alpha-(\alpha-\beta)$，得

$$\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$$

$=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{1}{2}$

$\therefore \beta=\frac{\pi}{3}$.



19、（本小题满分 12 分）如图，平面 $PCBM\perp$ 平面 ABC，$\angle PCB=90°$，$PM // BC$，直线 AM 与直线 PC 所成的角为 $60°$，又 $AC=1$，$BC=2PM=2$，$\angle ACB=90°$.

（Ⅰ）求证：$AC\perp BM$；

（Ⅱ）求二面角 $M-AB-C$ 的大小；

（Ⅲ）求多面体 $PMABC$ 的体积.

解析：本题主要考查异面直线所成的角、平面与平面垂直、二面角、棱锥体积等有关知识，考查思维能力和空间想象能力、应用向量知识解决数学问题的能力、化归转化能力和推理运算能力.

（Ⅰ）$\because$ 平面 $PCBM\perp$ 平面 ABC，$AC\perp BC$，$AC\subset$ 平面 ABC.

$\therefore AC\perp$ 平面 $PCBM$

又 $\because BM\subset$ 平面 $PCBM$

$\therefore AC\perp BM$

（Ⅱ）取 BC 的中点 N，则 $CN=1$．连接 AN、MN.

$\because$ 平面 $PCBM\perp$ 平面 ABC，平面 $PCBM\cap$ 平面 $ABC=BC$，$PC\perp BC$.

$\therefore PC\perp$ 平面 ABC.

$\because PM \underset{=}{//} CN$，$\therefore MN \underset{=}{//} PC$，从而 $MN\perp$ 平面 ABC.

作 $NH\perp AB$ 于 H，连结 MH，则由三垂线定理知 $AB\perp MH$.

从而 $\angle MHN$ 为二面角 $M-AB-C$ 的平面角.

$\because$ 直线 AM 与直线 PC 所成的角为 $60°$，

$\therefore \angle AMN=60°$.

在 ΔACN 中，由勾股定理得 $AN=\sqrt{2}$.

在 $Rt\Delta AMN$ 中，$MN=AN\cdot\cot\angle AMN=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

在 $Rt\Delta BNH$ 中，$NH=BN\cdot\sin\angle ABC=BN\cdot\frac{AC}{AB}=1\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

在 $Rt\Delta MNH$ 中，$\tan\angle MHN=\frac{MN}{NH}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{30}}{3}$

故二面角 $M-AB-C$ 的大小为 $arc\tan\dfrac{\sqrt{30}}{3}$

（Ⅱ）如图以 C 为原点建立空间直角坐标系 $C-xyz$.

设 $P(0,0,z_0)$ $(z_0>0)$，

有 $B(0,2,0)$，$A(1,0,0)$，$M(0,1,z_0)$.

$\overrightarrow{AM}=(-1,1,z_0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,z_0)$

由直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60° ，得

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CP}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\cos 60^\circ$

即 $z_0^2=\dfrac{1}{2}\sqrt{z_0^2+2}\cdot z_0$，解得 $z_0=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore\overrightarrow{AM}=(-1,1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$，$\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$

设平面 MAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x+y+\dfrac{\sqrt{6}}{3}z=0\\ -x+2y=0\end{cases}$，取 $z_1=\sqrt{6}$，得 $\overrightarrow{n_1}=(4,2,\sqrt{6})$

取平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$

则 $\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{26}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$

由图知二面角 $M-AB-C$ 为锐二面角，故二面角 $M-AB-C$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

（Ⅲ）多面体 $PMABC$ 就是四棱锥 $A-BCPM$

$$V_{PMABC}=V_{A-PMBC}=\frac{1}{3}\cdot S_{PMBC}\cdot AC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(PM+CB)\cdot CP\cdot AC=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(2+1)\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot 1=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

.

20、(本小题满分 12 分) 设函数 $f(x)=ax^3+bx+c$ $(a\neq 0)$ 为奇函数，其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x-6y-7=0$ 垂直，导函数 $f'(x)$ 的最小值为 -12 .

（Ⅰ）求 a，b，c 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间，并求函数 $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值和最小值.

解析：本题考查函数的奇偶性、单调性、二次函数的最值、导数的应用等基础知识，以及推理能力和运算能力.

（Ⅰ）$\because$ $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore$ $f(-x)=-f(x)$

即 $-ax^3-bx+c=-ax^3-bx-c$

$\therefore c=0$

$\because$ $f'(x)=3ax^2+b$ 的最小值为 -12

$\therefore b=-12$

又直线 $x-6y-7=0$ 的斜率为 $\dfrac{1}{6}$

因此，$f'(1)=3a+b=-6$

$\therefore a=2$，$b=-12$，$c=0$.

（Ⅱ）$f(x)=2x^3-12x$.

$f'(x)=6x^2-12=6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$，列表如下：

x	$(-\infty,-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间是 $(-\infty,-\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2},+\infty)$

$\because$ $f(-1)=10$，$f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$，$f(3)=18$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值是 $f(3)=18$，最小值是 $f(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}$.

21、(本小题满分 12 分) 设 F_1、F_2 分别是椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点.

（Ⅰ）若 P 是第一象限内该椭圆上的一点，且 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=-\dfrac{5}{4}$，求点 P 的作标；

（Ⅱ）设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于同的两点 A、B，且 $\angle AOB$ 为锐角（其中 O 为

作标原点），求直线l的斜率k的取值范围．

解析：本题主要考查直线、椭圆、平面向量的数量积等基础知识，以及综合运用数学知识解决问题及推理计算能力．

（Ⅰ）易知$a=2$，$b=1$，$c=\sqrt{3}$．

$\therefore F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$．设$P(x,y)\ (x>0,y>0)$．则

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-x,-y)(\sqrt{3}-x,-y)=x^2+y^2-3=-\dfrac{5}{4}$，又$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{7}{4}\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x^2=1\\ y^2=\dfrac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，$P(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$．

（Ⅱ）显然$x=0$不满足题设条件．可设l的方程为$y=kx+2$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$．

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+2\end{cases}\Rightarrow x^2+4(kx+2)^2=4\Rightarrow(1+4k^2)x^2+16kx+12=0$

$\therefore x_1x_2=\dfrac{12}{1+4k^2}$，$x_1+x_2=-\dfrac{16k}{1+4k^2}$

由$\Delta=(16k)^2-4\cdot(1+4k^2)\cdot 12>0$

$16k^2-3(1+4k^2)>0$，$4k^2-3>0$，得$k^2>\dfrac{3}{4}$．①

又$\angle AOB$为锐角$\Leftrightarrow\cos\angle AOB>0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$，

$\therefore\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$

又$y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4$

$$\begin{aligned}\therefore x_1x_2+y_1y_2&=(1+k^2)x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4\\&=(1+k^2)\cdot\frac{12}{1+4k^2}+2k\cdot(-\frac{16k}{1+4k^2})+4\\&=\frac{12(1+k^2)}{1+4k^2}-\frac{2k\cdot 16k}{1+4k^2}+4\\&=\frac{4(4-k^2)}{1+4k^2}>0\end{aligned}$$

$\therefore -\dfrac{1}{4} < k^2 < 4$．②

综①②可知 $\dfrac{3}{4} < k^2 < 4$，$\therefore k$ 的取值范围是 $(-2,-\dfrac{\sqrt{3}}{2})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{2},2)$．

22、(本小题满分 14 分）已知函数 $f(x)=x^2-4$，设曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(x_{n+1},0)$ $(n\in N^*)$，其中 x_1 为正实数．

（Ⅰ）用 x_n 表示 x_{n+1}；

（Ⅱ）若 $x_1=4$，记 $a_n=\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$，证明数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，并求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

（Ⅲ）若 $x_1=4$，$b_n=x_n-2$，T_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，证明 $T_n<3$．

解析：本题综合考查数列、函数、不等式、导数应用等知识，以及推理论证、计算及解决问题的能力．

（Ⅰ）由题可得 $f'(x)=2x$．

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程是：$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$．

即 $y-(x_n^2-4)=2x_n(x-x_n)$．

令 $y=0$，得 $-(x_n^2-4)=2x_n(x_{n+1}-x_n)$．

即 $x_n^2+4=2x_nx_{n+1}$．

显然 $x_n\neq 0$，$\therefore x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$．

（Ⅱ）由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$，知 $x_{n+1}+2=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}+2=\dfrac{(x_n+2)^2}{2x_n}$，同理 $x_{n+1}-2=\dfrac{(x_n-2)^2}{2x_n}$．

故 $\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=(\dfrac{x_n+2}{x_n-2})^2$．

从而 $\lg\dfrac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=2\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}$，即 $a_{n+1}=2a_n$．所以，数列 $\{a_n\}$ 成等比数列．

故 $a_n=2^{n-1}a_1=2^{n-1}\lg\dfrac{x_1+2}{x_1-2}=2^{n-1}\lg 3$．

即 $\lg\dfrac{x_n+2}{x_n-2}=2^{n-1}\lg 3$.

从而 $\dfrac{x_n+2}{x_n-2}=3^{2^{n-1}}$

所以 $x_n=\dfrac{2(3^{2^{n-1}}+1)}{3^{2^{n-1}}-1}$

（III）由（II）知 $x_n=\dfrac{2(3^{2^{n-1}}+1)}{3^{2^{n-1}}-1}$,

$\therefore b_n=x_n-2=\dfrac{4}{3^{2^{n-1}}-1}>0$

$\therefore \dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{3^{2^{n-1}}-1}{3^{2^n}-1}=\dfrac{1}{3^{2^{n-1}}+1}<\dfrac{1}{3^{2^{n-1}}}\le\dfrac{1}{3^{2^{1-1}}}=\dfrac{1}{3}$

当 $n=1$ 时，显然 $T_1=b_1=2<3$.

当 $n>1$ 时， $b_n<\dfrac{1}{3}b_{n-1}<(\dfrac{1}{3})^2 b_{n-2}<\cdots<(\dfrac{1}{3})^{n-1}b_1$

$$\begin{aligned}\therefore T_n&=b_1+b_2+\cdots+b_n\\&<b_1+\frac{1}{3}b_1+\cdots+(\frac{1}{3})^{n-1}b_1\\&=\frac{b_1[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}\\&=3-3\cdot(\frac{1}{3})^n<3.\end{aligned}$$

综上， $T_n<3\ (n\in N^*)$.